21世纪

高等院校工科类各专业

数学基础辅导教材 /主 编 刘书田

概率统计

专题分析与解题指导

编著者 肖筱南

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21世纪
高等院校工科类各专业
数学基础辅导教材／主编　刘书田

概率统计
专题分析与解题指导

编著者　肖筱南

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

概率统计专题分析与解题指导/肖筱南编著. —北京：北京大学出版社，2007. 9
(21 世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材)
ISBN 978-7-301-12112-2

Ⅰ. 概…　Ⅱ. 肖…　Ⅲ. ① 概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题
Ⅳ. O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 063851 号

书　　　名：概率统计专题分析与解题指导
著作责任者：肖筱南　编著
责 任 编 辑：曾琬婷
标 准 书 号：ISBN 978-7-301-12112-2/O・0714
出 版 发 行：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　　址：http://www.pup.cn
电　　　话：邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021　出版部 62754962
电 子 邮 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京大学印刷厂
经　销　者：新华书店
787mm×960mm　16 开本　17.5 印张　380 千字
2007 年 9 月第 1 版　　2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　　数：0001—4000 册
定　　　价：25.00 元

内容简介

本书是高等院校工科类、经济管理和财经类各专业学生学习概率论与数理统计课程的辅导书，与现行国内通用的各类统编教材《概率论与数理统计》相匹配，可同步使用. 全书共分八章，内容包括：随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、统计量及其分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析等.

本书系统地将学习该课程时应掌握的概念与理论，重点与难点，解题的思路、方法与技巧，以及容易混淆的问题等，作了深入的阐述与精辟的分析，给出解答与指导. 每章按"内容精讲与学习要求"、"释疑解难"、"典型例题与解题方法综述"、"考研重点题剖析"、"自测题"五部分内容编写. 其中"内容精讲与学习要求"归纳简洁且重点突出；"释疑解难"评述深刻、中肯且思路开阔；"典型例题与解题方法综述"剖析详尽而深入，方法独特而巧妙；"考研重点题剖析"技巧性高且代表性强、适用面广；"自测题"层次分明而综合，题型精粹而全面. 为了使读者更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、理论、方法与技巧，书末附有自测题参考解答，以供读者参考.

本书读者对象为工科类、经济管理和财经类各专业本科大学生. 作为报考硕士研究生读者的精品之选，本书还是一本很有价值的教学参考书，是一本能快速提高解题方法与技巧的无师自通的自学指导书.

《21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》
编审委员会

21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材书目

高等数学专题分析与解题指导（上册）	刘书田等编著	定价28.00元
高等数学专题分析与解题指导（下册）	刘书田等编著	估价25.00元
线性代数专题分析与解题指导	赵慧斌等编著	定价20.00元
概率统计专题分析与解题指导	肖筱南　编著	定价25.00元

前　言

为了满足高等院校工科类在校学生学习数学基础课的需要，我们在教学第一线的教师经集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了《21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》.该系列辅导教材包括《高等数学专题分析与解题指导(上、下册)》、《线性代数专题分析与解题指导》、《概率统计专题分析与解题指导》共四分册.

本书《概率统计专题分析与解题指导》的内容选取紧密结合概率论与数理统计课程的现行教材体系，系统地将学习本课程时应掌握的概念与理论，重点与难点，解题思路与技巧，以及疑惑问题等，作了深入的阐述与精辟的分析，给出解答与指导.通过对典型例题与考研重点题型的分析和研究，不仅可以帮助学生正确理解概率论与数理统计的基本概念与理论，牢固掌握解题方法与技巧，而且还可以进一步培养学生概率统计知识的综合素养，开阔学生的解题思路，提高学生综合分析与解决问题的能力，进而可以从总体上提高学生的学习水平与应试能力，为今后考研做好充分准备.

全书共分八章，每章均按“内容精讲与学习要求”、“释疑解难”、“典型例题与解题方法综述”、“考研重点题剖析”、“自测题”五部分编写.为便于读者研读，书末附有自测题参考解答.本书范例选择具有代表性、启发性、针对性、多样性和综合性，例题解法简便、分析深刻，具有技巧性、灵活性、实用性、普遍性和开拓性.阅读本书不仅提高读者数学思维能力、分析问题解决问题的能力，使读者花费较少的时间和精力，掌握求解各种题型的思路和方法，取得事半功倍之效果，而且能使读者运用已掌握的知识，实现纵向深入，横向联系，由继承性获得向创造性升华.

