普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学全程解决方案系列

微积分

（经管类）

隋如彬 主 编
吴 刚 杨兴云 副主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
大学数学全程解决方案系列

微　积　分

（经管类）

隋如彬　主编
吴　刚　杨兴云　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求",并结合作者长期在教学第一线积累的丰富教学经验编写而成. 全书共 11 章,内容包括:函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程、差分方程. 本书按节配置适量习题,每章配有总习题,书末附有习题参考答案及提示,便于读者参考. 全书以经济类、管理类学生易于接受的方式科学、系统地介绍了微分与积分的基本内容,重点介绍了微积分的方法及其在经济、管理中的应用.

本书可作为高等院校经济类、管理类及文史类各专业本科生的微积分课程教材,也可作为硕士研究生考前学习用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分:经管类/隋如彬主编. —北京:科学出版社,2007
(普通高等教育"十一五"规划教材. 大学数学全程解决方案系列)
ISBN 978-7-03-019192-2

Ⅰ.微… Ⅱ.隋… Ⅲ.微积分-高等学校-教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 114891 号

责任编辑:李鹏奇 王 静 于宏丽 / 责任校对:邹慧卿
责任印制:张克忠 / 封面设计:卢秋红

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 8 月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2007 年 8 月第一次印刷 印张:32 1/2
印数:1—5 000 字数:621 000

定价:39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

《大学数学全程解决方案系列》序

目前，高等数学、线性代数、概率论与数理统计等大学数学类公共课的教材版本比较多，其中不乏一些优秀教材，它们在教育部统一的教学规范、教学设计、教学安排等框架内，为全国高等院校师生的教学和学习提供了方方面面的服务. 但从另一方面来说，不同区域的高校在师资力量、教学习惯、教学环境、学生来源、学生层次、学生求学目的等方面都存在着不小的差异，由此造成对教材的需求也存在着一些差异. 在遵照执行教育部对大学数学类公共课教学的统一要求的前提下，我想，这些差异主要来自于对这些统一要求的具体实施和尝试.

为了更好地提高教学效果，充分挖掘区域内的教学资源，增加区域内教师的交流与互动，优化创新和谐的教研氛围，培育更加适应本地区高校的优秀教材，科学出版社在广泛调研的基础上，组织了黑龙江地区高校最优秀、最有经验的教师，拟编写一套集主教材、教辅、课件为一体的立体化教材，并努力争取进入国家级优秀教材的行列. 为此科学出版社、哈尔滨工业大学数学系联合于 2006 年 5 月 27 日在哈尔滨工业大学召开了《大学数学全程解决方案系列》规划教材会议. 在这次会议上，大家推荐我作为这套丛书的编委会主任，盛情难却，我想，若能和大家共同努力，团结协作，认真领会教育部的有关精神，凭借科学出版社的优秀品牌，做出一套大学数学类的优秀教材，也的确是一件有意义的事情.

为此，我们编委会成员就这套教材作了几次讨论和交流，希望在以下方面有所突破：

在教学内容上，有较大创新，紧跟时代步伐，从知识点讲述，到例题、习题，都要体现时代的特色.

在教学方法上，充分体现各学校的优秀教学成果，集中黑龙江地区优秀的教学资源，力求代表最好的教学水平.

在教学手段上，充分发挥先进的教学理念，运用先进的教学工具，开发立体化的教学产品.

在教材设计上，节约课时，事半功倍(比如在教材上给学生预留较大的自主空间，让有进一步学习愿望的学生能够自主学习；开发的课件让老师节约课时，精心设计的练习册，让老师节约更多的检查作业的时间).

在教学效果上，满足对高等数学有不同要求的教师、学生，让教师好用，让学生适用.

如今，这套丛书终于要面世了，今年秋季有《微积分(经管类)》、《线性代数(经

管类)》、《线性代数(理工类多学时)》、《线性代数(理工类少学时)》、《概率论与数理统计》、《数学建模》等教材陆续出版.但我想,尽管我们的初衷是美好的,教材中必定还会存在这样那样的问题,敬请各位读者、专家批评指正.

