普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修 ①

GAOZHONG SHUXUE

新课标新精编

XINKEBIAO
XINJINGBIAN

主编 胡[illegible]平

配人教A版

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

普通高中课程标准实验教材

高中数学

必修①

新课标 新精编

XINKEBIAO XINJINGBIAN

顾　　问　岑　申　王而冶　金才华　许芬英
主　　编　胡建军
本册主编　胡建军　李超儿　杨一丽
编　　者　杨期南　杨一丽　王连坝　李超儿
黄琪锋

浙江教育出版社
ZHEJIANG JIAOYU CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

新课标　新精编. 高中数学. 1：必修：人教 A 版 / 胡建军主编. —杭州：浙江教育出版社，2006.8(2007.8 重印)

ISBN 978-7-5338-6520-7

Ⅰ.新…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.数学课 - 高中 - 习题　Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 079866 号

责任编辑　金馥菊　　责任校对　郑德文
封面设计　韩　波　　责任印务　温劲风

普通高中课程标准实验教材

新课标　新新课　高中数学　必修 1

● 主　　编　胡建军

● 出版发行　浙江教育出版社
(杭州市天目山路 40 号　邮编:310013)
● 图文制作　杭州富春电子印务有限公司
● 印　　刷　杭州钱江彩色印务有限公司
● 开　　本　880×1230　1/16
● 印　　张　6.75
● 字　　数　150 000
● 印　　数　20 001—32 000
● 版　　次　2006 年 8 月第 1 版
● 印　　次　2007 年 8 月第 2 次
● 标准书号　ISBN 978-7-5338-6520-7
● 定　　价　9.00 元

联系电话:0571-85170300-80928
e-mail:zjjy@zjcb.com　　网址:www.zjeph.com

前　言

高中课程改革正在全国各地逐步展开。其中，高中数学新课程旨在提高学生的科学素养，改变学生的学习方式，从知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三个方面培养学生。为了深入贯彻新课程标准的精神，配合《普通高中课程标准实验教科书·数学》的顺利使用，帮助学生实现高中数学课程的教育目标，我们组织了教学第一线的数学特级教师和优秀中青年教师，在深入研究了《高中数学课程标准》及其各种版本实验教科书的基础上，编写了这套《新课标新精编高中数学》丛书。

本丛书的编写以"讲求循序渐进，重现科学思想与科学方法，强调实践意识与探究精神，渗透情感态度价值观的教育"为原则，与人民教育出版社《普透高中课程标准实验教科书·数学》配套。它具有以下几个鲜明的特点：

1. 同步性。本丛书的例题和练习均按课时为基本单位，根据新课标教学的要求和学生学习的特点进行编写，与高中数学教学同步，便于教师的教学和学生的使用。

2. 科学性。本丛书根据新课标学习的需要，设置了"学法指导"、"基础例说·基础训练"、"应用·拓展·综合训练"、"自我评估"、"高考链接"五个栏目。"学法指导"帮助学生深刻理解教材的重点、难点和目标要求；"基础例说·基本训练"分例说和训练两部分，"例说"以典型例题为载体，教给学生思考问题、分析问题和解决问题的策略和方法；"训练"目的在于让学生通过训练巩固所学知识，发展思维能力。"应用·拓展·综合训练"纵揽全章，起到复习、巩固、拓展、加强应用和综合训练的作用；"自我评估"为全章知识的综合评估，分 A，B 两份试卷，其中 A 卷为基本要求，B 卷为较高要求；"高考链接"选取近三年有代表性的高考真题，让学生试做，以同步了解高考命题的基本特点。

3. 层次性。为了适应不同学习水平的学生的不同要求，以及学生在不同学习阶段的不同要求，本丛书选编的训练题都分为"A 组"和"B 组"两组，分别反映了课程的基础性目标和发展性目标。这种具有较大选择性的训练既使不同层次的学生都能够充分获益，也符合循序渐进的学习原则。

4. 新颖性。本丛书力求体现新课程的理念，突出科学探究、联系实际，注重激发学生学习的兴趣，力求反映近年来高中数学习题教学和命题研究的最新成果，所选习题无论是在内容上，还是在形式上，都具有一定的新颖性。

由于时间匆促，加上作者对新课程的认识有待进一步提高，本丛书在编写时难免出现一些不足之处，敬请广大师生指正。

本次印刷时，对个别题目作了调整。

浙江教育出版社

2007 年 6 月

目 录

第一章　集合与函数概念

学法指导

本章主要内容有：集合、函数及其表示、函数的基本性质.