本书不仅对高等院校工科类、经济管理和财经类各专业本科生及报考硕士研究生者的强化训练极有帮助，而且对从事数学基础课教学工作的教师们也很具参考价值.

本套精品系列辅导教材的编写和出版，得到了北京大学出版社及厦门大学嘉庚学院的大力支持和帮助，责任编辑曾琬婷同志为本书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示诚挚的谢意.

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2007年6月

目　　录

第一章　随机事件及其概率

随机事件及其概率是概率论的最基本的概念.这部分内容主要由四个概念(随机事件、概率、条件概率及事件的独立性)、四个公式(加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式)和三个概型(古典概型、几何概型、独立试验概型)组成.

一、内容精讲与学习要求

【内容精讲】

1. 随机事件

对随机现象进行的观察或试验称为**随机试验**.某事件在一次随机试验中,可能出现,也可能不出现,而在大量的重复试验中该事件的出现具有某种统计规律,这种事件称为**随机事件**.

试验的每一个可能的结果称为一个**基本事件**.

一个随机试验的所有可能试验结果组成的集合称为该试验的样本空间.

随机试验中有两种极端情况:

必然事件　即在任何一次试验中必然出现的事件,通常记做 Ω.

不可能事件　即在任何一次试验中都不可能出现的事件,通常记做 $\varnothing$.

2. 随机事件的概率

2.1　概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间.对于 Ω 中的任一事件 A,规定一个实数 $P(A)$ 与之对应,若 $P(A)$ 满足:

公理 1　非负性:$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

公理 2　规范性:$P(\Omega)=1$;

公理 3　可列可加性:当可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥时,有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为**事件 A 发生的概率**(简称事件 A 的概率).

2.2　概率的统计定义

对一个试验在不变的情况下重复做 n 次,事件 A 发生了 m 次,m 称为事件 A 发生的频

数，$\frac{m}{n}$称为事件 A 的频率．当 n 充分大时，$\frac{m}{n}$稳定在某个常数 p 附近摆动，且 n 越大，摆动幅度越小，则称 p 为**事件 A 发生的概率**，记做 $P(A)=p$．

3. 四个公式、条件概率、独立性

3.1　加法公式

对任意事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.1}$$

当 $AB=\varnothing$（即 A 与 B 互斥）时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B). \tag{1.2}$$

公式(1.1)可以推广到有限个随机事件和的情形：

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

3.2　乘法公式、条件概率、独立性

设 $P(A)>0$，在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，称做事件 B 在已知 A 发生条件下的**条件概率**，记做 $P(B|A)$，且有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}; \tag{1.3}$$

同理有

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad (P(B)>0).$$

上两式可写为

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A), \tag{1.4}$$

称为事件 A 和 B 的**乘法公式**．

公式(1.4)可推广到有限个事件乘积的情形：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}). \tag{1.5}$$

若事件 A 发生与否与事件 B 无关，则称事件 A 与 B **相互独立**．对于两事件相互独立有等价关系：

$$A\text{ 与 }B\text{ 相互独立}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A). \tag{1.6}$$

设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，若对于任意的整数 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意的 k 个整数 $i_1,i_2,\cdots,i_k(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称这 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立．

3.3　全概率公式与贝叶斯公式

若 $B\subset\Omega=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，且 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j)$，$P(A_i)>0(i,j=1,2,\cdots,n)$，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i). \tag{1.7}$$

称公式(1.7)为**全概率公式**;若又有 $P(B)>0$,则有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}\quad(j=1,2,\cdots,n). \tag{1.8}$$

称公式(1.8)为**贝叶斯公式**(**逆概率公式**).

4. 三个概型

4.1　古典概型

古典概型有如下特点:

(1) 所有可能的试验结果只有有限个,即试验的基本事件个数有限,记为 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$;

(2) $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 发生的可能性相等;

(3) 在任何一次试验中,$\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 中有且仅有一个发生.

满足上述三条的事件组 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m$ 称为**等概完备事件组**.