感谢哈尔滨工程大学、哈尔滨理工大学、黑龙江大学、哈尔滨师范大学、哈尔滨商业大学、黑龙江工程学院、黑龙江科技学院、哈尔滨医科大学、齐齐哈尔大学、佳木斯大学、绥化学院、黑龙江农垦职业学院、黑龙江建筑职业技术学院、黑龙江农业工程职业学院等兄弟院校领导的支持,科学出版社高等教育出版中心,哈尔滨工业大学理学院、数学系的领导与老师为这套丛书的出版也付出了努力,在此一并致谢.

王　勇

2007 年 7 月于哈尔滨工业大学

前　言

我国的高等教育从规模到层次都发生着巨大而深刻的变化.为培养更多具有创新能力的高素质人才,相应的教育理念、教学模式、教学内容也必须进行调整和优化.本书就是在这样的背景下孕育而生的.

作为黑龙江省级精品课程(经济数学)建设的重要组成部分,本书在编写时,参照教育部"经济类与管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的精神,遵循教育部"经济管理类本科数学基础课程教学基本要求",在深入研究近年"全国硕士研究生入学统一考试大纲(数学三、四)"中有关微积分部分规定的基础上,进行精心设计与策划,充分体现了经济类、管理类各专业本科数学基础课程的改革趋势.本书的特点体现在以下几个方面:

1. 从几何直观、科学技术及经济管理的实例出发,引入微积分学的基本概念、理论和方法,然后再以模型方法与实际相结合.

2. 将经典数学的系统性、严谨性、逻辑性与本教材所适用的学科、专业特点相结合,把握合理的"度",叙述深入浅出,启迪思维,便于学生理解,培养数学素质,并适度渗透数学发展历程中的人文精神.在讲解过程中对分层教学进行了合理的规划,带有"*"部分的内容,适用于多学时,且对数学要求较高的各专业.

3. 在继承和保持经典微积分教材优点的同时,又进行了大胆的创新和突破.

4. 强调基础训练和思维能力的培养,在正文中给出了各类例题的同时,对综合程度高的例题进行详细的剖析,按节配备适量的习题,每章又配备了总习题,书末附有习题参考答案及提示,便于自学.

5. 教学内容的讲解注重学以致用,努力培养学生应用数学知识分析、研究和解决实际问题,特别是经济、管理领域中问题的能力,同时与考研大纲接轨,为有志于深造的同学提供一本理想的基础教材.

本书的编写是集体智慧的结晶,也是多年教学与考研辅导丰富经验的累积.本书由隋如彬教授担任主编,吴刚、杨兴云担任副主编,参加编写工作的还有:高春涛、王树忠、周玉英、肖成河.

本教材在编写过程中得到哈尔滨工业大学理学院王勇教授的指导和帮助,在

此表示衷心的感谢. 同时还要感谢哈尔滨商业大学教务处和基础科学学院领导对本书的支持和鼓励.

本书在编写过程中参考了许多国内外教材,在此一并致谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,期盼读者批评指正,使之能在教学实践中渐趋完善.

编　者

2007 年 5 月

目　　录

第1章　函　　数

初等数学基本上属于常量数学，而高等数学是关于变量的数学.客观世界中的变量都不是孤立存在的，它们相互依存、相互作用、相互联系，研究变量之间这些关系的工具之一就是函数，引进了函数这一工具，我们就可以借此研究事物和经济运动规律及运动过程.正像恩格斯所言："由于有了变量，才在数学中引进了运动与辩证法."本章中，我们将介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念，这都是我们进一步学习的基础知识.

1.1　集　　合

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的概念之一.通常将具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**，组成这个集合的每一个事物称为该集合的**元素**.

习惯上常用大写拉丁字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示集合中的元素.对于给定的集合 A 和元素 a，二者的关系是确定的，要么 a 在集合 A 中，记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；要么 a 不在集合 A 中，记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A，二者必居其一.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无穷多个元素的集合称为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，用 $\varnothing$ 表示.

表示集合的方法主要有两种：一是列举法，二是描述法.列举法，就是把集合中的所有元素一一列举出来.如集合 A 由 $a_1,\cdots,a_n$ 所组成，则可以将其表示为 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$；而描述法，则是强调指出具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，通常表示成

$$A=\{x\,|\,x\text{ 具有性质 }P\},$$

例如，集合 A 是方程 $x^2-3x+2=0$ 的解集，就可表示成 $A=\{x\,|\,x^2-3x+2=0\}$，再如，集合 B 是不等式 $0<3x-2\leqslant 1$ 的解集，则可表示成 $B=\{x\,|\,0<3x-2\leqslant 1\}$.

