全国高等农林院校“十一五”规划教材

概率论

吴 坚 刘金山 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论 / 吴坚，刘金山主编．—北京：中国农业出版社，2007.1
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-11313-8

Ⅰ．概…　Ⅱ．①吴…②刘…　Ⅲ．概率论-高等学校-教材　Ⅳ．O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 150577 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
责任编辑　朱　雷

北京智力达印刷有限公司印刷　新华书店北京发行所发行
2007 年 1 月第 1 版　　2007 年 1 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：12
字数：208 千字
定价：16.50 元

内 容 提 要

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材.教材参考教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业概率论课程教学基本要求进行编写.同时兼顾高等农林院校的特点,结合多年的教学体会,对教材进行了一些有益的处理和尝试.

全书内容共有六章和附录.内容包括:随机事件与概率,条件概率与独立性,一维随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律和中心极限定理.

本书是高等农林院校非数学类各专业概率论课程的通用教材,也可作为其他高等院校非数学类各专业学生、科技和管理人员的自学及参考用书.

主　编　吴　坚（安徽农业大学）
　　　　刘金山（华南农业大学）
副主编　吴瑞武（云南农业大学）
　　　　黄燕苹（西南大学）
　　　　郝新生（山西农业大学）
　　　　汪宏喜（安徽农业大学）
　　　　张国权（华南农业大学）
参　编　郑大川（云南农业大学）
　　　　张长勤（安徽农业大学）
　　　　吴渝春（西南大学）
　　　　韩忠海（山西农业大学）
　　　　岑冠军（华南农业大学）
　　　　郑国庆（华南农业大学）
　　　　夏英俊（华南农业大学）

前　言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，适用于高等农林院校非数学类各专业概率论课程的教学，也适用于其他普通高等院校非数学类各专业的教学．该教材的编写参考了教育部非数学类专业数学基础课程教学指导委员会制定的非数学类专业概率论课程的教学基本要求，同时兼顾高等农林院校的特点，旨在传授基本数学知识和提高读者的数学素养，培养读者的概率思维和运用随机数学的基本理论和方法分析和解决实际问题的能力．

概率论是高等农林院校一门重要的数学基础课程，它的理论和思维方式是学习和研究其他学科的重要基础，并且在农林科学、经济、管理、工程技术以及社会科学诸多领域有着广泛的应用．概率论是数学中一个有特色的分支，它是从数量侧面研究随机现象规律性的数学学科，且与数理统计学是姊妹学科，并且与其他数学分支有着紧密联系，是近代数学的重要组成部分，也是近代科学技术发展的重要特征之一.

本书是作为高等农林院校非数学类各专业概率论课程的教材，亦可以作为具有高等数学和线性代数基础的读者自修该课程的读物．该教材中例题和习题较为丰富，供教师和学生选用．考虑到目前概率论课程的学时在各高等农林院校不尽一致，编写内容可供该课程教学学时在30～40学时之间的院校使用，尤其对实行课程小型化的院校更为适用．

本书由安徽农业大学吴坚教授担任第一主编，华南农业大学刘金

山教授担任第二主编，担任副主编的有云南农业大学吴瑞武副教授、西南大学黄燕苹副教授、山西农业大学郝新生副教授、安徽农业大学汪宏喜教授、华南农业大学张国权教授．负责各章编写的人员是：第一章、附录（吴坚）、第二章（吴瑞武）、第三章、第四章（刘金山、汪宏喜）、第五章（黄燕苹）、第六章（郝新生、张长勤）．参加编写的还有郑大川、吴渝春、韩忠海、郑国庆、岑冠军、夏英俊．全书由安徽农业大学吴坚和汪宏喜教授修改和统稿．

