

● 常用方法介绍 ● 基本题型分类

● 典型题目解析 ● 常犯错误说明

● 练习训练提高

高等数学典型问题 常用解题方法

主 编 罗家贵 姚正安 穆春来

- 内容实用 只讲常见的、易理解的、有用的
- 分类独创 助您把握学习重点、难点、要点
- 讲法精练 助您轻松复习、轻松理解、轻松解题

高等数学典型问题常用解题方法

主 编 罗家贵 姚正安 穆春来

副主编(以姓氏笔画为序)

王志刚 汤 郎 陈义安

郑映畅 程国忠 潘 伟

第四军医大学出版社·西安

图书在版编目(CIP)数据

高等数学典型问题常用解题方法/罗家贵,姚正安,穆春来主编.
- 西安:第四军医大学出版社,2007. 6

ISBN 978 - 7 - 81086 - 365 - 0

I . 高… II . ①罗…②姚…③穆… III . 高等数学 - 高等学校
- 解题 IV . O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 079122 号

高等数学典型问题常用解题方法

主 编 罗家贵 姚正安 穆春来
责任编辑 杨耀锦
出版发行 第四军医大学出版社
地 址 西安市长乐西路 17 号(邮编:710032)
电 话 029 - 84776765
传 真 029 - 84776764
网 址 <http://press.fmmu.sn.cn>
印 刷 第四军医大学印刷厂
版 次 2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
开 本 787 × 1092 1/16
印 张 24
字 数 718 千字
书 号 ISBN 978 - 7 - 81086 - 365 - 0/O·4
定 价 38.50 元

(版权所有 盗版必究)

前 言

本书是作者结合 20 多年大学数学教学经验与科研成果,通过对现有的高等数学教材和高等数学教学大纲、全国研究生入学数学考试大纲以及高等数学教材中的习题和近 21 年的研究生(数学一、二、三、四高等数学部分)入学考题进行反复的研究、对比、推敲,精心分类编写而成。目的在于教会学生运用所学数学知识轻松解题。本书不仅适合广大数学学习者使用,也可以作为高校老师和学生的教、学参考书,同时还可以作为报考研究生的同学复习高等数学的参考书。

一、本书特点

1. 目标明确。本书编写的目的是教会学生运用所学数学知识轻松解题,获得解题的方法和思路。

2. 分类独创。本书每一章都是根据题型、解题方法、知识点、难点与重点(知识类型)合理组合(如以极限为主要考点的题目全部集中到极限的计算与证明一章,而涉及极限但以其他知识点为主要考点的题目则归入相关章节),标题醒目,重点突出。

3. 内容实用。本书介绍的解题方法都是教材习题解答需要的,也是考试考到的、常见的、有用的、读者容易理解和接受的,且运用这些方法与内容能解答(与高等数学内容相关的)所有教材中的习题和各种考试出现的考题。

4. 结构合理。本书每一章都分为常用方法(涉及的题型单一,解法多)或基本题型(涉及的题型多,解法相对单一,且每种题型的解法都有相对固定的解题步骤)、典型题目分析、练习提高三个部分;既有解题方法介绍、基本题型分类、易犯错误说明,又有典型题目分析,还有真题模拟练习。

5. 层次分明。首先介绍解法,再运用解法对现有教材中的典型题目(包括研究生入学考题中的典型题目)(按章分类并按填空题、选择题、解答题三部分)进行详细解析,最后配备与原题难度相当(或稍难一点)的练习题(仍分为填空题、选择题、解答题三部分)供读者练习。

6. 讲法精练。本书介绍的每一种方法,都给出了适用范围和注意事项,多数题型都有详细的解题步骤;每一章的最后都提出了解题的基本原则或基本要求或基本思路;针对读者对基本概念、基本定理的理解容易出现错误之处并结合我们在教学中对学生易犯错误的了解,我们在每一章都列出了一些性质,帮助读者正确理解基本概念、基本知识、基本定理的条件与结论(尤其是选择题涉及到正确理解基本概念、基本知识、基本定理的条件与结论的,我们都给出了一些性质)。

二、本书内容

全书分为 12 章,2 个附录,包含了与高等数学所有知识相关的典型题型的常用解题方法,主要内容为:

