快乐大本·优秀教材辅导
KUAILE DABEN
YOUXIUJIAOCAIFUDAO

线性代数
习题精解精练

（配同济大学应用数学系第四版教材·高教版）

主 编 母丽华 徐 晶

● 课后习题 精析 精解
● 同步训练 勤学 勤练

XITI
JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

快乐大本·优秀教材辅导

KUAILE DABEN

YOUXIUJIAOCAIFUDAO

线性代数习题精解精练

（配同济大学应用数学系第四版教材·高教版）

主 编 母丽华 徐 晶

主 审 王 锋

XITI

JINGJIEJINGLIAN

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)教材而编写的辅导书。本书按教材的章节顺序编排,每章包括书后习题解析和同步训练题两部分内容,旨在帮助学生熟练掌握解题的基本方法和技巧,巩固所学的知识、开阔视野。

本书可作为高等学校学生学习线性代数的辅导书,也可供教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题精解精练/母丽华,徐晶主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.4

ISBN 978-7-81073-973-3

Ⅰ.线… Ⅱ.①母…②徐… Ⅲ.线性代数-高等学校-解题 Ⅳ.O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 048074 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×1 092mm　1/16
印　　张 8.5
字　　数 171 千字
版　　次 2007 年 4 月第 1 版
印　　次 2007 年 4 月第 1 次印刷
定　　价 12.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　　言

线性代数是工科数学的重要组成部分，是理工科学生学习其他课程的基础，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。为了帮助广大学生扎实掌握线性代数的知识要点，提高解题能力，我们精心编写了这本书。本书与同济大学应用数学系编写的《线性代数》(第四版)教材同步。在编写过程中，由于编者精选同步训练题，归纳每类题的特点，详细介绍解题方法，因此可以说本书是一本简捷、易懂的教学辅导书。

本书共分六章，分别是：第 1 章行列式；第 2 章矩阵及其运算；第 3 章矩阵的初等变换与线性方程组；第 4 章向量组的线性相关性；第 5 章相似矩阵及二次型；第 6 章线性空间与线性变换。每章包括书后习题解析和同步训练题两个部分内容。

全书由母丽华、徐晶担任主编，由哈尔滨工程大学理学院王锋担任主审。

由于作者水平所限，本书不足、疏漏之处难免，恳请读者批评指正。

编　者

2007 年 3 月

目　录

第 1 章　行列式 …… 1
书后习题解析 …… 1
同步训练题 …… 12
第 2 章　矩阵及其运算 …… 19
书后习题解析 …… 19
同步训练题 …… 33
第 3 章　矩阵的初等变换与线性方程组 …… 39
书后习题解析 …… 39
同步训练题 …… 53
第 4 章　向量组的线性相关性 …… 57
书后习题解析 …… 57
同步训练题 …… 78
第 5 章　相似矩阵及二次型 …… 84
书后习题解析 …… 84
同步训练题 …… 110
第 6 章　线性空间与线性变换 …… 115
书后习题解析 …… 115
同步训练题 …… 122
参考文献 …… 127

第1章　行列式

书后习题解析

1.利用对角线法则计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解　(1) $D = 2\times(-4)\times 3 + 1\times 8\times 1 + 0\times(-1)\times(-1)$

$-1\times(-4)\times(-1) - 0\times 1\times 3 - 2\times 8\times(-1) = -4$;

(2) $D = acb + bac + bac - c^3 - b^3 - a^3 = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$;

(3) $D = bc^2 + ab^2 + a^2c - a^2b - b^2c - ac^2 = (a-b)(b-c)(c-a)$;

(4) $D = x(x+y)y + xy(x+y) + (x+y)xy - (x+y)^3 - y^3 - x^3$

$= -2(x^3+y^3)$.

2.按自然数从小到大为标准次序,求下列各排列的逆序数.