设 A 是具有以上古典概率特征的随机事件,它包含有 m 个试验结果(或说有 m 个基本事件对 A 有利),则事件 A 发生的概率为:

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{所有可能试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1.9}$$

4.2　几何概型

在古典概型中考虑的试验结果只有有限个,这在实际应用中具有很大的局限性,有时还需要考虑试验结果为无穷多个的情形,这就是几何概型.所谓**几何概型**是指具有下列两个特征的随机试验:

(1) **有限区间、无限样本点**:试验的所有可能结果为无穷多个样本点,但其样本空间 Ω 表现为直线、平面或三维空间中具有几何度量的有限区域;

(2) **等可能性**:试验中各基本事件出现的可能性相同,且任意两个基本事件不可能同时发生.

在几何概型试验中,设样本空间为 Ω,事件 $A\subset\Omega$,则事件 A 发生的概率为:

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}, \tag{1.10}$$

其中几何度量指长度、面积、体积等.

4.3　独立试验序列概型(伯努利概型)

在概率论中,把在同样条件下重复进行试验的数学模型称为**独立试验序列概型**.

设在一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0\leqslant p\leqslant 1)$,则在 n 次重复试验中,事件 A 恰好发生 k 次($k=0,1,2,\cdots,n$)的概率为

$$P(A\text{ 恰发生 }k\text{ 次})=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.11}$$

通常有以下近似公式：

(1) 当 $np<5, n\geqslant 10$ 时，用

$$P(A\text{ 恰发生 }k\text{ 次})\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\quad(\lambda=np);\tag{1.12}$$

(2) 当 $p<\frac{1}{2}, np>5$ 或 $p>\frac{1}{2}, n(1-p)>5$ 时，用

$$P(A\text{ 恰发生 }k\text{ 次})\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-np)^2}{\sigma^2}},\tag{1.13}$$

其中 $\sigma^2=np(1-p)$.

【学习要求】

1. 理解随机试验的特征，并能根据随机试验特征分析试验的结果，从而搞清样本空间的构成，以及对某一具体事件是由哪些试验结果构成.

2. 熟悉事件之间的关系与运算.

3. 正确理解概率的公理化定义与统计定义，熟记概率的有关性质. 掌握古典概型的适用范围，并能计算古典概型的概率问题.

4. 会使用概率的加法公式.

5. 理解条件概率的含义，并会利用乘法公式和事件的独立性计算积事件的概率.

6. 了解事件的互斥(互不相容)、对立和相互独立三者之间的关系.

7. 会利用全概率公式和逆概率公式进行概率计算.

8. 会利用独立试验序列概型概率的计算公式进行概率计算.

重点　随机事件、样本空间的概念；事件的关系与运算；条件概率、独立性的概念；事件概率的计算及加法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式的应用.

难点　古典概型下事件的概率计算；全概率公式、贝叶斯公式的应用.

二、释疑解难

1. 样本空间与随机试验有什么关系？随机事件与样本空间有什么关系？

答　随机试验决定样本空间. 而随机事件是样本空间的子集，当样本空间表示必然事件时，随机事件是样本空间的子事件，即随机事件所包含的样本点都属于样本空间.

2. n 个事件的“和运算”与“积运算”有何区别？又有何联系？

答　n 个事件的“和运算”表示 n 个事件中至少有一个发生，这好比开套锁，至少打开一把锁才能开门；n 个事件的“积运算”表示 n 个事件同时发生，就好比开保险锁，要 n 把锁同时打开才能开门. 但和事件的概率可以用积事件的概率来求，反之亦然. 即

(1) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=1-P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)$；

(2) $P\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right)=1-P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)$.

当 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 相互独立时，采用(1)方便；当 $\overline{A}_1,\overline{A}_2,\cdots,\overline{A}_n$ 互不相容时，采用(2)方便.

3. 两事件相互独立、互不相容与互逆(互为对立)能否同时成立？三者关系如何？

答　一般不能同时成立. 相互独立、互不相容与互逆是概率论中的三个非常重要的概念，决不能混淆，必须搞清它们之间的关系.

设 A,B 为试验 E 的两事件.

(1) 互不相容与互逆(互为对立事件)：

$$A \text{ 与 } B \text{ 互不相容} \Leftrightarrow AB=\varnothing;$$

$$A \text{ 与 } B \text{ 互逆} \Leftrightarrow AB=\varnothing \text{ 且 } A\cup B=\Omega.$$

可见，A 与 B 互逆必互不相容，反之不然.