第一章介绍了常用的 13 种极限计算的方法,对每一种方法都给出了适用范围和注意事项,最后给出了计算极限的 9 条原则,利用上述原则和方法,结合每一种方法后面给出的说

明和本章给出的性质,大多数极限计算与证明的题目(包括1987—2007年这21年的研究生入学考题所有与极限计算与证明有关的题目)都可以在7步(多数在5步)内计算出来;

第二章介绍了常用的计算导数的8种方法,最后给出了计算导数的基本要求,利用这些方法可以把涉及到导数计算的题目(直接的和间接的)全部计算出来;

第三章介绍了怎样求曲线的切线与法线、函数的单调区间、凹凸区间、极值、极值点、拐点、曲线的渐近线、函数的最大值最小值及其简单应用、画简单函数的图形,也介绍了区间上的可导函数为常函数的条件,所有内容都有详细的解题步骤;

第四章第一节介绍了证明方程在某个区间有根的6种常用方法,运用这些方法我们在第二节介绍了三种典型问题的命题与解题策略,并给出了每种方法的适用范围,最后给出了证明思路,运用这些方法可以轻松构造出辅助函数并证明现有的所有高等数学教材中(包括1987—2007年这21年的研究生入学考题)的相关题目;

第五章介绍了证明不等式的5种常用方法及其适用范围,所有方法都有详细的解题步骤;

第六章介绍了计算不定积分的5种常用方法,计算定积分的4种常用方法,也介绍了不定积分、定积分的性质及其应用;微积分学基本原理(变上限定积分导数的计算),积分不等式的证明,最后得出了积分计算的注意事项与基本思路,通过本章的学习,积分计算不再难;

第七章介绍了怎样求平面图形的面积,平面曲线的弧长,旋转体的体积与侧面积,已知平行截面面积的立体体积,函数的平均值,也介绍了广义积分的计算与敛散性的判定;

第八章介绍了怎样求多元函数的偏导数、多元复合函数、多元隐函数的偏导数,怎样求多元函数的极值与条件极值,怎样求空间曲线的切线及法平面,怎样求空间曲面的切平面及法线,怎样求多元函数在某个区域内的最大最小值及其简单应用;

第九章介绍了计算二重积分的2种常用方法,给出了计算二重积分的基本步骤,也强调了计算二重积分的注意事项;

第十章介绍了7种常数项级数敛散性的判定方法,函数项级数的收敛域及其和函数的计算,函数的幂级数展开、性质、和函数的计算及其应用,幂级数的收敛半径、收敛区间和收敛域的计算,最后给出了常数项级数敛散性判定的基本思路,所有内容都有详细的解题步骤;

第十一章介绍了可分离变量的微分方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程(伯努利方程)、全微分方程、可降阶的高阶微分方程、常系数齐次线性微分方程、常系数非齐次线性微分方程、欧拉方程等及其解法;线性微分方程解的性质及解的结构;

第十二章介绍了求三重积分的三种常用方法,给出了三种方法的定限口诀和三重积分计算的基本步骤和注意事项;介绍了第一型线、面积分的计算方法;介绍了求第二型曲线积分的四种常用方法;也介绍了求第二型曲面积分的2种常用方法;

前十一章的内容对所有专业和方向的学生都有学习或考试要求,但对考研的同学,报考数学二的不要求8.1.5,8.1.6,8.1.7,11.1.4,11.1.9和第十章的内容;报考数学三的不要求2.1.5,4.2,7.1.2,7.1.5,8.1.5,8.1.6,8.1.7,11.1.4,11.1.5,11.1.9及11.1.3中的伯努利方程;报考数学四的不要求2.1.5,4.2,7.1.2,7.1.5,8.1.5,8.1.6,8.1.7,11.1.4,11.1.5,11.1.7,11.1.8,11.1.9,11.1.3中的伯努利方程和第十章的内容。

第十二章只对学习数学一的学生有学习与考试要求,但由于该部分内容在全国研究生入学考试中出现的考题多,分值大,因此我们仍把它单列一章,与前十一章一样分为常用方

法介绍,典型题型分析和练习提高三部分;