囿于学识，本书的错误和不足之处在所难免，期待广大读者和授课老师提出批评和指正．

吴 坚

2006 年 9 月

目　　录

前言

第一章　随机事件与概率 …… 1

第一节　随机事件 …… 1

1.1.1　随机试验与事件 …… 2

1.1.2　事件的关系与运算 …… 4

第二节　概率的定义与基本性质 …… 8

1.2.1　概率的统计定义 …… 8

1.2.2　概率的公理化定义与基本性质 …… 10

第三节　古典概率与几何概率 …… 13

1.3.1　古典概率 …… 13

* 1.3.2　几何概率 …… 19

习题一 …… 22

第二章　条件概率与独立性 …… 26

第一节　条件概率 …… 26

第二节　乘法公式　全概率公式　贝叶斯公式 …… 28

第三节　独立性 …… 32

2.3.1　事件的独立性 …… 32

2.3.2　试验的独立性 …… 34

习题二 …… 36

第三章　一维随机变量及其分布 …… 39

第一节　随机变量及其分布函数 …… 39

第二节　离散型随机变量 …… 42

3.2.1　离散型随机变量及其分布律 …… 42

3.2.2　几种常见的离散型随机变量 …… 45

第三节　连续型随机变量 …… 53

3.3.1 连续型随机变量的概率密度 …… 53
3.3.2 几种常见的连续型随机变量 …… 57
第四节 一维随机变量的函数分布 …… 68
3.4.1 离散型随机变量函数的分布 …… 68
3.4.2 连续型随机变量函数的分布 …… 70
习题三 …… 72

第四章 多维随机变量及其分布 …… 77

第一节 多维随机变量及其联合分布 …… 77
第二节 边缘分布 …… 82
4.2.1 边缘分布函数 …… 82
4.2.2 二维离散型随机变量的边缘分布律 …… 83
4.2.3 二维连续型随机变量的边缘密度函数 …… 86
第三节 条件分布 …… 88
第四节 随机变量独立性 …… 93
第五节 多维随机变量函数的分布 …… 98
习题四 …… 108

第五章 随机变量的数字特征 …… 113

第一节 随机变量的数学期望 …… 113
5.1.1 离散型随机变量的数学期望 …… 113
5.1.2 连续型随机变量的数学期望 …… 117
5.1.3 随机变量函数的数学期望 …… 120
5.1.4 数学期望的性质 …… 122
第二节 随机变量的方差 …… 124
第三节 协方差和相关系数 …… 129
第四节 高阶矩 …… 134
第五节 位置特征 …… 136
习题五 …… 138

第六章 大数定律和中心极限定理 …… 141

第一节 切比雪夫不等式 …… 141
第二节 大数定律 …… 142
第三节 中心极限定理 …… 147
习题六 …… 153

附录 1　习题答案 …… 157

附录 2　排列与组合 …… 169

附录 3　附表 …… 172

附表 1　二项分布表 …… 172
附表 2　泊松分布表 …… 178
附表 3　标准正态分布表 …… 179

第一章　随机事件与概率

本章主要介绍概率论的研究对象——随机事件，概率的统计定义与公理化定义，古典概型、几何概型以及概率的基本性质与简单计算.

第一节　随机事件

在自然界和人类社会的各项活动中，人们所观察的现象大致可分为两类.一类是可以预知其确切结果的，即在一些确定条件 C 满足时，某一确定的现象 A 必然会发生(或必然不发生)，或根据它过去的状态，完全可以预知将来的发展状态.例如："如果平面图形是三角形(条件 C 满足)，那么该图形的内角和是 $180°$(现象 A 必然发生)"；又如："纯种紫花豌豆的后代开紫花"、"冬去春来"等等这些现象是一定会发生的.而像"在 101 325 Pa 的大气压下，水加热至 100 ℃不沸腾"和"同性电荷相互吸引"等现象是必然不会发生的.这两者虽然形式相反，但实质是相同的.所有这类现象都称之为**确定性现象**(或**决定性现象**、**必然现象**)，它们广泛地存在于自然和社会现象中，许多数学理论如微积分学、微分方程、线性代数等都是研究确定性现象的有力数学工具.与确定性现象不同，在自然界和社会现象中还大量存在与之有本质区别的另一类现象.它是事先不能预知结果的，即在相同条件下重复观察或进行试验时，每次得到的结果未必相同，或即使知道它过去的状态，也不能肯定它将来的发展状态.例如，重复抛掷一枚质地均匀的硬币，可能国徽面朝上，也可能国徽面朝下，并且每次抛掷前都不能预知抛掷的结果.再如：某射手重复射击所得的环数、某地今年冬暖情况、明年小麦赤霉病流行程度等现象.这类现象我们称之为**随机现象**(或**偶然现象**).