学习目标

1. 了解集合的含义，能选择合理的集合语言描述不同的具体问题；理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集；了解全集与空集的含义；理解并集、交集与补集的概念，会求两个简单集合的并集与交集、给定集合的补集.

2. 体会函数是描述变量之间依赖关系的重要数学模型；了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；能根据不同的需要选择恰当的方法表示函数；了解映射的概念；了解简单的分段函数，并能简单应用.

3. 理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义；了解奇偶性的含义；能运用函数图象理解和研究函数的性质.

重点难点

重点是集合的含义，用集合与对应的语言刻画函数的概念，函数的单调性、奇偶性、最值.

难点是区别集合中有关的概念及相应的符号，函数概念以及函数符号 $f(x)$ 的理解，判断和证明函数的单调性、奇偶性，求一些简单函数的最值.

主要概念、定理、公式及规律

1. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性，集合的表示方法有语言表示法、列举法、描述法、图示法.

2. 集合与集合的关系有子集、真子集、相等. 需要注意符号“$\in$”和“$\subseteq$”的区别.

3. 集合的基本运算有并集、交集、补集.

4. 函数的概念：设 A，B 是两个非空数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任何一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，则称 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$，$x\in A$. 函数的定义域、值域和对应关系是函数的三要素.

5. 函数的表示法有解析法、列表法和图象法，其中解析法和图象法是常用的两种基本方法.

6. 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数；如果对于定义域 I 内某个区间 D 上任意两个自变量 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数. 如果函数 $f(x)$ 在这个区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性，区间 D 叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

7. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 同时满足：(1)对于任意 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$；(2)存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$. 则称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值. 类似的，可以定义函数的最小值. 运用函数的图象以及函数的单调性，是求函数最大(小)值的常用方法.

8. 如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意的一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于函数 $f(x)$ 定义域内任意的一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数. 函数的定义域关于原点对称是这个函数为偶函数(或奇函数)的前提条件. 如果一个函数是偶函数，那么它的图象关于 y 轴对称，反之也成立；如果一个函数是奇函数，那么它的图象关于原点对称，反之也成立.

基础例说·基本训练

1.1　集　合

1.1.1　集合的含义与表示

例说

例 1　指出下列哪些对象的全体可以构成集合：

(1) 某班所有身高超过 1.60 m 的女生；

(2) 某校所有身材比较高的男生；

(3) 数轴上非常靠近原点的点；

(4) 本书中的难题；

(5) 使 x^2+1 很小的 x 的值；

(6) 使 $|x^2-x+6|$ 最小的 x 的值；

(7) 平面直角坐标系中第三象限的点；

(8) 使二次函数 $y=x^2+2x-8$ 的函数值大于 0 的 x 的值.

解　能构成集合的是(1)、(6)、(7)、(8).

注意　判断一组对象的全体能否构成集合，就是判断其是否具有确定性. 本题中(2)、(3)、(4)、(5)中的元素都不具有确定性，因此，它们不能构成集合. 而(1)、(6)、(7)、(8)中的元素都具有确定性. 另外，(6)、(8)中的元素是数，通常称这样的集合为数集；(7)中的元素是点，通常称这样的集合为点集.

例 2　(1) 用列举法表示下列集合：

① 15 的所有正约数的集合；

② 不大于10的非负偶数集.

(2) 用描述法表示下列集合:

① 正偶数集;

② 由数字 $1,-3,5,-7,\cdots,-39,41$ 构成的集合.

解 (1) ① $\{1,3,5,15\}$.

② $\{0,2,4,6,8,10\}$.

(2) ① $\{x|x=2k,k\in\mathbf{N}^*\}$.

② $\{x|x=(-1)^{n-1}(2n-1),n\in\mathbf{N}^*$,且 $n\leqslant21\}$.

例3 用另一种方法表示下列集合:

(1) $\{x|x^2-x-6=0\}$;

(2) $\{y|y=x^2-x-6,x\in\mathbf{R}\}$;

(3) $\{(x,y)|y=x^2-x-6,x\in\mathbf{R}\}$;

(4) $\{(x,y)|x+y=5,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

解 (1) 代表元素为 x,x 满足的条件是 $x^2-x-6=0$,因此,这个集合是方程 $x^2-x-6=0$ 的解集,所以用列举法表示为 $\{-2,3\}$.

(2) 代表元素是 y,这个集合是当 x 取任何实数时,二次函数 $y=x^2-x-6$ 的所有函数值的集合.

