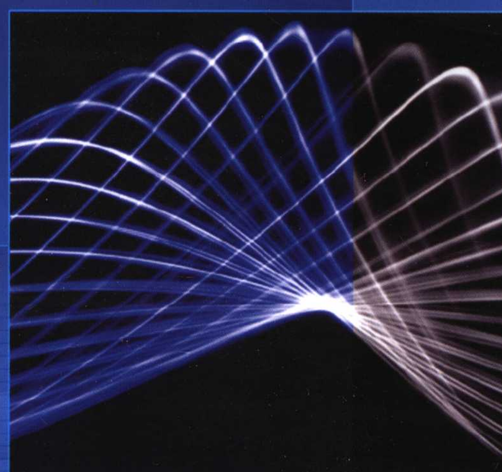
高等学校独立学院教材

微积分(经济管理类)

(上册)

南京大学金陵学院
马传渔 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校独立学院教材

微　积　分

（经济管理类）

（上册）

南京大学金陵学院
马传渔　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是高等学校独立学院经济管理类微积分教材，共分上、下两册。上册内容包括一元函数的极限与连续，导数与微分，不定积分、定积分与反常积分，以及一元函数微积分在经济、几何等学科中的应用。下册内容包括空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，无穷级数，常微分方程以及它们在经济、几何等学科中的应用。

根据高等学校经济管理类专业数学教学的要求，遵循因材施教的原则，书中编写了带(*)号的内容，这部分内容可按经济管理类专业对数学的不同要求，作取舍使用。书中带(*)号的例题或习题选自近4年全国硕士研究生数学三、数学四的考题，以供学有余力的学生学习参考。

本书可作为经济管理类本科生的微积分教材或参考书，也可作为高等学校大专类学生的数学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 上册/马传渔编著. —北京：高等教育出版社，2007. 5

经济管理类

ISBN 978-7-04-021446-8

Ⅰ. 微… Ⅱ. 马… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 047993 号

策划编辑 马 丽 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 宗小梅 **版式设计** 王艳红 **责任校对** 张 颖
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007 年 5 月第 1 版
印　　张	16	**印　　次**	2007 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	**定　　价**	17.10 元

物料号　21446-00

前　言

本书是根据高等学校独立学院经济管理类微积分的教学要求编写的，是大学经济管理类学生学习微积分课程的教材和参考书。

在编写过程中，编者根据经济管理类专业学生的基础和特点，力求注意下面几点：

1. 以“三基”为主线，力争做到基本概念叙述清楚，便于理解、接受；基本理论科学性强，条理分明；基本运算注重方法、技巧，强调运算能力。

2. 注意知识框架前后的纵向联系。着重介绍微积分内容在经济学中的应用，为经济管理类专业基础课的学习提供必要的数学知识。

3. 充分利用几何图形的直观性、代数的运算技巧，以及严密的逻辑推理，将分析、代数、几何三者融为一体，并注意对学生综合知识能力的培养。

4. 内容由浅入深，层次分明；条理清楚、通俗易懂；便于掌握，便于自学。全书列举的大量例题有利于巩固知识，掌握方法。

当今国内已出版了不少高等学校经济管理类的微积分教材，这些教材都是各兄弟院校的同行们多年教学经验的总结和提高，书中有许多值得学习和借鉴之处。为此，在编写本教材时，除虚心听取和采纳多年从事经济管理类数学教学老师们的建议和意见外，还参考了一些有关的微积分教材。

本书能与读者见面得益于南京大学金陵学院院长姚天扬教授和教务主任李元教授的指导和关心。同时要感谢高等教育出版社的马丽同志、江苏省春雨公司魏斌和杜凡同志，他们为本书作了认真的审核和校对。另外，对为本书出版付出辛勤劳动的各位领导和同行在此一并致谢。

由于时间紧迫、水平有限，不当之处在所难免，恳请专家、同行和读者不吝赐教。

南京大学金陵学院
马传渔
2006年10月

目　录

第一章　函　　数

§1.1　预备知识

函数描述变量之间的依赖关系，是微积分学的研究对象．本章将讨论函数的定义及其基本性质，并通过几个简单经济函数的引入，初步了解函数应用的广泛性与重要性．

1. 数系

(1) 自然数系．全体自然数 $0,1,2,3,\cdots,n,\cdots$ 的集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，称 $\mathbf{N}$ 为自然数系．

(2) 正整数系．全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}^*$，即 $\mathbf{N}^*=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，称 $\mathbf{N}^*$ 为正整数系．