(1)1 2 3 4;(2)4 1 3 2;(3)3 4 2 1;(4)2 4 1 3;(5)$1\ 3\ \cdots\ (2n-1)2\ 4\ \cdots\ (2n)$;(6)$1\ 3\ \cdots\ (2n-1)(2n)(2n-2)\ \cdots\ 2$.

解　(1) 此排列为标准排列,逆序数为0;

(2) 此排列4的逆序数为0,1的逆序数为1,3的逆序数为1,2的逆序数为2,所以此排列的逆序数为$0+1+1+2=4$;

(3) 因为3的逆序数为0,4的逆序数为0,2的逆序数为2,1的逆序数为3,所以此排列的逆序数为$0+0+2+3=5$;

(4) 因为2的逆序数0,4的逆序数为0,1的逆序数为2,3的逆序数为1,所以此排列的逆序数为$0+0+2+1=3$;

(5) 因为前n个数的逆序数为0,后n个数的逆序数分别为$(n-1),(n-2),\cdots,1,0$,所以此排列的逆序数为$(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$;

(6) 因为前n个数的逆序数都为0,后n个数的逆序数分别为$0,2,4,\cdots,(2n-2)$,所以此排列的逆序数为$0+2+4+\cdots+(2n-2)=n(n-1)$.

3.写出四阶行列式中含有因子$a_{11}a_{23}$的项.

解　四阶行列式$D=\sum\limits_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中$j_1j_2j_3j_4$是1,2,3,4的一个排列,令$j_1=1,j_2=3$,则$j_3j_4$分别是2,4的某些排列,于是含$a_{11}a_{23}$的项有两项,分别为$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$和$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

4.计算下列各行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$.

解 (1) $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-10r_2]{r_1-4r_2} \begin{vmatrix} 0 & -7 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -15 & 2 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} - \begin{vmatrix} -7 & 2 & -4 \\ -15 & 2 & -20 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-7c_1]{c_2-c_1} - \begin{vmatrix} -7 & 9 & 45 \\ -15 & 17 & 85 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第三行展开}} - \begin{vmatrix} 9 & 45 \\ 17 & 85 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-5c_1} - \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 17 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(2) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2=r_4} 0$$

(3) $$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} \xlongequal{\text{每行提取公因式}} adf \begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{每列提取公因式}} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+r_1} abcdef \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一列展开}} -abcdef \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4abcdef$$

(4) $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第一行展开}} a \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ -1 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第二项按第一列展开}]{\text{第一项按第一行展开}} ab \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} c & 1 \\ -1 & d \end{vmatrix} = ab(cd+1) + ad + (cd+1)$$

$$= abcd + ab + cd + ad + 1$$

5.证明:

(1) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$;

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0$;

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \cdot (a+b+c+d)$;

(5) $\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

证明　(1)　左边 $\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & a(b-a) & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2(b-a) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第三行展开}} \begin{vmatrix} a(b-a) & (b+a)(b-a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各行提公因子}} (b-a)^2\begin{vmatrix} a & a+b \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)^2(a-b) = (a-b)^3 = \text{右边}$$

(2) 按行列式性质　左边 $= \begin{vmatrix} ax & ay+bz & az+bx \\ ay & az+bx & ax+by \\ az & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay+bz & az+bx \\ bz & az+bx & ax+by \\ bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay & az+bx \\ ay & az & ax+by \\ az & ax & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az+bx \\ ay & bx & ax+by \\ az & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} by & ay & az+bx \\ bz & az & ax+by \\ bx & ax & ay+bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & az+bx \\ bz & bx & ax+by \\ bx & by & ay+bz \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ax & ay & az \\ ay & az & ax \\ az & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay & bx \\ ay & az & by \\ az & ax & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & bz & az \\ ay & bx & ax \\ az & by & ay \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} ax & bz & bx \\ ay & bx & by \\ az & by & bz \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & az \\ bz & az & ax \\ bx & ax & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ay & bx \\ bz & az & by \\ bx & ax & bz \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} by & bz & az \\ bz & bx & ax \\ bx & by & ay \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bz & bx & by \\ bx & by & bz \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{提取公因子}} a^3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$$

$$+ b^3 \begin{vmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a^3 + b^3) \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \text{右边}$$