(2) 互不相容与相互独立：

$$A \text{ 与 } B \text{ 互不相容} \Leftrightarrow AB=\varnothing;$$

$$A \text{ 与 } B \text{ 相互独立} \Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B).$$

上式说明，两个事件相互独立，其实质是一个事件 B 出现的概率与另一事件 A 是否出现没有关系，而 A,B 互不相容，则是指 B 的出现必然导致 A 的不出现，或 A 的出现必然导致 B 的不出现，即 $AB=\varnothing$，从而 B 出现的概率与另一事件 A 是否出现密切相关.

那种认为"两事件相互独立必定互不相容"的认识是错误的. 因为在 $P(A)>0,P(B)>0$ 的条件下，若 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)>0$，而若 A,B 互不相容，则 $P(AB)=0$，两种概念出现矛盾.

以上说明在 $P(A)>0,P(B)>0$ 的情况下，相互独立不能互不相容.

因此，在一般情况下，相互独立与互不相容是两个互不等价，完全不同的概念，只有当 $P(A),P(B)$ 之中至少有一个为 0 时，才有可能既互不相容又相互独立.

(3) 互逆与相互独立：与(2)同，一般情况下，互逆不一定相互独立，反之亦然.

4. "n 个事件相互独立"与"n 个事件两两独立"是否一回事？

答　不是一回事. 后者是前者的条件之一，由前者可以推出后者，但反过来不行.

5. 频率与概率有何区别？

答　频率虽能反映一个事件发生的可能性大小，但它具有随机波动性，而概率是频率的稳定值，它所反映的是大量随机现象的规律性.

6. 当 n 充分增大时，事件 A 在 n 次重复试验中发生了 r 次的频率 $W(A)=\dfrac{r}{n}$ 接近概率 $P(A)$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r}{n}=P(A)$ 成立吗？

答　不成立. 若成立，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{r}{n}-P(A)\right|<\varepsilon$. 但是，由于 A 的发生是随机的，故 $\dfrac{r}{n}$ 的值也是随机的，可见无论 N 多么大，都有可能发生

$\left|\frac{r}{n}-P(A)\right|\geqslant\varepsilon$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r}{n}=P(A)$不成立.

7. 积事件的概率 $P(AB)$与条件概率 $P(B|A)$有何区别？它们都是 A,B 同时发生的概率吗？

答　$P(AB)$与 $P(B|A)$是不同的. 积事件的概率 $P(AB)$是在样本空间 Ω 中，计算 A,B 同时发生的概率，而条件概率 $P(B|A)$则是在 A 已经发生的条件下 B 发生的概率，即应在缩减的样本空间 Ω_A 中，计算 B 发生的概率. 用古典概率公式计算，即为

$$P(B|A)=\frac{AB\text{ 中包含的基本事件数}}{\Omega_A\text{ 中包含的基本事件总数}}.$$

8. 使用概率的加法公式和乘法公式时，应注意什么？

答　使用概率的加法公式时，首先要搞清所涉及的事件是否互斥（三个以上的事件是否两两互斥）；使用概率的乘法公式时，首先要搞清所涉及的事件是否相互独立. 例如：

若 A,B 互斥，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B);$$

若 A,B 相容，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

若 A,B 相互独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B);$$

若 A,B 不独立，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A)\quad\text{或}\quad P(AB)=P(B)P(A|B).$$

9. 当 $ABC=\varnothing$时，能否使用公式 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$？

答　不能. 因为由 $ABC=\varnothing$，不能推出 $AB=\varnothing,AC=\varnothing,BC=\varnothing$，即不能说明三个事件两两互斥. 为了正确使用公式，我们还要进一步搞清楚 A,B,C 三事件是否两两互斥.

10. “有放回的抽样”与“无放回的抽样”有什么区别？

答　“有放回的抽样”是指前一次抽出一个样本，观察其结果后放回总体，再进行下一次抽样. 这样，前一次抽样的结果对下一次抽样的结果不会产生影响. 即前后两次抽样试验是相互独立的，是无条件概率问题.

而“无放回的抽样”指的是前一次抽出一个样本不再放回总体中去就进行下一次抽样. 这样，前一次抽样的结果从概率上影响到下一次抽样的结果. 即前后两次抽样试验不是相互独立的，是条件概率问题.

显然，两者是不相同的.

11. 如何判断一个试验是古典概型？怎样计算古典概率？

答　判断一个试验是否为古典概型的关键是“等可能性”即“等概性”，而“有限性”较容易看出. 计算古典概率应按如下步骤进行：

（1）准确分析试验的方式（判断有限性和等可能性）；

(2) 弄清等概完备事件组由什么构成，确定基本事件总数 n；

(3) 求出对 A 有利的基本事件数 r；

(4) 运用古典概率公式 $P(A)=\frac{r}{n}$，算出 $P(A)$.