(3) 整数系．全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{0,1,-1,2,-2,\cdots,n,-n,\cdots\}$，称 $\mathbf{Z}$ 为整数系．

(4) 有理数系．全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p,q\in\mathbf{Z}\text{，且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\right\}$，称 $\mathbf{Q}$ 为有理数系．

(5) 实数系．全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$，称 $\mathbf{R}$ 为实数系．

(6) 复数系．全体复数的集合记作 $\mathbf{C}$，即 $\mathbf{C}=\{a+b\mathrm{i}\mid a,b\in\mathbf{R}\text{，且 }\mathrm{i}^2=-1\}$，称 $\mathbf{C}$ 为复数系．

有理数、无理数统称为实数，全体实数与数轴上的点是一一对应的．

2. 区间

(1) 开区间．满足不等式 $a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$．

(2) 闭区间．满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间，记作 $[a,b]$，即 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$．

(3) 半开半闭区间．满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的一切实数的全体叫做半开半闭区间，记作 $[a,b)$，即 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$．

类似地,半开半闭区间$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

(4)无穷区间.记号$(-\infty,+\infty)$表示全体实数,记作$-\infty<x<+\infty$;记号$(a,+\infty)$表示大于a的全体实数,记作$a<x<+\infty$或$\{x\mid x>a\}$;记号$(-\infty,b)$表示小于b的全体实数,记作$-\infty<x<b$或$\{x\mid x<b\}$.这里$-\infty$与$+\infty$只是数学符号,不能作为实数进行运算.$(-\infty,+\infty)$,$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$为三种类型的无穷区间.

3. 常用的逻辑符号

(1)符号"$\forall$"表示"对任何"之意.

(2)符号"$\exists$"表示"存在"之意.

(3)充分必要条件"$\Leftrightarrow$",它由必要条件"$\Rightarrow$"与充分条件"$\Leftarrow$"所组成.

$P\Rightarrow Q$,表示命题P的必要条件是Q,即由P可推出Q.

$P\Leftarrow Q$,表示命题P的充分条件为Q,即由Q可得到P.

$P\Leftrightarrow Q$,表示命题P的充分必要条件为Q,即命题P与命题Q是等价的.

*4. 数集的界与确界

定义1 设X是一个数集.若$\forall x\in X$,有$x<m$,即数集X内的任何x都小于某个常数m,则称m为数集X的一个上界;同样,若$\forall x<X$,有$x>m$,即数集X内的任何x都大于某个常数m,则称m为数集X的一个下界.既有上界又有下界的数集称为有界集.无上界或无下界的数集统称为无界集.

比如,数集$X=(0,1)$是有界集,可取1作为上界,0作为下界.又比如,自然数集合$\mathbf{N}$可取0为下界,但无上界,因此,$\mathbf{N}$是无界集.进一步,对于数集$X=(0,1)$,小于0的数都可作为X的下界;大于1的数都可作为X的上界,从而可以断言:若X是有界集,则具有无限多个上界与无限多个下界.

***定义2** 若数集X有上界,则X的最小上界称为X的上确界,记作$\sup X$;若数集X有下界,则X的最大下界称为X的下确界,记作$\inf X$.

比如,$X=(0,1)$,则$\sup X=1$,$\inf X=0$.此时,X的上确界与下确界都不属于数集X.又比如,

$$X=\left\{-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,(-1)^n\frac{1}{n},\cdots\right\},$$

则$\sup X=\dfrac{1}{2}$,$\inf X=-1$.此时,X的上确界与下确界都属于集合X.关于上、下确界有下面的确界定理.

定理1 每一个非空的有上界(或有下界)的集合具有惟一的上确界(或下确界).

5. 绝对值

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

绝对值具有下列基本性质：

(1) $|x|\geqslant 0$, $|-x|=|x|$, $\sqrt{x^2}=|x|$;

(2) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

(3) $|x|\leqslant a$ 等价于 $-a\leqslant x\leqslant a$;

$|x|\geqslant a$ 等价于 $x\geqslant a$ 或 $x\leqslant -a$;

(4) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$.

事实上，因 $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$, $-|y|\leqslant y\leqslant |y|$.

故 $-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|$.

将$|x|+|y|$看成一个整体，由性质(3)，得

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

6. 邻域与去心邻域

(1)δ 邻域.

取定 $x_0\in\mathbf{R}$ 及实数 $\delta>0$，则开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta\}$，亦即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta\},$$

称 x_0 为邻域中心，δ 为邻域半径(见图 1－1).