附录 1 介绍的内容除微积分在物理学中的应用对数学二有要求,差分方程对数学三(且仅对数学三)有要求外,其余内容都只对数学一有要求,且在全国研究生入学考试中出现的考题少,分值小,因此我们仅仅给出从 1987 到 2007 这二十一年的全国研究生入学考试相关的题目及其解答,未进行解题方法介绍,也未给出练习题目;

附录 2 给出了前十一章介绍的所有性质,以方便读者查阅和使用。

三、对读者的建议

第一,认真学习每一章第一节的解题方法,尤其要重视并理解每一种解题方法后面的说明,认真阅读第一节结束时给出的基本原则(基本要求或基本思路)。第二,运用第一节介绍的解题方法和基本原则(基本要求或基本思路)试做本章第二节的典型题目并与后面给出的典型题目分析对比,若你能顺利给出解答并且正确,说明你已掌握本章内容,你可以进入下一章的学习(第三节的练习题目你可以过几天再做,以达到巩固、提高的效果);若你不能顺利给出解答或给出的解答不正确,你应该认真学习后面的典型题目分析,分析不会做的原因,学习完第二节后,立刻做第三节的练习题,以便趁热打铁熟练掌握本章解题方法。第三,本书较难的题,尤其是证明题中的难题,考题分析中都有详细的分析,全部是按照第一节的解题步骤引到读者得到正确的解题思路,希望读者能认真学习,这也有助于您加深对解题方法的理解和掌握。第四,由于本书是解题方法指导书,目的是教会学生运用所学数学知识轻松解题,因此需要具备一定的高等数学知识。我们建议读者按照教学大纲的要求(考研的读者则要以全国研究生入学统一考试数学考试大纲的要求),选择一本适合自己的高等数学教材,认真、系统地复习大纲要求的基本概念、基本知识、基本性质和基本定理,做好读书笔记,对照大纲整理好知识点;在完成这一阶段的任务后再选择和使用本书,定当取得事半功倍的效果。第五,几乎每一章都给出了相当数量的性质,这些性质对读者解题相当有用(许多性质教材中是没有的),读者应把它们作为第一阶段复习的知识点的有益补充并入自己的读书笔记,理解并记忆,考试时读者可以把它们作为定理来用(若为考试原题,则要给出解答)。

本书初版,限于水平,错误难免,请使用本书的读者多提意见,以便改进!

本书得到海南大学博士科研基金的资助!

作者 E-mail: jg_Luo@tom.com, luojg62@126.com

编者

2007 年 5 月于海南

目 录

第一章 极限的计算与证明	(1)
1.1 常用方法	(1)
1.2 典型题目分析	(15)
1.3 练习提高	(30)
第二章 导数的计算	(37)
2.1 常用方法	(37)
2.2 典型题目分析	(41)
2.3 练习提高	(49)
第三章 导数的应用	(55)
3.1 基本题型	(55)
3.2 典型题目分析	(63)
3.3 练习提高	(71)
第四章 导数的应用续 1: 方程的极	(80)
4.1 常用方法	(80)
4.2 典型题型命题与解题策略	(92)
4.3 典型题目分析	(111)
4.4 练习提高	(119)
第五章 导数的应用续 2: 不等式的证明	(125)
5.1 常用方法	(125)
5.2 典型题目分析	(135)
5.3 练习提高	(142)
第六章 积分的计算及其相关问题	(147)
6.1 基本题型	(147)
6.2 典型题目分析	(162)
6.3 练习提高	(174)
第七章 定积分的应用与广义积分	(184)
7.1 基本题型	(184)

7.2	典型题目分析	(198)
7.3	练习提高	(210)
第八章	多元函数微分学	(216)
8.1	基本题型	(216)
8.2	典型题目分析	(229)
8.3	练习提高	(240)
第九章	二重积分的计算	(245)
9.1	常用方法	(245)
9.2	典型题目分析	(249)
9.3	练习提高	(259)
第十章	无穷级数	(264)
10.1	常数项级数敛散性的常用判定方法	(264)
10.2	常数项级数求和的常用方法	(272)
10.3	函数项级数	(274)
10.4	典型题目分析	(285)
10.5	练习提高	(297)
第十一章	常微分方程	(303)
11.1	基本题型	(303)
11.2	典型题目分析	(318)
11.3	练习提高	(327)
第十二章	三重积分与线面积分的计算	(331)
12.1	求三重积分的常用方法	(331)
12.2	线面积分的计算	(335)
12.3	典型题目分析	(341)
12.4	练习提高	(358)
附录 1	部分考题及其解答	(361)
附录 2	各章性质	(370)