(3) 左边$\xlongequal[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1}]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - 3c_2]{c_3 - 2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 0 =$ 右边

(4) 左边$\xlongequal[\substack{c_3 - c_1 \\ c_4 - c_1}]{c_2 - c_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^4 & b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\text{按第一行展开}} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^4-a^4 & c^4-a^4 & d^4-a^4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{各列提取公因子}} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c+a)(c^2+a^2) & (d+a)(d^2+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3 - c_1]{c_2 - c_1} (b-a)(c-a)(d-a)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c-b & d-b \\ (b+a)(b^2+a^2) & (c-b)(c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac) & (d-b)(d^2+db+b^2+a^2+ab+ad) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2+bc+b^2+a^2+ab+ac & d^2+db+b^2+a^2+ab+ad \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$$

(5) 将行列式按第一列展开,并利用递推法.记

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = D_n$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= xD_{n-1} + (-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1} = xD_{n-1} + a_n \\ &= x(xD_{n-2} + a_{n-1}) + a_n = x^2D_{n-2} + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^{n-2}D_2 + x^{n-3}a_3 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^{n-2}(x^2 + xa_1 + a_2) + x^{n-3}a_3 + \cdots + xa_{n-1} + a_n \\ &= x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + a_{n-1}x + a_n \\ &= \text{右边} \end{aligned}$$

6.设 n 阶行列式 $D = \det(a_{ij})$,把 D 上下翻转,或逆时针旋转90°,或依副对角线翻转,依次得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix}$$

证明:$D_1 = D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D, D_3 = D$.

证明　将 D_1 的第 n 行依次与上一行交换直到第1行;然后将所得行列式第 n 行用上述方法依次交换至第2行 … 最后将所得行列式的第 n 行与第 $n-1$ 行交换,得到行列式 D,于是

$$D_1 = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

同理,对 D_2 做同样处理,即得 D^{T},于是

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D^{\mathrm{T}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D$$

将 D_3 做同样处理

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix} = D_1^{\mathrm{T}} = D_1$$

所以

$$D_3 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_4 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D_1 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D = D$$

7.计算下列行列式(D_k 为 k 阶行列式):

(1) $D_n = \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix}$,其中对角线上元素都是 a,未写出的元素都是0;

(2) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$;

(3) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$;

(提示:利用范德蒙德行列式的结果)

(4) $D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$,其中未写出的元素都是0;

(5) $D_n=\det(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=|i-j|$;

(6) $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$,其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

解 (1) 当 $a=0$ 时,$D_n=0(n\geqslant 3)$,$D_2=-1$;当 $a\neq 0$ 时

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix} \xlongequal{r_n-\frac{1}{a}r_1} \begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & a-\frac{1}{a} \end{vmatrix}$$

根据上三角行列式

$$D_n=a^{n-1}(a-\frac{1}{a})=a^n-a^{n-2}$$

(2) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{从第二行开始依次加到第一行}}$

$$\begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{从第二行开始依次减去第一行的}a\text{倍}}$$

$$[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}=[(x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

$$(3)D_{n+1}=\begin{vmatrix}a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{后 }n\text{ 行依次与上一行交换位置}}}$$

$$(-1)^{n+(n-1)+\cdots+2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{根据范德蒙德行列式}}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}((a-i)-(a-j))$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)$$

$$(4)D_{2n}=\begin{vmatrix}a_n & & & & & b_n\\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n\end{vmatrix}\underline{\underline{\text{按第一行(或第一列)展开}}}$$

$$a_n(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{n-1} & & & & & b_n & 0\\ & \ddots & & & \iddots & & \\ & & a_1 & b_1 & & & \\ & & c_1 & d_1 & & & \\ & \iddots & & & \ddots & & \\ c_{n-1} & & & & & d_{n-1} & 0\\ 0 & & & & & 0 & d_n\end{vmatrix}$$