而 $y=x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$,

所以函数 $y=x^2-x-6$ 有最小值 $-\frac{25}{4}$,无最大值.

所以这个集合还可以表示为 $\left\{y|y\geqslant-\frac{25}{4}\right\}$.

(3) 代表元素是 (x,y),是平面直角坐标系中点的坐标形式,并且满足 $y=x^2-x-6$,因此,这个集合是由抛物线 $y=x^2-x-6$ 上所有点构成的集合(点集).所以这个集合还可以表示为{抛物线 $y=x^2-x-6$ 上的点}.

(4) 代表元素是 (x,y),并且满足 $x+y=5$,$x\in\mathbf{N}^*$,$y\in\mathbf{N}^*$,所以用列举法表示为

$\{(0,5),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)\}$.

注意 (1) 表示集合时,关键是代表元素的形式.第(1)、(2)、(3)题中,虽然元素所满足的条件关系式相同或相似,但由于代表元素的形式不同,所以含义也不同.第(1)、(2)题的集合是数集,而第(3)、(4)题的集合是点集.

(2) 代表元素只代表了一个集合中元素的形式,表示变量的字母的取值则是由后面的条件关系式决定.所以代表元素中表示变量的字母并不是固定不变的,如集合 $\{x|x^2-x-6=0\}$ 也可表示为 $\{a|a^2-a-6=0\}$,集合 $\{y|y=x^2-x-6,x\in\mathbf{R}\}$ 也可以表示为 $\{t|t=m^2-m-6,m\in\mathbf{R}\}$ 等.

训练

A 组

1. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空:

(1) 3.14 ______ $\mathbf{Q}$;

(2) 0 ______ $\{0\}$;

(3) 1 ______ {质数};

(4) 161 ______ {合数};

(5) $\sqrt{1\frac{32}{49}}$ ______ $\{1,-\frac{9}{7},\frac{11}{7}\}$;

(6) $2\,007$ ______ $\{x\in\mathbf{R}|x^2-2\,006x-2\,007=0\}$.

2. 由 $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}+\frac{|abc|}{abc}$ $(abc\neq0)$ 的值组成的集合为(　　).

(A) $\{4,-4\}$　(B) $\{0,4\}$

(C) $\{-4,0\}$　(D) $\{-4,0,4\}$

3. 集合 $M=\{(x,y)|xy\geqslant0\}$ 是指(　　).

(A) 第一象限点集

(B) 第三象限点集

(C) 第一、第三象限点集

(D) 不在第二、第四象限的点集

4. 由方程组 $\begin{cases}x+y=1,\\x^2-y^2=9\end{cases}$ 的解 (x,y) 组成的集合是(　　).

(A) $(5,-4)$　(B) $\{5,-4\}$

(C) $\{(-5,4)\}$　(D) $\{(5,-4)\}$

5. 写出下列集合中的所有元素:

(1) $\{x|x$ 是大于 -5 且小于 10 的偶数$\}$;

(2) $\{x|x$ 是方程 $x^2(x-1)^2=0$ 的解$\}$;

(3) $\{a\in\mathbf{Z}||a|<4\}$;

(4) $\{x|x=3n+1,n\in\mathbf{N}$,且 $x<20\}$.

6. 用列举法表示下列集合:

(1) 太阳系内的八大行星;

(2) 36 的正约数;

(3) 不大于 8 的非负整数;

(4) 不等式 $3x-20<0$ 的正整数解.

7. 用描述法表示下列集合:

(1) 比 -2 大,且比 1 小的所有实数;

(2) $1,3,5,7,9,11$;

(3) 抛物线 $y=x^2-2x+1$ 上所有点的坐标组成的集合;

(4) 方程 $x^2-2x-8=0$ 的解集.

8. 用另一种方法表示下列集合：
(1) $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-5x-14=0\}$；
(2) $\{x\in\mathbf{R}\mid x=n^2,n\in\mathbf{N},x<20\}$；
(3) $\{(x,y)\mid x\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant x<4,y-2x=10\}$；
(4) $\left\{\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\frac{9}{10},\cdots\right\}$.

9. 用列举法表示集合 $\{(x,y)\mid x+y=6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$.

10. 已知集合 $M=\{0,2,3,7\}$，$P=\{x\mid x=ab,a\in M,b\in M,a\neq b\}$，用列举法表示集合 P.

11. 用列举法表示集合 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{12}{5-x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Z}\right\}$.