第一章 极限的计算与证明

1.1 常用方法

1.1.1 利用极限的定义

极限分为函数极限与数列极限,数列极限只有一种形式($n \rightarrow \infty$),而函数极限有六种形式,极限定义的本质是要刻划出在自变量的某种无限变化过程中,对应的函数值相应的某种无限变化趋势.

数列极限的定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{当 } n > N \text{ 时,有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

函数极限的定义($x \rightarrow x_0$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时,有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

说明 ① 极限定义的本质是要刻划出 n 无限增大时, x_n 与常数 a 可以无限接近,只要不改变这两个无限,这样的定义就是正确的.

② 函数极限($x \rightarrow x_0$)定义的本质是要刻划出 x 不等于 x_0 而无限接近 x_0 时, $f(x)$ 可以无限接近常数 A . 只要不改变这两个无限,这样的定义就是正确的.

③ 可类似定义其它形式下的函数极限,且定义的本质同样是要刻划出两个无限(因变量的变化是随自变量的变化而变化的).

1.1.2 利用单调有界准则

例 1.1 证明数列 $x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$, $a > 0$ ($n = 1, 2, \cdots$) 的极限存在,并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = ?$

分析 由 $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a + \sqrt{a}} = \sqrt{a + x_1} = x_2, \cdots, x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \cdots$, 不难看出 $\{x_n\}$ 单调递增.

证明 $x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + x_1}, \cdots, x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \cdots, x_2 > x_1$, 现设

$x_n > x_{n-1}$ ($n \geq 2$), 则 $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a + x_{n-1}} = x_n$, 故由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 单调递增. 又 $x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1$, 现设 $x_n < \sqrt{a} + 1$ ($n \geq 1$) 则

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{(\sqrt{a} + 1)^2} = \sqrt{a} + 1,$$

故由数学归纳法知 $\{x_n\}$ 有上界 $\sqrt{a} + 1$. 综上知 $\{x_n\}$ 单调递增有上界, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

现设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 由 $x_{n+1}^2 = a + x_n$ 得 $x^2 = a + x$, 解之

$$x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} (x = \frac{1 - \sqrt{1+4a}}{2} \text{舍去}).$$

说明 ① 如果不知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 是否存在, 那么不能这样求极限, 因为这一计算方法的本质是利用了极限的四则运算法则, 而极限的四则运算法则必须在涉及的极限均存在 (且商的极限要求分母不为零) 时, 才能使用. 例如 $x_n = 2^n = 2x_{n-1}$, 如用上述方法计算会得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ (设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 两边取极限得 $x = 2x$, 因此 $x = 0$), 但 $\{x_n\}$ 是无穷大量, 它的极限不存在.

② 使用单调有界准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 可用数学归纳法或差式比较法 (及通过证明 $x_n - x_{n-1} > 0 (n \geq 2)$ 或 $x_n - x_{n-1} < 0 (n \geq 2)$ 来证明 $\{x_n\}$ 单调递增或单调递减) 或比式比较法 (及通过证明 $\frac{x_n}{x_{n-1}} > 1 (n \geq 2)$ 或 $\frac{x_n}{x_{n-1}} < 1 (n \geq 2)$ 来证明 $\{x_n\}$ 单调递增或单调递减, 但比式比较法只对同号数列适用) 证明数列单调, 但一般情况下, 数列的有界性要用数学归纳法证明.

③ 单调有界数列的极限具有如下性质

性质 1.1 单调递增有上界的数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 满足 $a \geq x_n (n = 1, 2, \dots)$, 一般情况下只要去掉数列的有限多项后, $\{x_n\}$ 不是常数数列, 则从某一项 N 开始, 即 $n \geq N$ 时, 均有 $a > x_n$, N 可以为 1.