2. 集合与集合间的关系

设 A、B 是两个集合，若对任意 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$

(读作 A 含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A);若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$. 规定 $\varnothing\subset A$,其中 A 为任何集合.

如果集合的元素都是数,则称其为**数集**. 常用的数集有

(1) 自然数集(或非负整数集)记作 $\mathbf{N}$,即

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

(2) 正整数集记作 $\mathbf{N}^+$,即

$$\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\};$$

(3) 整数集记作 $\mathbf{Z}$,即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

(4) 有理数集记作 $\mathbf{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+\text{ 且 }p,q\text{ 互质}\right\}$;

(5) 实数集记作 $\mathbf{R}$;正实数集记作 $\mathbf{R}^+$.

1.1.2 集合的运算

1. 集合的运算

集合间的基本运算有三种:并、交、差.

设有集合 A、B,它们的**并集**记作 $A\cup B$,

$$A\cup B\triangleq\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

集合 A 与 B 的**交集**记作 $A\cap B$(或 AB),

$$A\cap B\triangleq\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

集合 A、B 的**差集**记作 $A\backslash B$,

$$A\backslash B\triangleq\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

由上述定义可知,$A\cup B$ 是由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合;而 $A\cap B$ 是由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合;差集 $A\backslash B$ 是由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合.

通常我们将所研究的某一问题纳入到某个大集合 Ω 中进行,所研究的其他集合都是 Ω 的子集,此时我们称 Ω 为**全集**. 而将 $\Omega\backslash A$ 称为 A 的**补集**或**余集**,用 A^c 表示,即记 $A^c=\Omega\backslash A$. 如 $\Omega=\mathbf{R}$ 时,集合 $A=\{x\mid -1<x\leqslant 1\}$,则 $A^c=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x>1\}$.

2. 集合的运算规律

集合的运算满足如下运算规律:

设 A、B、C 及 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$ 为 Ω 中的集合,则

(1) $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

(4) $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$；

(5) $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i^c$，$\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^c$.

以上运算规律均可依据集合相等的定义加以证明，留给读者一试.

1.1.3 区间与邻域

区间是常用的一类数集，大体可以分为有限区间和无限区间.

1. 有限区间

设 a,b 为实数，且 $a<b$，通常有如下定义与记法：

(1) 闭区间　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$；

(2) 开区间　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$；

(3) 半开区间　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$，

$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

以上区间称为有限区间，a、b 称为区间端点，a 为左端点，b 为右端点，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从几何上看，这些区间是数轴上长度有限的线段，可以用图 1-1(a)、(b)、(c)和(d)在数轴上表示出来.

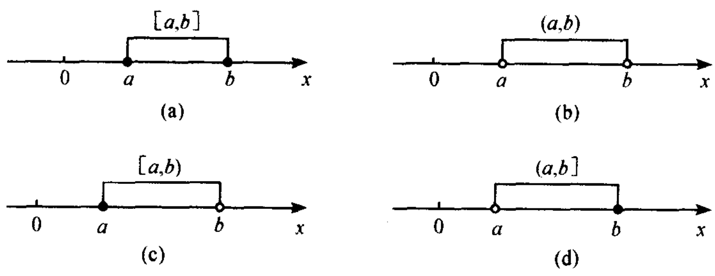

图 1-1

2. 无限区间

引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可类似地给出无限区间的定义和记法.

(1) $[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$；

(2) $(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$；

(3) $(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}$；

(4) $(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}$；

(5) $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$.

前四个无限区间同样可以在数轴上分别用图 1-2(a)、(b)、(c)和(d)表示，而$(-\infty,+\infty)$就是整个实数轴.

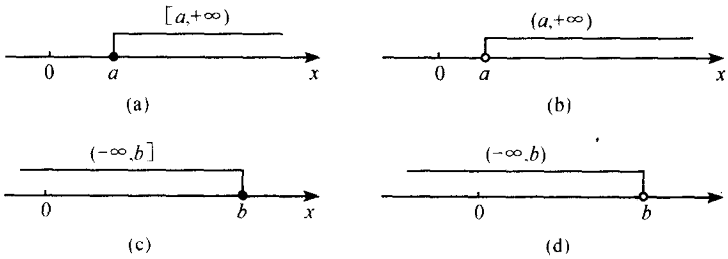

图 1-2

以后在不需要特别强调区间是开还是闭，以及是有限还是无限的情形下，我们就简单地称之为**区间**，通常用字母 I 表示.