对于随机现象来说，它在一定的条件下，可能会出现这样或那样的结果，而且在每次观察或实验之前不能预知这一次观察或实验的结果.这种现象不是本身不明确，而是发生的条件不充分，使得在条件与结果之间不能出现确定性的因果关系，从而使得在结果的发生与否上表现出不确定的性质，这种不确定性就是**随机性**.经过长期的反复观察和实验，人们发现这种现象的不确定性或结果的不能预知，只是对一次或几次观察和实验而言的.当在相同的条件下进行大量重复实验或观测时，实验的结果就会呈现出某种规律性.例如，多次重复抛掷硬币时，

国徽朝上的次数会约占抛掷总次数的一半. 再如灯泡的寿命. 物体的测量值等等,它们都会在大量重复观测或实验后,呈现类似的规律性. 这种规律性就是以后要讲的**统计规律性**. 概率论就是从数量侧面研究随机现象规律性的重要数学学科之一.

1.1.1 随机试验与事件

一般地,人们常把对某种现象的观察或实验统称为**试验**. 在概率论中,也常常通过所谓随机试验来研究随机现象. 我们将满足以下条件的试验称为**随机试验**:

(1) 试验在相同的条件下可以重复进行;

(2) 虽然试验的结果是事先不可预知的,但可以明确试验的所有可能结果或范围.

以后提到试验均指随机试验,通常记为 E. 以下是一些试验的例子:

E_1:掷一个均匀的骰子,观察所掷的点数;

E_2:从一批产品中任意抽取一只,检测其是否合格;

E_3:记录某城市某个月内交通事故发生的次数;

E_4:已知某物体的长度在 a 与 b 之间,测量其长度;

E_5:观测某地某天下午 5 点的降雨量;

E_6:对某只灯泡做实验,观察其寿命;

E_7:观察某动物种群进入划定区域的数量.

在随机试验中,有时我们可以确切知道其全部可能结果. 例如 E_1,其结果总不外乎是“出现 1 点”,“出现 2 点”,…,“出现 6 点”这 6 个可能结果之一. 但是在不少情况下,我们不能确切知道某一随机试验的全部可能结果,但可以确切知道它的结果范围. 例如 E_5,试验结果降雨量(以 mm 为单位)将是非负实数 x. 我们无法确定 x 可能取值的确切范围,但可以把该范围取为$[0,+\infty)$. 它总可以包括一切可能的结果,尽管我们明知,有些结果,像 $x>10\,000$ 是不会发生的,我们甚至还可以把这范围取为$(-\infty,+\infty)$也无妨. 这样就有了一定的数学抽象,可以为今后讨论问题带来更大的方便.

一般地,我们称随机试验 E 的所有可能结果或范围组成的集合为**样本空间**(或**基本事件空间**),记为 Ω. 样本空间的元素,也就是随机试验的单个结果称为**样本点**(或**基本事件**),通常以 ω 表示,即 $\Omega=\{\omega\}$.

在具体问题中,首先要认清样本空间 Ω 是怎么构成的,它是描述随机现象的第一步. 例如,对于上述随机试验 $E_k(k=1,2,\cdots,7)$的样本空间 Ω_k 是:

$\Omega_1=\{1,2,\cdots,6\}$;

$\Omega_2=\{$合格品，不合格品$\}$；

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\Omega_4=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

$\Omega_5=\{x|x\geqslant 0\}$；

$\Omega_6=\{t|t\geqslant 0\}$；

$\Omega_7=\{0,1,2,\cdots,N\}$；$N$ 为该动物种群的数量.

实际上，Ω_3，Ω_5，Ω_6 中有许多元素是多余的，只是为了讨论问题方便才这样处理. 而 Ω_5，Ω_6 本质上是一样的，但代表了不同的问题. 另外，样本空间 Ω 一般是由那些不能或不必再分的 ω 所组成的，使得在每次实验或观察时有一且仅有一 $\omega\in\Omega$ 发生. 尽管对于实际问题来说，用一个恰当的样本空间来描述有时也值得研究，但在概率论中，样本空间是给定的，这是必要的抽象，也有利于其有关结论可以广泛地应用.

有了样本空间的概念，就可以定义一般的随机事件了. 我们还是从一个例子开始.

例 1.1.1　某袋中装有 4 只白球和 2 只黑球，考虑依次从中任意摸出两球所可能出现的情况. 若对球进行编号，4 只白球分别编为 1,2,3,4 号，2 只黑球编为 5,6 号. 若用数对 (i,j) 来表示第一次摸得 i 号球，第二次摸得 j 号球，则可能出现的结果是：

(1,2)，(1,3)，(1,4)，(1,5)，(1,6)，

(2,1)，(2,3)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，

(3,1)，(3,2)，(3,4)，(3,5)，(3,6)，

(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,5)，(4,6)，

(5,1)，(5,2)，(5,3)，(5,4)，(5,6)，

(6,1)，(6,2)，(6,3)，(6,4)，(6,5).