性质 1.2 单调递减有下界的数列 $\{x_n\}$ 的极限 a 满足 $a \leq x_n (n = 1, 2, \dots)$, 一般情况下只要去掉数列的有限多项后, $\{x_n\}$ 不是常数数列, 则从某一项 N 开始, 即 $n \geq N$ 时, 均有 $a < x_n$, N 可以为 1.

例 1.1 中, 数列的单调性, 读者不难看出并给出证明. 而上界 $\sqrt{a} + 1$ 可利用单调有界数列的极限的上述性质确定, 在草稿上求出极限 $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$, 使得

$$x_n < \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} < \frac{1 + \sqrt{1+4a+4\sqrt{a}}}{2} = \frac{1 + \sqrt{(1+2\sqrt{a})^2}}{2} = \sqrt{a} + 1 (n \geq 1),$$

因此 $\sqrt{a} + 1$ 是数列 $\{x_n\}$ 的一个上界 (比 $\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ 大的数都可以作为数列 $\{x_n\}$ 的一个上界, 但选择 $\sqrt{a} + 1$, 证明相对容易).

④ 函数极限也有单调有界准则, 且也有与性质 1.1 和性质 1.2 类似的性质.

1.1.3 利用夹逼准则

例 1.2 设 $a_i > 0 (i = 1, 2, \dots, k, k \text{ 为自然数})$

$$\textcircled{1} \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^n \right)^{\frac{1}{n}} \quad \textcircled{2} \text{ 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^n \right)^{\frac{1}{n}}$$

解 ① 设 $a = \max_{1 \leq i \leq k} a_i$, 则 $a > 0$ 为常数, 且 $a^n \leq \sum_{i=1}^k a_i^n \leq ka^n, n = 1, 2, \dots$

从而 $a \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^n \right)^{\frac{1}{n}} \leq k^{\frac{1}{n}} a, n = 1, 2, \dots$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{n}} = 1$, 故由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^n \right)^{\frac{1}{n}} = a = \max_{1 \leq i \leq k} a_i$

② 令 $m = -n$, 利用(1) 不难证明 $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^n \right)^{\frac{1}{n}} = \min_{1 \leq i \leq k} a_i$.

说明 ① 使用夹逼准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛, 关键是找到两数列 $\{y_n\}$ 与 $\{z_n\}$, 使得从数列的某一项起 (即存在 N , 使得 $n \geq N$ 时, N 可以为 1, 也可以不为 1), $y_n \leq x_n \leq z_n$, 并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ 均存在并相等, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

② 记住如下极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1 (a > 0)$

本题结论也可以推广, 即: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^x \right)^{\frac{1}{x}} = \max_{1 \leq i \leq k} a_i$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sum_{i=1}^k a_i^x \right)^{\frac{1}{x}} = \min_{1 \leq i \leq k} a_i$.

③ 应记住本题结论, 以便应用, 例如 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n + 2^n + \cdots + 10^n)^{\frac{1}{n}} = 10$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1^n + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{10^n} \right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

如为填空题或选择题, 很快便能得结果, 如为计算或证明题, 则需仿例 2 给出解答.

1.1.4 利用两个重要极限

1. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$).

例 1.3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right)$

解 $\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{x}{\sin x} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}}$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x}{x} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right) = \frac{\sin x}{x} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \right) = \frac{\sin x}{x}, \text{ 故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

说明 ① 由于 $x \rightarrow 0$ 是指 x 不等于零而无限接近于零, 因此计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ 时, 可以认为 x 不等于零.

② 本题两次用到重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 使用时要注意保持上、下的一致性, 不要误用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 1 \text{ (即上为 } \frac{x}{2^n}, \text{ 下为 } \frac{1}{2^n}, \text{ 不一致).}$$

2. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

例 1.4 设常数 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+a}{n-a} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+a}{n-a} \right)^n = \ln \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-a}{2a}} \right)^{\frac{n-a}{2a} \cdot \frac{n}{n-a}} \right] = \ln e^{2a} = 2a.$

故本题应填 $2a$.