$$+b_n(-1)^{2n+1}\begin{vmatrix}0 & a_{n-1} & & & & & b_{n-1}\\ & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & a_1 & b_1 & & \\ & & & c_1 & d_1 & & \\ & & \iddots & & & \ddots & \\ & c_{n-1} & & & & & d_{n-1}\\ c_n & 0 & & & & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第二个行列式按第一列展开}]{\text{第一个行列式按最后一列展开}} a_nd_nD_{2n-2}+(-1)^{2n+1}b_n\cdot(-1)^{1+(2n-1)}c_nD_{n-2}$$

$$=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-2}=(a_nd_n-b_nc_n)(a_{n-1}d_{n-1}-b_{n-1}c_{n-1})D_{2n-4}$$

$$=\cdots=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i)$$

(5) $$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(\text{或 } r_1+r_n)]{c_1+c_n}\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ n-1 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列提公因子}}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{后一行减去前一行}}(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+c_n,c_3+c_n,\cdots,c_{n-1}+c_n}(n-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & n & n+1 & \cdots & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=-(n-1)(-2)^{n-2}=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$$

(6) 用添加行列式的行、列以增加行列式阶数,即升阶法.

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}\xlongequal[\text{第一列}]{\text{添加第一行}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\cdots,c_n-c_1]{c_2-c_1,c_3-c_1}\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1&-1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\1&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+\frac{1}{a_k}r_{k+1}(k=1,2,\cdots,n)}\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&0&0&0&0\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

8.用克莱姆法则解下列方程组.

(1) $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=5\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2\\3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0\end{cases}$;　(2) $\begin{cases}5x_1+6x_2=1\\x_1+5x_2+6x_3=0\\x_2+5x_3+6x_4=0\\x_3+5x_4+6x_5=0\\x_4+5x_5=1\end{cases}$

解　(1) 系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}1&-2&3\\-5&-3&-7\\-2&-1&8\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2+5r_1}\begin{vmatrix}1&-2&3\\0&-13&8\\0&-5&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-13&8\\-5&14\end{vmatrix}$$

$$=-142$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-11c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix}5&1&-1&-10\\-2&2&-5&-18\\-2&-3&5&28\\0&1&0&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第四行展开}}(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}5&-1&-10\\-2&-5&-18\\-2&5&28\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}5&-1&-5\\-2&-5&-9\\-2&5&14\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+5r_1]{r_2-5r_1}2\begin{vmatrix}5&-1&5\\-27&0&16\\23&0&-11\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第二列展开}}2(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-27&16\\23&-11\end{vmatrix}$$

$$=-142$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-7&-2&3\\0&-12&-3&-7\\0&-15&-1&8\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}\begin{vmatrix}-7&-2&3\\-12&-3&-7\\-15&-1&8\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-3r_3]{r_1-2r_3}\begin{vmatrix}23&0&-13\\33&0&-31\\-15&-1&8\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}23&-13\\33&-31\end{vmatrix}=-284$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&5&1\\0&1&-7&3\\0&-5&-12&-7\\0&-2&-15&8\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-7&3\\-5&-12&-7\\-2&-15&8\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+2r_1]{r_2+5r_1}\begin{vmatrix}1&-7&3\\0&-47&8\\0&-29&14\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-47&8\\-29&14\end{vmatrix}=-426$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal[c_1-3c_2]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix}-2&1&-1&5\\-5&2&-5&-2\\11&-3&5&-2\\0&1&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}-2&-1&5\\-5&-5&-2\\11&5&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+5r_1]{r_2-5r_1}\begin{vmatrix}-2&-1&5\\5&0&-27\\1&0&23\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&-27\\1&23\end{vmatrix}=142$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3,\ x_4=\frac{D_4}{D}=-1$$

$$(2)D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-5r_2}\begin{vmatrix}0&-19&-30&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-19&-30&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4-5c_3}-\begin{vmatrix}-19&-30&0&0\\1&5&6&-30\\0&1&5&-19\\0&0&1&0\end{vmatrix}=(-1)(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}-19&-30&0\\1&5&-30\\0&1&-19\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0 & 65 & -570\\1 & 5 & -30\\0 & 1 & -19\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}65 & -570\\1 & -19\end{vmatrix}=665$$