3. 邻域及去心邻域

邻域也是我们经常用到的概念. 设 $a,\delta\in\mathbf{R}$，其中 $\delta>0$，称开区间$(a-\delta,a+\delta)$为点 a 的δ **邻域**，记为$U(a,\delta)$，即

$$\begin{aligned}U(a,\delta)&=(a-\delta,a+\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}\\&=\{x\mid |x-a|<\delta\}.\end{aligned}$$

点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径. $U(a,\delta)$可以在数轴上表示为图 1-3.

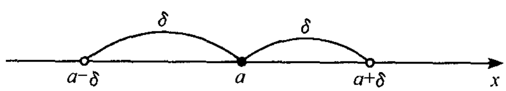

图 1-3

有时用到的数集需要把邻域的中心去掉，邻域$U(a,\delta)$去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作$\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

是两个开区间的并集，见图 1-4.

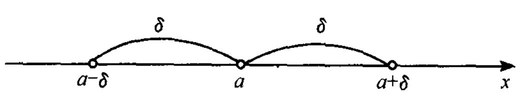

图 1-4

为表达方便，有时把开区间$(a-\delta,a)$称为 a 的**左 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**，把开区间$(a,a+\delta)$称为 a 的**右 $\boldsymbol{\delta}$ 邻域**.

有时在研究某一变化过程中，无需指明 a 的某邻域（或去心邻域）的半径，此时就简单地记为 $U(a)$（或 $\mathring{U}(a)$），读作 a 的某邻域（或 a 的某去心邻域）.

习　题　1.1

1. 如果 $A=\{x|5<x<7\}$，$B=\{x|x>6\}$. 求：

(1) $A\cup B$；　(2) $A\cap B$；　(3) $A\setminus B$.

2. 已知集合 $A=\{a,2,4,5\}$，$B=\{1,3,4,b\}$. 若 $A\cap B=\{1,4,5\}$，求 a 和 b.

3. 解下列不等式：

(1) $x^2>16$；　(2) $0<|x-4|\leqslant 2$；

(3) $|x+1|>2$；　(4) $|x+1|<|x|$.

4. 用区间表示下列不等式的解：

(1) $|x|\geqslant 5$；　(2) $|3x-2|<1$；

(3) $|x-a|<\varepsilon$　(a 为常数，$\varepsilon>0$)；

(4) $|2x+1|>|x-1|$.

1.2　函　数

1.2.1　函数的概念

在研究自然现象、客观规律和经济现象、经济规律过程中，往往会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中始终不变，保持一定的数值，这种量叫做**常量**；还有一些量在过程中是变化着的，可以取不同的数值，这种量叫做**变量**. 通常用字母 a,b,c 等表示常量，用字母 x,y,z 等表示变量. 但变量没有孤立存在的，变量和变量之间往往都相互作用、相互依赖和相互影响，而函数是描述变量之间相互依存关系的重要工具之一. 函数是微积分学中的基本概念，研究函数的局部性质、整体性质、函数的分解与合成以及函数的变化规律构成了微积分的基本内容. 下面我们给出函数的定义.

定义 1-1　设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 x 在一个给定的数域 D 中取值，如果对于 D 中每个确定的变量 x 的取值，变量 y 按照一定的法则总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数定义中，对每个取定的 $x_0\in D$，按照对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**，记作

$$f(x_0)\quad 或\quad y|_{x=x_0}=f(x_0).$$

当 x 取遍 D 的各个数值时，对应的函数值全体组成的数域称为函数的**值域**，记作 R_f，即

$$R_f=\{y \mid y=f(x), x\in D\}.$$

表示函数的记号除了常用 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”、“φ”、“F”、“G”、“Φ”等. 相应地函数可以记作 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=F(x)$等. 有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 但在研究同一问题时，与该问题相关的几个不同函数，要用不同的记号加以区别.

由函数的定义可知，构成函数的基本要素有两个：一是对应法则，二是定义域. 而值域是由以上二者派生出来的，若两个函数的对应法则和定义域都相同，则我们认为这两个函数相同，而不在意它们的自变量和因变量采用何字母表示. 如 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$和 $s=t\sin\dfrac{1}{t}$，$t\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，这两个函数是相同的.