说明 ① 本题计算用到了如下一些性质

性质 1.3 如果 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]$.

此性质是指连续函数的函数符号和极限符号可以交换顺序, 读者应正确理解并会应用.

性质 1.4 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 均存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}.$$

此性质对自变量的其它变化趋势, 即 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$, 也成立, 计算时常常会用到它.

性质 1.5 设 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, n, m$ 为非负整数, 则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} 0, & n < m \\ a_0/b_0, & n = m \\ \infty, & n > m \end{cases}$$

此性质对数列也成立.

性质 1.6 设 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, n, m$ 为非负整数, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} = \begin{cases} 0, & n > m \\ a_0/b_0, & n = m \\ \infty, & n < m \end{cases}$$

② 1^∞ 型的未定式 $f(x)^{g(x)}$ (即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$) 均可用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 计算, 但要注意保持内、外的一致性, 不要犯 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x = e$ (即内为 $2x$, 外为 x , 不一致) 这样的错误.

计算时先内再外进行恒等变形, 即通过加 1 再减 1 得 $f(x) = 1 + [f(x) - 1] = 1 + \frac{1}{\varphi(x)}$ 或 $f(x) = 1 + [f(x) - 1] = 1 + h(x)$, 此处 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty$ 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$, 接着变形得 $f(x)^{g(x)} = \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x) \frac{g(x)}{\varphi(x)}}$ 或 $f(x)^{g(x)} = (1 + h(x))^{\frac{1}{h(x)} h(x) g(x)}$, 从而由重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + h(x))^{\frac{1}{h(x)}} = e$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\varphi(x)}$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) g(x)$ 视具体情况决定是否单独计算 (容易则不计算, 难或较难都可另外计算), 再由性质 1.4 便得: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{\varphi(x)}}$ 或 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) g(x)}$.

例 1.5 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1\right)}$.

而 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1\right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} + \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - 1\right) = 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)$

$= 2,$

4

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^2.$$

说明 ① 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right)$ 的计算用到了等价无穷小替换: $\cos \frac{1}{x} - 1 \sim -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^2$.

② 本题若作替换 $\frac{1}{x} = t$, 书写更为容易、方便. 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} [1 + (\sin 2t + \cos t - 1)]^{\frac{1}{\sin 2t + \cos t - 1} \cdot \frac{1}{t} (\sin 2t + \cos t - 1)}$

$$\text{而 } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\sin 2t + \cos t - 1) = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\cos t - 1) = 2 + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(-\frac{1}{2} t^2 \right) = 2,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e^2.$$

1.1.5 利用洛必达法则

洛必达法则: 如果在自变量的某个无限变化过程中, 有

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$$

$$2. f'(x), g'(x) \text{ 均存在且 } g'(x) \neq 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \text{ 或 } \infty (a \text{ 为有限数})$$

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ 存在, 且 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = a \text{ 或 } \infty.$$

例 1.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^2}$ (n 为自然数)

$$\begin{aligned} \text{解法 1 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sin \frac{1}{x})^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 \ln(x \sin \frac{1}{x})} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln(x \sin \frac{1}{x})} \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin t / t)}{t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}}{2t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t - \sin t}{2t^3}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos t - \sin t}{2t^3}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sec^2 t}{6t^2}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\tan^2 t}{6t^2}} = e^{-\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

说明 ① 本题计算用到了如下重要结果

性质 1.7 ① 如果 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($x_n \neq a$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

此性质的理论依据是海涅原理, 读者应记住并会利用它把数列极限转化为函数极限的计算 (对 $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$ 四种情形, 本性质也成立), 但要注意此性质的逆命题不成立, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 存在, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 不一定存在.

例如, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin n\pi = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \pi x = 0$ (因为取 $x = 2n + \frac{1}{2}$, 则

$$x \sin \pi x = (2n + \frac{1}{2}) \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = (2n + \frac{1}{2}) \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)).$$

② 本题计算过程中也用到了等价无穷小替换.