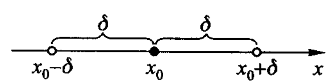


图 1－1

(2)去心 δ 邻域.

若将 $U(x_0,\delta)$的邻域中心 x_0 去掉，就得到点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta\}$，亦即 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\}$.

通常，称$(x_0-\delta,x_0)$为点 x_0 的左 δ 邻域，$(x_0,x_0+\delta)$为点 x_0 的右 δ 邻域.

【习题 1－1】

【A 组】

1. 证明下列各式.

(1) $|ab|=|a||b|$;

(2) $|a-b|\leqslant |a-c|+|b-c|$;

(3) $|a-b|\geqslant \big||a|-|b|\big|$.

2. 把集合 $A=\{x\,|\,|x-2|\leqslant 3\}$用区间记号表示出来.

3. 用区间表示 $U\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$和 $U\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. 用集合表示 $U\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 和 $U\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

5. 引入求和符号 $\sum$ ，记 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. 比如，$1+2+\cdots+n=\sum\limits_{k=1}^{n} k$，$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ 等等.

验证下列等式成立.

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum\limits_{k=2}^{n+1} a_{k-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{n-k}$;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k+b_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k-a_{k-1}) = a_n - a_0$.

【B 组】

1. 证明下列不等式.

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1, x\in \mathbf{R}$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2, x\in \mathbf{R}$.

2. 把集合 $A=\{x\,|\,|x+1|>2\}$ 用区间记号表示出来.

3. 用区间表示 $\mathring{U}\left(2,\frac{1}{2}\right)$ 和 $\mathring{U}\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

4. 证明：

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+n+1}$.

5. 下列数集是否有上(下)确界？如果有，写出其上(下)确界.

(1) $X=\left\{1-\frac{n}{2^n}\,\middle|\, n\in \mathbf{N}^*\right\}$;

(2) $X=\{n^{(-1)^n}\,|\,n\in \mathbf{N}\}$.

§1.2　函　　数

1. 函数的定义

定义 3　设 x,y 是两个变量，D 是一个非空实数集合，$\forall x\in D$，如果按一个对应规则 f，总有惟一确定的 y 值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$，$x\in D$. 又称 x 为自变量，x 的取值范围 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，称 y 为因变量

或函数. 有时候,也将函数$f(x)$的定义域D记作D_f,也以$y=y(x)$表示y是x的函数,右端的字母y就是对应规则的记号.

当自变量x取定值x_0时,函数$y=f(x)$的对应值记作$f(x_0)$,或$y|_{x=x_0}$,即$f(x_0)$是$x=x_0$时$f(x)$的函数值.

$f(x)$的全体函数值的集合$\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的值域,记作Y,或Y_f. 对于不同的函数,定义3中的对应规则可用不同的字母来表示. 比如,$y=g(x)$,$y=F(x)$等等.

函数定义中有两个基本要素:定义域与对应规则. 因此,只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时,才认为它们是同一函数.

【例1】 下列函数$f(x)$与$g(x)$是否为同一函数? 为什么?

(1)$f(x)=\sqrt{x^2}$,$g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(2)$f(x)=\sqrt{1+\sin 2x}$,$g(x)=\sin x+\cos x$;

(3)$f(x)=x$,$g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$.

【解】 (1)因$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,而$g(x)$的定义域为$[0,+\infty)$,$f(x)$与$g(x)$的定义域不一样,故不是同一函数.

(2)因$\sqrt{1+\sin 2x}=\sqrt{\cos^2x+\sin^2x+2\sin x\cos x}=\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}=|\sin x+\cos x|$,即$f(x)=|\sin x+\cos x|$,而$g(x)=\sin x+\cos x$,$f(x)$与$g(x)$的对应规则不一样,故不是同一函数.

(3)$f(x)$与$g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$. 注意到$\sin^2x+\cos^2x=1$,故$f(x)$与$g(x)$是同一函数.

【例2】 设函数$f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$,求$f(0)$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$,$f(-x)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$,$f(x+1)$.

【解】 $f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$;

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3};$$

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x};$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1};$$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=-\frac{x}{x+2}.$$

2. 函数的表示法

函数常用的表示法有3种:解析法(又叫公式法)、表格法和图形法.

(1)解析法. 用解析式表示函数的方法称为解析法. 能明显地表示为 $y=f(x)$ 的函数称为显函数,记作 $y=f(x)$. 比如,$y=\sin x$,$y=2^x+1$ 都是显函数.