为了准确无误地把对 A 有利的基本事件数求出，这就要求我们要具有较丰富的分析想象能力，且排列、组合知识要清楚，事件间的关系及运算要熟练.

古典概型问题大体可分为三种类型：(1) 摸球问题(即产品的随机抽样问题)；(2) 分房问题(即球在盒中的分配问题)；(3) 随机取数问题. 若能熟练地掌握以上三种典型问题的解法，则常见的大部分古典问题均可归结为这三类问题之一来处理.

12. 在实际应用中，如何判断两事件的独立性？

答 在实际应用中，对于事件的独立性，我们常常不是用定义来判断，而是由试验方式来判断试验的独立性，再由试验的独立性来判断事件的独立性. 或者说根据问题的实质，直观上看一事件发生是否影响另一事件的概率来判断. 例如，甲、乙两名射手在相同条件下进行射击，则“甲击中目标”与“乙击中目标”两事件是独立的.

如果对实际问题中的事件还难以判断它们是否独立，则需要利用统计资料进行分析，再来判断是否符合事件独立的条件.

13. 如何利用全概率公式和贝叶斯公式计算概率？

答 全概率公式是一个应用广泛的概率计算公式. 它把不太好求的事件 A 的概率问题分解成几个比较容易计算的概率之和，看似繁琐，实则简单. 在分析问题的过程中，A 可视为 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ 的子事件，或者把 B_i 看成 A 发生的原因，A 是结果，而 $P(B_i)$ 及 $P(A|B_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是较易求得的，从而可由“原因”求出“结果”.

贝叶斯公式有时又称后验概率公式，它实际上求的是条件概率，是在已知结果发生的情况下，求导致结果的某种原因的可能性大小. 例如求 $P(B_1|A)$，当 $P(A)$(常用全概率公式计算)，$P(B_1)$，$P(A|B_1)$ 较易求得时，就可用贝叶斯公式，由“结果”推求出“原因”.

三、典型例题与解题方法综述

为了帮助读者进一步深入理解本章内容，提高分析问题与解决问题的能力，现将本章解题方法综述如下：

1. 随机事件的表示

学习本章，读者应该首先结合实例正确理解事件的关系和运算的意义，并能对具体问题进行分析，能将某种比较复杂的事件表为一些简单事件的和或积，从而便可利用简单事件的概率去推算比较复杂事件的概率.

例 1 设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

(1) A 发生，B 和 C 不发生；

(2) A,B,C 中不多于一个发生.

分析　简单事件可直接由事件运算的定义写出，例如(1). 而复杂事件则需全面分析，如(2)可用以下三种分析方法：

(i) 利用图进行分析. 在图 1-1 中，共有 8 块分别代表 8 个事件，其表示式已标图中. “A,B,C 中不多于一个发生”这一事件应当包括 4 块：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$，$\overline{A}\,\overline{B}C$，$A\overline{B}\,\overline{C}$ 及 $\overline{A}B\overline{C}$，因而是它们的和.

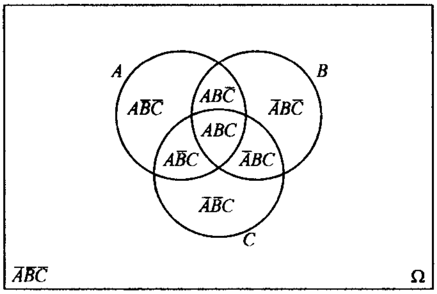

图　1-1

(ii) 将“A,B,C 中不多于一个发生”解释成为“A,B,C 中至少有两个同时不发生”，再写出表达式.

(iii) 先写出它的逆事件，逆的逆就是它本身，(2)中事件的逆事件为“A,B,C 中至少有两个同时发生”.

解　(1) 利用事件运算的定义，该事件可表为 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) 方法 1　该事件可表为

$$(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}).$$

方法 2　该事件可表为$(\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{C})$.

方法 3　该事件可表为$\overline{(AB)\cup(BC)\cup(AC)}$.

注　(1) 对于类似于例 1(2)中的复杂事件，通常尽量采用后两种分析方法.