③ 本题是 1^∞ 型的未定式, 因此利用方法 4 计算会简单一些.

$$\text{解法 2 } \lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sin \frac{1}{x})^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + (x \sin \frac{1}{x} - 1) \right]^{\frac{1}{x \sin \frac{1}{x} - 1} \cdot x^2 (x \sin \frac{1}{x} - 1)},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{3t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = -\frac{1}{6}, \text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^{n^2} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

易见解法 2 优于解法 1, 因此凡 1^∞ 型的未定式, 虽可用洛必达法则计算, 但应尽量使用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 计算.

④ 注意 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{x \sin \frac{1}{x} - 1}} = e$ 使用的是重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 而不是 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$. 因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - 1 = 1 - 1 = 0$, 令 $x \sin \frac{1}{x} - 1 = t$, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{x \sin \frac{1}{x} - 1}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

⑤ 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x \sin \frac{1}{x} - 1 \right)$ 时, 令 $\frac{1}{x} = t$ 是计算中常常采用的一种技巧, 其目的是简化计算.

⑥ 使用洛必达法则计算时, 要注意以下几点:

第一, 应养成首先判断所计算的极限是否属于 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \right)$ 型或可化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 型的 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型的未定式的习惯, 如果不是, 不能误用洛必达法则 (既验证第一个条件是否满足).

例如, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x} = 2$, 而由 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1} = 2$ 计算则不能得分, 此处答案相同纯属巧合. 比如, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x} = \frac{5}{2}$, 而 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{1} = 4$, 错误的原因在于误用洛必达法则.

第二, 洛必达法则可连续使用若干次, 但每次使用前都应判断是否属未定式.

第三, 洛必达法则的第二个条件要求 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 均存在, 且 $g'(x) \neq 0$, 对具体函数容易判断, 只需直接计算, 不用单独验证, 但对抽象函数要注意判断条件是否满足, 慎用洛必达法则. 一般如条件为函数存在连续的导函数时可以使用, 否则不能使用 (填空题与选择题, 可以使用).

例如, 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-3h)}{h}$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-3h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+3h) - f(a)] - [f(a-3h) - f(a)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a+3h) - f(a)]}{3h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(a-3h) - f(a)]}{-3h} = 6f'(a). \end{aligned}$$

此处是利用导数的定义 (方法 1.1.8) 计算, 如用洛必达法则:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a-3h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(a+3h) + 3f'(a-3h)}{1} = 6f'(a), \text{ 则不能得分,}$$

因为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(a+3h) + 3f'(a-3h)}{1} = 6f'(a) \text{ 是利用 } f'(x) \text{ 在 } x=a \text{ 处连续才能得到, 而}$$

题设条件仅为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 故条件改为 $f'(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 则可以使用洛必达法则.

第四, 洛必达法则的第三个条件, 要求计算的最后结果应是一个有限数或 ∞ , 如果不是, 则洛必达法则失效, 应考虑用其它方法计算.

例如, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ 不存在也不为 ∞ , 洛必达法则失效. 可由下法计算:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} \sin x}{1 - \frac{1}{x} \sin x} = 1, \text{ 此处 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \sin x = 0 \text{ 是利用了如下}$$

性质 1.8 无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

第五, 极限不为零的式子应移出单独计算极限, 以简化计算.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos^2 x) \int_0^x \tan^2 t dt}{x^3 \cos x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \tan^2 t dt}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} = \frac{2}{3}$ (因为 $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x$, 这里 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos^2 x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \cos x^3 = 1$ 已移出计算).

1.1.6 利用等价无穷小

常见和常用的等价无穷小有如下四组(读者应熟记之)

设 $\alpha = \alpha(x)$ 是无穷小量, 则

$$1. \alpha \sim \sin \alpha \sim \arcsin \alpha \sim \tan \alpha \sim \arctan \alpha.$$

$$2. \alpha \sim e^\alpha - 1 \sim \ln(1 + \alpha)$$

$$3. 1 - \cos \alpha \sim \frac{1}{2} \alpha^2.$$

$$4. (1 + \alpha)^n - 1 \sim n\alpha.$$

$$\text{例 1.7 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - x^2}$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - \ln e^x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - \ln e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x})}{\ln(1 + \frac{x^2}{e^{2x}})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1.$$

说明 ① 本题用到了等价无穷小替换: $\ln(1 + \frac{\sin^2 x}{e^x}) \sim \frac{\sin^2 x}{e^x}, \ln(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}) \sim \frac{x^2}{e^{2x}}, \sin x \sim x$, 若不用等价无穷小替换, 直接利用洛必达法则计算, 计算量要大许多, 且易出现计算错误.