若因变量 y 和自变量 x 的对应规则用一个方程 $F(x,y)=0$ 来表示,则称函数 $y=y(x)$ 为由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的隐函数. 比如,由 $x^2-y-1=0$,$x^2+y^2-1=0$,$x+y-e^{xy}=0$ 三个方程分别所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数. 然而,由第一个方程可得显函数 $y=x^2-1$. 对于第二个方程,它的图形是 xOy 平面上圆心为原点的单位圆周. 如果将"满足这个方程"作为 x 与 y 之间的对应法则,尽管当 $x=1$ 或 $x=-1$ 时,只对应 $y=0$ 一个值,但当 x 取开区间 $(-1,1)$ 内任一个值时,对应的 y 却有两个值,不符合函数的定义. 为此要将 $x^2+y^2-1=0$ 写成两个显函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 前者图形代表上半圆周,函数值 $y\geqslant 0$;后者图形代表下半圆周,函数值 $y\leqslant 0$. 对于第三个方程就不能写成显函数 $y=y(x)$ 的形式.

(2)表格法. 用表格形式列出 x,y 之间的各组对应值的方法称为表格法. 比如,对数表、三角函数表就是用表格法来表示函数关系.

(3)图形法. 在 xOy 平面上建立直角坐标系,则函数 $y=f(x)$ 在 xOy 平面上的图形通常为曲线. 这种用函数的图形来表示函数的方法称为图形法.

记 $\operatorname{graph} f=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$,称 $\operatorname{graph} f$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形或图像. 比如,$y=x^2$ 的图形是一条抛物线,即 $\operatorname{graph} x^2$ 是一条抛物线,见图 1-2.

3. 分段函数

有些函数在其定义域的不同部分,对应法则由不同的解析式表出,称这类函数为分段函数. 比如,$y=|x|$ 是分段函数,$\operatorname{graph}|x|$ 见图 1-3.

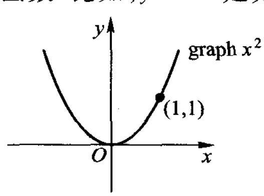


图 1-2

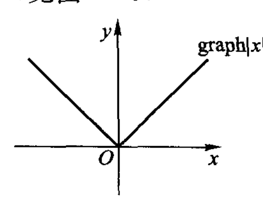


图 1-3

【例3】 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$.

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$ 是一个分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$. 根据符号函数与绝对值的定义，有

$$|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x.$$

$y=\operatorname{sgn} x$ 的图形见图 1－4.

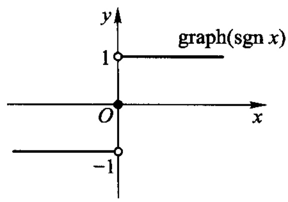


图 1－4

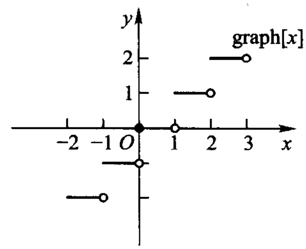


图 1－5

【例 4】 取整函数 $y=[x]$，这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 比如，$[2.6]=2$，$[0.1]=0$，$[-0.1]=-1$，$[\sqrt{3}]=1$ 等等. 如果 $a\in\mathbf{Z}$，则当 $x\in[a,a+1)$ 时，$[x]=a$. 因此，$y=[x]$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是 $\mathbf{Z}$，分段函数 $y=[x]$ 的图形见图 1－5.

由例 3、例 4 可见：分段函数的定义域是其各段定义区域的并集，求在点 x_0 处的函数值 $y(x_0)$ 时，应将 x_0 值代入其所属范围的解析表达式中进行计算.

4. 函数定义域的求法

用解析式给出的函数，其定义域是使得解析式有意义的一切实数所组成的集合，称这样的定义域为自然定义域. 实际问题中函数的定义域是由问题的背景确定的.

【例 5】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x+1}$；

(2) $y=\sqrt{\sin x}+\lg(9-x^2)$.

【解】 (1) $x\neq1$；并且由 $x+1\geqslant0$，得 $x\geqslant-1$. 故定义域为

$$[-1,1)\cup(1,+\infty).$$

(2) 由 $\begin{cases}\sin x\geqslant0,\\ 9-x^2>0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2n\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi+\pi, n\in\mathbf{Z},\\ x^2<9.\end{cases}$

注意到 $x^2<9$ 等价于 $-3<x<3$，故在 $2n\pi\leqslant x\leqslant2n\pi+\pi$ 中只能取 $n=0$，故所求定义域为 $0\leqslant x<3$.

【例 6】 已知分段函数