函数定义域的确定，取决于两种不同的研究背景：一是有实际应用背景的函数；二是抽象地用算式表达的函数. 前者定义域的确定取决于变量的实际意义；而后者定义域的确定是使得算式有意义的一切实数组成的集合，这种定义域称为函数的**自然定义域**. 例如，函数 $y=\pi x^2$，若 x 表示圆的半径，y 表示圆的面积，则定义域的确定属于前者，此时 $D_f=[0,+\infty)$；若不考虑 x 的实际意义，则其自然定义域为 $D_f=(-\infty,+\infty)$.

在函数的定义中，我们用“唯一确定”来表明所讨论的函数都是**单值函数**. 当 D 中的某些 x 值有多于一个 y 值与之对应时，我们称之为**多值函数**. 例如，变量 x 和 y 之间的对应法则由方程$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所给出. 显然，对任意 $x\in(-a,a)$，对应着 y 有两个值. 所以方程确定了一个多值函数，我们往往根据问题的性质或研究的需要，取其**单值分支** $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$或 $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$进行分析和讨论. 本书只讨论单值函数.

函数的表示方法主要有三种：表格法、图形法、解析法(公式法). 将解析法和图形法相结合来研究函数，可以将抽象问题直观化，借助于几何方法研究函数的有关特性. 相反，一些几何问题也可借助函数来做理论研究. 所谓函数 $y=f(x)$的图形，指的是坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}.$$

一个函数的图形通常是平面内的一条曲线(图 1-5). 图中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$的值域.

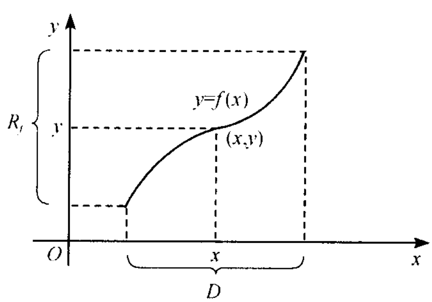

图 1-5

例 1-1　求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+$

$\ln\sin x$ 的定义域.

解 函数的定义域就是使表达式有意义的全体 x. 即

$$D_f=\left\{x\left|\begin{array}{l}16-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{array}\right.\right\}=\left\{x\left|\begin{array}{l}-4\leqslant x\leqslant 4\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\end{array}\right.\right\}$$
$$=[-4,-\pi)\cup(0,\pi).$$

例 1-2 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0,\\ 2^x, & x>0\end{cases}$ 求:

(1) 函数的定义域;

(2) $f(0),f(-1),f(3),f(a),f[f(-1)]$;

(3) 画出函数的图形.

解 (1) 函数的定义域应是

$$D_f=(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$$
$$=(-\infty,+\infty).$$

(2) 因 $0\in(-\infty,0]$, $-1\in(-\infty,0]$此时 $f(x)=2+x$, 得 $f(0)=2+0=2$, $f(-1)=2+(-1)=1$.

因 $3\in(0,+\infty)$, 此时 $f(x)=2^x$, 得 $f(3)=2^3=8$.

当 $a\leqslant 0$ 时, $f(a)=2+a$; 当 $a>0$ 时, $f(a)=2^a$.

因 $f(-1)=1$, 所以 $f[f(-1)]=f(1)=2^1=2$.

(3) 函数 $f(x)$的图形如图 1-6 所示.

下面给出几个以后常用的函数.

例 1-3 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$, 值域 $R_f=[0,+\infty)$, 它的图形如图 1-7 所示.

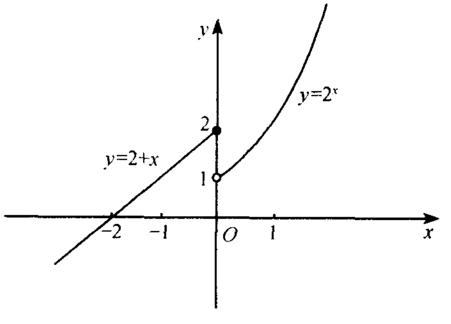

图 1-6

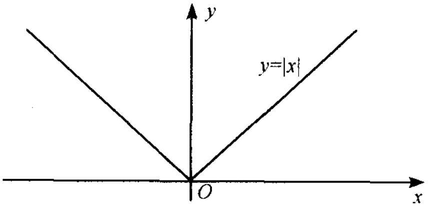

图 1-7