把这 30 种可能结果作为样本点，则构成了样本空间 Ω. 在该问题中，我们还感兴趣下面另外一些随机现象：

A：第一次摸出黑球；B：第二次摸出黑球；C：第三次摸出黑球.

显然，A 要出现必须且只须下列可能结果之一出现：

(5,1)，(5,2)，(5,3)，(5,4)，(5,6)，

(6,1)，(6,2)，(6,3)，(6,4)，(6,5).

B，C 的情形请读者自己作为练习. 我们注意到，A，B，C 都是由若干个样本点所构成，是样本空间的某个子集，易见，$A\subset\Omega$.

今后，我们就将样本空间的一个子集称为一个**随机事件**，简称**事件**，通常用大写字母 A，B，C，…表示. 因此，随机事件就是试验的若干个结果组成的集合.

如果一个随机事件只含一个试验结果，它即为基本事件. 可以看出，某事件的发生(出现)是当且仅当它所包含的某一基本事件发生.

在这里，事件这一名词不是通常意义下的概念. 例如某矿难事件，它们往往指一种已发生的情况. 在概率论中则不然，事件不是指已发生的情况，而是指某类现象，它可能发生，也可能不发生，具有随机性，它的发生与否要等实验或观察之后才能知晓. 另外，由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点，且是 Ω 自身的一个子集，在每次试验中它总是发生的，所以称 Ω 为**必然事件**，它对应了必然现象. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是样本空间 Ω 的一个子集，且每次试验中总不会发生，所以称 $\varnothing$ 为**不可能事件**，它对应了不可能现象. 这样处理是为了今后研究的方便.

例 1.1.2 掷一个均匀的骰子，用 $A_i=\{i\};i=1,2,\cdots,6$ 分别表示所掷的点数，B 表示“偶点数”，C 表示“奇点数”，D 表示“3 点或 3 点以上”，试写出样本空间 Ω，并指出 $A_1,A_2,\cdots,A_6,B,C,D$ 事件中哪些是基本事件，并表示事件 B，C，D.

解：抛掷后有 6 种不同的结果，即 $A_1,A_2,\cdots,A_6$，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$；$A_1,A_2,\cdots,A_6$ 是基本事件，而事件 $B=\{2,4,6\}$，$C=\{1,3,5\}$，$D=\{3,4,5,6\}$.

1.1.2 事件的关系与运算

在实际中，往往需要同时考察几个在同样条件下的事件以及它们之间的联系，仔细分析事件间的关系，不仅有助于深刻地认识事件的本质，而且可以简化一些复杂事件的概率计算.

既然事件是一个集合，因此有关事件间的关系、运算及运算规则也就可以按照集合的情况来处理，由事件发生的含义，可以给出以下事件的关系与运算的定义.

设 Ω 是试验 E 的样本空间，A,B,C 及 $A_1,A_2,\cdots$ 都是 E 下的事件，即为 Ω 的子集.

1. 事件的包含与相等

若事件 A 中的每个基本事件都包含在事件 B 之中，即 A 的发生必然导致 B 的发生，则称**事件** A **包含于事件** B，或**事件** B **包含事件** A，记为 $A\subset B$. 显然，对于 E 下的任何事件 A，必有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

例如，在例 1.1.2 中，$A_1\subset C$，$A_2\subset B$ 等.

若 $A\subset B$，且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等(或等价)**，记为 $A=B$.

2. 事件的和、积、差

对两个事件 A 和 B，称“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”的事件，即 A 或

B 发生为事件 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和(或并)，记为 $C=A\cup B$ 或 $C=A+B$.

从定义可以看出，A 与 B 的和事件就是将 A 与 B 所包含的试验结果并在一起. 例如，在例 1.1.2 中，$A_2\cup B=\{2,4,6\}$，$C\cup D=\{1,3,4,5,6\}$. 显然，一般有 $A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$

还要注意的是，"A 与 B 至少有一个发生"并不是指 A，B 已经或必然发生了一个，而是在试验时，若 A，B 至少发生了一个，则算 $C=A\cup B$ 发生了. 在一次试验中，当然可能 A 与 B 都不发生，此时 $C=A\cup B$ 也就不发生了.