(2) 例 1(2)的三种表达式是相同的. 事实上，

$$\begin{aligned}
&(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\\
&\quad=(\overline{A}\,\overline{B}C)\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(A\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\\
&\quad=(\overline{A}\,\overline{B}(C\cup\overline{C}))\cup(\overline{B}\,\overline{C}(A\cup\overline{A}))\cup(\overline{A}\,\overline{C}(B\cup\overline{B}))\\
&\quad=(\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{C}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{(AB)\cup(BC)\cup(AC)}&=(\overline{A}\cup\overline{B})(\overline{B}\cup\overline{C})(\overline{A}\cup\overline{C})\\
&=((\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{C})\cup\overline{B}\cup(\overline{B}\,\overline{C}))(\overline{A}\cup\overline{C})\\
&=(\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{A}\,\overline{C})\cup(\overline{B}\,\overline{C})\cup(\overline{B}\,\overline{C})\\
&=(\overline{A}\,\overline{B})\cup(\overline{A}\,\overline{C})\cup(\overline{B}\,\overline{C}).
\end{aligned}$$

2. 古典概型问题

古典概型是一种非常重要的概率模型，它不仅在概率论发展初期曾是主要的研究对象，而且在现在仍是学习概率论的基础. 前面我们已介绍过在实际问题中如何判断一个试验是

古典概型以及古典概率的计算步骤.至于古典概率的基本计算方法,在于怎样利用排列、组合知识来计算基本事件的总数以及有利事件的数目.而在利用排列计算时,我们应根据具体情况分别考虑是使用不可重复排列还是使用可重复排列.一般地,由于可利用排列计算的问题的共同特点是每一个基本事件为一组有序个体,于是当一个基本事件的不同位置上的个体可以重复时,则用可重复排列进行计算;否则,就用不可重复的排列计算.如果基本事件是一组不分顺序的不同的个体,则用组合计算.

以下将古典概型问题分类举例介绍.

例 2(摸球问题(产品的随样抽样问题)) 从 5 双不同鞋号的鞋子中任取 4 只,问 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少?

解 5 双鞋子共 10 只,任意取 4 只,所有可能的基本事件总数为 C_{10}^4.

设 A 表示"4 只鞋子中至少有 2 只鞋子配成一双".求 $P(A)$的方法可有两种:

方法 1 对 A 有利的基本事件有下面两种不同情况:

"恰有 2 只配成一双",共有 $C_5^1C_4^2 2^2$ 种取法.事实上,由于配成对的一双有 C_5^1 种取法,剩下的 2 只可以是其余 4 双中任 2 双中各取一只,2 双的取法共有 C_4^2 种,2 双各取一只共有 2^2 种取法,故以上搭配共有 $C_5^1C_4^2 2^2$ 种取法.

"4 只可配成 2 双",共有 C_5^2 种取法.

于是对 A 有利的基本事件数目为 $C_5^1C_4^2 2^2+C_5^2$,所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2 2^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{130}{210}=\frac{13}{21}.$$

方法 2 $\overline{A}$ 表示"4 只中没有 2 只可配成一双".对 $\overline{A}$ 有利的基本事件数目为 $2^4C_5^4$,故

$$P(\overline{A})=\frac{2^4C_5^4}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},\quad P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{13}{21}.$$

例 3(分房问题(球在盒中的分配问题)) 将 n 个球随机放入 n 个盒子中去,试求:

(1) 每个盒子都有一个球的概率;

(2) 至少有一个盒子空着的概率.

分析 试验是将 n 个球随机放入 n 个盒子中,每个球放入哪一个盒子都是等可能的,所以,每个球均有 n 种不同的放入法.设一个基本事件对应于一个排列方式$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$,其中 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$为第 k 个球放入的盒子编号,且 $i_k(k=1,2,\cdots,n)$可取 $1,2,\cdots,n$ 中任一个数,故 n 个球共有 n^n 种不同的分配法,即试验相应样本空间的基本事件总数为 n^n.

解 设一个基本事件对应于一个排列方式$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$,$i_k(k=1,2,\cdots,n)$可取 $1,2,\cdots,n$ 中任一个数,故基本事件的总数为 n^n.

(1) 设 A 表示"每个盒子中都有一个球".对 A 有利的基本事件是 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 全不相同的排列方式$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$,即 n 个编号的一个全排列,所以对 A 有利事件的数目为 $A_n^n=n!$.故

$$P(A)=\frac{A_n^n}{n^n}=\frac{n!}{n^n}.$$