B　组

12. 下列各题中，集合 M 与集合 P 表示同一集合的是(　　).
(A) $M=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-0.01=0\}$，
$P=\{x\mid x^2=0\}$
(B) $M=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，
$P=\{(x,y)\mid x=y^2+1,y\in\mathbf{R}\}$
(C) $M=\{y\mid y=t^2+1,t\in\mathbf{R}\}$，
$P=\{t\mid t=(y-1)^2+1,y\in\mathbf{R}\}$
(D) $M=\{x\mid x=2k,k\in\mathbf{N}\}$，
$P=\{x\mid x=4k+2,k\in\mathbf{N}\}$

13. 下列各题的集合 A 与集合 B，哪些表示同一集合，哪些表示不同集合：
(1) $A=\{1,2,3,\cdots,n-1,n\}$，$B=\{n,n-1,\cdots,2,1\}$，$n\in\mathbf{N}$；
(2) $A=\{(3,-5)\}$，$B=\{(-5,3)\}$；
(3) $A=\{n\mid n=2k-1,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$；
(4) $A=\{\sqrt{2},\pi\}$，$B=\{1.414,3.1416\}$.

14. 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\frac{4}{x}\in\mathbf{Z},x\in\mathbf{Z},x\neq0\right\}$，$B=\left\{y\,\middle|\,\frac{1}{y}\in\mathbf{Q},y\in\mathbf{Z},y\neq0\right\}$，试判断 $-2,\frac{1}{2},3$ 是否为这两个集合的公共元素.

15. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-2x+1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$ 只有一个元素，求实数 a 的值.

16. 已知集合 $A=\{x\mid x$ 是小于 6 的自然数$\}$，$B=\{x\mid x$ 是小于 10 的质数$\}$，$C=\{x\mid x$ 是 24 和 36 的正公因数$\}$. 设集合 A,B,C 的元素个数分别为 a,b,c，求 $a+b+c$ 的值.

17. 已知 $A=\{x,xy,xy-1\}$，其中 $x\in\mathbf{Z},y\in\mathbf{Z}$，且 $y\neq0$. 若 $0\in A$，求集合 A 及 A 中各个元素之和.

18. 已知集合 $\{(x,y)\mid y=ax^2+2x+a\}$ 中所有点均在 x 轴上方，求实数 a 的取值范围.

1.1.2　集合间的基本关系

例说

例 1　已知集合 $S=\{x\mid x=2n+1,n\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{x\mid x=4k\pm1,k\in\mathbf{Z}\}$，试判断集合 S 与集合 T 之间的关系(包含或相等).

解法 1　∵　$S=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，
$T=\{\cdots,-5,-3,-1,1,3,5,\cdots\}$，　∴　$S=T$.

解法 2　由 $2n+1=\begin{cases}4k+1, & n=2k,\\ 4k-1, & n=2k-1,\end{cases}$

可得 $S=T$.

解法 3　S 为奇数集合，而 T 中的元素均为奇数，故有 $T\subseteq S$.

任取 $x\in S$，则 $x=2n+1$.

当 n 为偶数 $2k$ 时，有 $x=4k+1\in T$；

当 n 为奇数 $2k-1$ 时，仍有 $x=4k-1\in T$.

因此，有 $S\subseteq T$.

由 $T\subseteq S$，且 $S\subseteq T$，可得 $S=T$.

注意 本例的三种解法是判别两个集合关系的常用方法．解法 1 通过列举，辨别两个集合所有元素的异同；解法 2 辨别两个集合元素的条件是否等价；解法 3 先确定包含关系，然后根据集合相等的定义，确定它们是否相等.

例 2 (1) 已知集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$S=\{x\mid ax+1=0\}$，且 $S\subseteq P$，求由实数 a 的所有可取值组成的集合；

(2) 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，且 $B\subseteq A$，求由实数 m 的所有可取值组成的集合.

解 (1) $P=\{-3,2\}$.

当 $a=0$ 时，$S=\varnothing$，满足 $S\subseteq P$；

当 $a\neq 0$ 时，方程 $ax+1=0$ 的解为 $x=-\dfrac{1}{a}$.

为满足 $S\subseteq P$，可使 $-\dfrac{1}{a}=-3$，或 $-\dfrac{1}{a}=2$，

即 $a=\dfrac{1}{3}$，或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

故所求的集合为 $\left\{0,\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2) 当 $m+1>2m-1$，即 $m<2$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；

若 $B\neq\varnothing$，且满足 $B\subseteq A$，有 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$

即 $\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m\geqslant -3,\\ m\leqslant 3.\end{cases}$ $\therefore\ 2\leqslant m\leqslant 3$.