事件的和很自然地推广到多个(有限或无限)的情形. 例如 n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的和事件 C 定义为

$$
\begin{aligned}
C=\bigcup_{i=1}^{n}A_i &=\{A_1\text{ 发生，或 }A_2\text{ 发生，}\cdots\text{，或 }A_n\text{ 发生}\}\\
&=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 至少有一个发生}\}.
\end{aligned}
$$

对无限个事件 A_1，A_2，$\cdots$，可类似定义它们的和事件 C 为

$$
\begin{aligned}
C=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i &=\{A_1\text{ 发生，或 }A_2\text{ 发生，}\cdots\}\\
&=\{A_1,A_2,\cdots\text{至少有一个发生}\}
\end{aligned}
$$

在例 1.1.2 中，$B=\{\text{偶数点}\}=A_2\cup A_4\cup A_6$，$C=\{\text{奇数点}\}=A_1\cup A_3\cup A_5$，而 $D=A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6=\bigcup\limits_{i=3}^{6}A_i$.

对两个事件 A 和 B，称"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件，即 A 与 B 都发生为事件 $\boldsymbol{A}$ **与** $\boldsymbol{B}$ **的积(或交)**，即 $C=\{A\text{ 发生，}B\text{ 发生}\}$，记为 $C=A\cap B$ 或 $C=AB$.

从定义中可以看出，A 与 B 的积事件就是集合 A 与 B 的公共部分. 在例 1.1.2中，$C\cap D=\{3,5\}$.

类似地，事件"n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 同时发生"称为事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的积，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或 $A_1A_2\cdots A_n$. 而无限个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$同时发生的事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，或 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$，或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$.

对两个事件 A 和 B，称"事件 A 发生而事件 B 不发生"的事件为事件 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，记为 $C=A-B$，即

$$C=\{A\text{ 发生，}B\text{ 不发生}\}.$$

易见，$A-B$ 就是从构成 A 的那些试验结果中，去掉 B 中所包含的试验结果后所剩下的部分. 例如，在例 1.1.2 中，$C-D=\{1\}$，$D-C=\{4,6\}$.

3. 互不相容事件与对立事件

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B

是**互不相容**(或**互斥**)的. 例如,基本事件是两两互不相容的. 又如在例 1.1.2 中,有 $B\cap C=\varnothing$,则事件 B 与 C 是互不相容的.

如果事件 A 与事件 B 满足:(1)$A\cap B=\varnothing$;(2)$A\cup B=\Omega$,即事件 A 与事件 B 必发生其一,但不能同时发生,则称事件 A 与事件 B 是**互逆**的,或者说 A 是 B 的**对立事件**,记为 $A=\overline{B}$(或 $B=\overline{A}$).

由定义可知,对立事件必为互不相容事件,即 $A\cap\overline{A}=\varnothing$,反之未必. 另外,由差事件定义知,$\overline{A}=\Omega-A$,所以也称 $\overline{A}$ 是 A 的补事件,且 $\overline{A}=\{A$ 不发生$\}$.

例如,在 0,1,2,…,9 共十个数字中任取一个,则有

$$\Omega=\{0,1,2,\cdots,9\}.$$

令事件 A 为"取到一个数$\leqslant 3$",B 为"取到一个数$\geqslant 5$",则 $A\cap B=\varnothing$,即 A 与 B 互不相容,但是 $A\cup B=\{0,1,2,3,5,6,7,8,9\}\neq\Omega$,所以 A 与 B 不互逆.

既然事件间的关系和运算与集合间的关系和运算是一致的,因此可用平面上的图形来表示,这种直观表示法称为文氏(Venn)图(图 1.1.1).

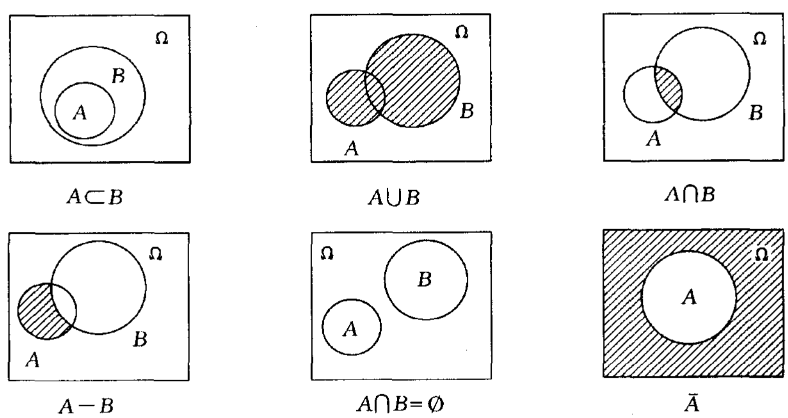

图 1.1.1

在进行事件的运算时,经常需要如下的运算律.