② 求极限的过程中, 可把积与商中的无穷小量用与之等价的无穷小量替换, 加与减不能替换.

例如, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^3} = 0$, 错. 正确的解法是:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x(1 - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

1.1.7 利用极限与左右极限的关系

$$\text{例 1.8 若 } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x < 0 \\ \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}, & x > 0 \end{cases}, \text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x^2}{1} = 1, \text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 不存在.}$$

说明 ① 本题表明,求一个极限并不意味着这个极限一定存在.

② 本题左极限的计算利用了方法 1.1.6,右极限的计算利用了方法 1.1.5.

③ 讨论分段函数(包括绝对值函数、取极值函数 $\max\{f(x), g(x)\}$ 与 $\min\{f(x), g(x)\}$),它们本质上都是分段函数)在分段点处的连续与极限均应使用这种方法.

例如,设 $f(x) = x^2 - 3, g(x) = 2x$,则

$$\max\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} x^2 - 3, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x < 3 \\ x^2 - 3, & x \geq 3 \end{cases}, \min\{f(x), g(x)\} = \begin{cases} 2x, & x \leq -1 \\ x^2 - 3, & -1 < x < 3 \\ 2x, & x \geq 3 \end{cases}$$

(由 $f(x) - g(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ 讨论便可得上述结果).

④ 式中含有左、右极限不同的函数时,也要通过左右极限讨论.例如,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

⑤ 对于数列极限,有:

$$\text{性质 1.9 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a.$$

$$\text{例 1.9 求 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{1 + e^{4x}} + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{4e^{4x}} + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1,$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = 1$$

说明 ① 本题计算用到了方法 1.1.7, 因为题目中既有绝对值函数, 又有左右极限不同的函数, 也用到了方法 1.1.4 及 1.1.5

② $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + e^x}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{4e^x} = 0$, 是把 $\frac{1}{x}$ 替换为 x , 其目的是简化计算与书写方便.

1.1.8 利用导数的定义

例 1.10 设函数 $f(u)$ 的一阶导数存在, 求极限 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left[f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right) \right]$

其中 t, a 与 r 无关, $a \neq 0$ 为常数.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left[f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right) \right] &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\left[f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f(t) \right] - \left[f\left(t - \frac{r}{a}\right) - f(t) \right]}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f(t)}{\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{a} + \lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(t) - f\left(t - \frac{r}{a}\right)}{-\frac{r}{a}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{2}{a} f'(t) \end{aligned}$$

说明 ① 本题用洛必达法则计算不得分;

② 如果 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

注意此处导数的定义式子中, 符号 $\Delta x (\Delta x = x - a)$ 的灵活性, 例 1.10 中是用 $\frac{r}{a}, -\frac{r}{a}$ 替换了 Δx . 还可以用其它任何符号替换 Δx , 只要这个符号表示无穷小量即可. 例如

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a - h) - f(a)}{-h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a + x) - f(a)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a - x) - f(a)}{-x} \end{aligned}$$

1.1.9 利用函数的连续性

例 1.11 设函数 $y = f(x)$ 之二阶导数连续, 且点 $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 之拐点, 求

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h))}{h^2} \\ \text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h))}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a + h) - f'(a - h))}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(a + h) + f''(a - h))}{2} = f''(a) = 0 \end{aligned}$$

说明 ① 本题可用洛必达法则计算, 是因为函数存在二阶连续导数, 而例 1.10 则不行.

② 拐点是一阶导数 (如果存在一阶导数) 取得极值的点, 因此一定是二阶导数为零 (如果二阶导数存在) 的点或二阶导数不存在的点.

③ 读者应记住下列性质并能熟练的运用它计算极限和求函数的间断点

性质 1.10 初等函数在其有定义的区间上为连续函数.

根据这一性质, 遇到初等函数在其有定义的点处的极限可以直接用函数值代替, 求初等