同理可求

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}=1\,507,\quad D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}=-1\,145$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}=703,\quad D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}=-395$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}=212$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1\,507}{665},\ x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1\,145}{665},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{703}{665}$$

$$x_4=\frac{D_4}{D}=-\frac{395}{665},\ x_5=\frac{D_5}{D}=\frac{212}{665}$$

9.问 λ,μ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-c_3}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\0&\mu&1\\0&2\mu&1\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\0&\mu&1\\0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=-\mu(\lambda-1)=\mu(1-\lambda)$$

$D=0$ 即 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时,原方程组有非零解.

10.问 λ 取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

解 $D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1-(1-\lambda)r_3}\begin{vmatrix}0 & \lambda-3 & 4-(1-\lambda)^2\\ 0 & 1-\lambda & 2\lambda-1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}\lambda-3 & 4-(1-\lambda)^2\\ 1-\lambda & 2\lambda-1\end{vmatrix}$

$=(2\lambda-1)(\lambda-3)-(1-\lambda)[4-1+2\lambda-\lambda^2]$

$=\lambda(2-\lambda)(\lambda-3)$

所以当 $\lambda=0$,或 $\lambda=2$,或 $\lambda=3$ 时,原方程组有非零解.

同步训练题

1.是非题.

(1) 齐次线性方程组一定有解.( )

(2) 在六阶行列式中,$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 项应取负号.( )

(3) 排列 6427531 的逆序数是偶数.( )

(4) 任一排列,经过两次对换,其奇偶性有可能改变.( )

(5) 行列式中所有元素都乘以非零数 k,等于用 k 乘该行列式.( )

(6) 用行列式定义计算 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$,其中 x^3 系数为 -1.( )

(7) 在 n 阶行列式中,若 0 的个数多于 n^2-n 个,则 $D_n=0$.( )

答 (1)√ (2)× (3)× (4)× (5)× (6)√ (7)√

2.选择 i 与 k,使 $1i25k4897$ 成为奇排列.

解 由题意 i,k 只有两种选择:$i=3,k=6$;或 $i=6,k=3$.在第一种情形下,排列 132564897 中,各个元素的逆序数之和为 $t=0+0+1+0+0+2+0+0+2=5$.

注 解此类问题时,一般取较小的数在先,大数在后,这样逆序数容易求出.如果符合要求,即为所求;如果不符合要求,则另一情况必符合要求.

3.求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & 2x & 1 & -3\\ 3 & 3 & x & 9\\ 1 & 2 & 1 & x\end{vmatrix}$ 中 x^4 与 x^3 的系数.

解 四阶行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$,求 x^4 的系数,需 $a_{ip_i}(i=1,2,3,4)$ 中都含有 x;求 x^3 的系数,必须 4 个 a_{ip_i} 中有 3 个含有 x,含 x^4 项只有 $(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=(-1)^0 2x\cdot 2x\cdot x\cdot x=4x^4$,于是 $f(x)$ 中 x^4 的系数是4;含 x^3 的项只有 $(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=(-1)^1 x\cdot 1\cdot x\cdot x=-x^3$,于是 $f(x)$ 中 x^3 的系数是 -1.

注 在求由行列式确定的多项式中某一项的系数时,如果同一幂次的项不止一个,可求出每一项,然后合并同类项,最终确定系数.

4.已知 3 417,5 304,6 851,2 652 都能被 17 整除,不计算行列式的值,试证