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对于多个随机事件,上述运算规则也成立. 例如

$A\cap(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=(A\cap A_1)\cup(A\cap A_2)\cup\cdots\cup(A\cap A_n)$;

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i;\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i;$$
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i;\ \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

另外，还应注意到成立 $A-B=A\overline{B}$，$A=(AB)\cup(A\overline{B})$，$\overline{\overline{A}}=A$ 等.

例 1.1.3　设 A,B,C 是三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) 恰有 A 发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 都发生；

(4) 恰有一个事件发生；

(5) 至少有一个事件发生；

(6) 恰有两个事件发生；

(7) 不多于两个事件发生；

(8) A,B 至少有一个发生，而 C 不发生.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) ABC；

(4) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(5) $A\cup B\cup C$；

(6) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(7) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$ 或 $\overline{ABC}$；

(8) $(A\cup B)\overline{C}$ 或 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup AB\overline{C}$.

例 1.1.4　化简下列各事件：

(1) $(\overline{A}\cup B)(A-B)$；　　(2) $\overline{A}B\cup AB\cup\overline{B}C$；

(3) $(\overline{A}\cup B)$；$(A\cup B)(B-C)$.

解　利用事件的运算和运算律，有

(1) $(\overline{A}\cup B)(A-B)=(\overline{A}\cup B)A\overline{B}=\overline{A}A\overline{B}\cup BA\overline{B}=\varnothing$；

(2) $$\begin{aligned}\overline{A}B\cup AB\cup\overline{B}C&=(\overline{A}B\cup AB)\cup\overline{B}C=(\overline{A}\cup A)B\cup\overline{B}C\\&=\Omega B\cup\overline{B}C=B\cup\overline{B}C=(B\cup\overline{B})(B\cup C)=B\cup C;\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(B-C)&=(\overline{A}A\cup BA\cup\overline{A}B\cup BB)B\overline{C}\\&=(BA\cup\overline{A}B\cup B)B\overline{C}=B\overline{C}.\end{aligned}$$

例 1.1.5　求事件“甲产品滞销，且乙产品畅销”的对立事件.

解　记 A 为“甲产品畅销”，B 为“乙产品畅销”，则由题意，有

$$\overline{\overline{A}B}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{B}=A\cup\overline{B},$$

即所求对立对立事件为“甲产品畅销或乙产品滞销”.

第二节　概率的定义与基本性质

1.2.1　概率的统计定义

如何去研究随机事件？一种自然的想法就是像研究必然事件那样，去进一步寻求随机事件发生的条件. 但只要对一些随机事件分析一下，就会发现，这种做法几乎是不可能的，而且是不必要的. 因而人们就产生了寻求随机事件发生"可能性"的另一种自然想法.

这种寻求随机事件发生"可能性"的想法，在实践中是很自然的. 例如，人们对于工厂产品好坏的判别标准之一是它的产品合格率，即产品中合格品个数与产品总数的比值；一种药物对某种疾病的疗效用治愈率，即使用过该药的患者中治愈人数与总人数之比来判断；对于射手的射击技术的判别标准之一是他的命中率，即射击命中次数与总射击次数之比. 像合格率、治愈率及命中率都是人们所关心的随机事件发生的可能性的一个数量化描述.

从这些例子可以概括出事件发生频率的概念.

定义 1.2.1　设 A 是一个事件. 在相同条件下进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，则称 m 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频数**，称 m 与 n 的比值 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A)=\frac{m}{n}.$$

由定义，易见频率具有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

从频率的定义可见，它的大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率愈大，事件 A 发生的愈频繁，这也意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就愈大. 那么，一个事件出现的可能性大小，能否用多次重复试验中其发生的频繁程度 $f_n(A)$ 去刻画呢？先考察如下例子：

例 1.2.1　考虑"掷硬币"的试验. 历史上，许多统计学家都做过这一试验，若记 A:"正面朝上"，有关数据如表 1.2.1.