所以 $m<2$，或 $2\leqslant m\leqslant 3$.

故所求的集合为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$.

注意 空集是特殊的集合，它是任何集合的子集，在解有关子集的问题时，需注意这一特殊性.

例 3 设集合 $M=\{a,a+d,a+2d\}$，$N=\{a,aq,aq^2\}$，且 $M=N$，求实数 q 的值.

分析 根据两集合相等的意义，两集合中的元素完全相同.

解 由集合元素互异性知，$a\neq 0$. 分两种情况讨论：

① $\begin{cases}a+d=aq,\\ a+2d=aq^2；\end{cases}$ ② $\begin{cases}a+d=aq^2,\\ a+2d=aq.\end{cases}$

由①，得 $q^2-2q+1=0$，解得 $q=1$.

代入集合 N，3 个元素相同，与集合元素互异矛盾，故 $q=1$ 舍去.

由②，得 $\begin{cases}a(q^2-1)=d,\\ a(q-1)=2d,\end{cases}$

解得 $q=-\dfrac{1}{2}$，从而 $a=-\dfrac{4}{3}d$.

代入集合 M,N 中检验，满足题设条件.

$\therefore\ q=-\dfrac{1}{2}$.

注意 解此类集合问题时，通常要检验两个方面：(1)是否满足集合元素的互异性；(2)是否满足已知条件.

训练

A 组

1. 给出下列关系：

① $0\notin\varnothing$；

② $\{\tan 30^\circ,\cos 30^\circ,\sin 30^\circ\}=\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$；

③ $\varnothing\subseteq\{0\}$；

④ $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}\subsetneqq\left\{x\,\middle|\, x\leqslant\dfrac{2}{3}\right\}$.

其中正确的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

2. 给出下列关系：

① $3\subsetneqq\{x\mid x\leqslant 10\}$；

② $\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$；

③ $\{(1,2)\}\in\{(x,y)\mid x+y=3\}$；

④ $\varnothing\subseteq\{x\mid x>\pi\}$.

其中成立的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

3. 下列命题正确的是(　　).

(A) $\{0\}$是空集

(B) $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{6}{x}\in\mathbf{N},x\in\mathbf{Q}\right\}$是有限集

(C) $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+x+2=0\}$是空集

(D) 集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数是 1

4. 如果集合 $A=\{x\mid x\leqslant 3\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{5}-2$，那么(　　).

(A) $a\notin A$　　(B) $a\subseteq A$

(C) $\{a\}\in A$　　(D) $\{a\}\subsetneqq A$

5. 如果集合 $A=\{(x,y)\mid x>0，且\ y>0\}$，$B=\{(x,y)\mid xy>0\}$，$C=\{(x,y)\mid x+y>0\}$，那么 A,B,C 之间的关系是(　　).

(A) $A\subsetneqq B\subsetneqq C$　　(B) $A\subsetneqq C\subsetneqq B$

(C) $A\subsetneqq B$　　(D) $A\subsetneqq B,A\subsetneqq C$

6. (1) 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，则集合 A 的子集个数为________；

(2) 已知集合 $B=\{0,3,5\}$，则集合 B 的所有非空真子集为______________.

7. 已知集合 $B=\{0,1,2,3,4\}$，$C=\{0,2,4,8\}$，若 $A\subseteq B$，且 $A\subseteq C$，则满足条件的集合 A 有________个.

8. (1) 已知集合 $A=\{x\mid x\leqslant -1,或\ x\geqslant 2\}$，$B=\{x\mid 4x+p>0\}$，且满足 $B\subsetneqq A$，则实数 p 的取值范围为________；

(2) 已知集合 $M=\{x\mid x^2-2x-3=0\}$，$P=\{x\mid ax-1=0\}$. 若 $P\subsetneqq M$，则实数 a 的所有可取值组成的集合为________.

9. (1) 已知集合 $A=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+2\}$，$B=\{x\mid 3<x<5\}$，求使 $A\supseteq B$ 成立的所有实数 a 组成的集合；

(2) 已知非空集合 $A=\{x\mid 2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\}$，$B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 22\}$，求使 $A\subseteq B$ 成立的所有实数 a 组成的集合.

10. 已知集合 $M\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，且当 $a\in M$ 时，有 $6-a\in M$，试求 M 所有可能的结果.

11. 已知 $M=\{2,a,b\}$，$N=\{2a,2,b^2\}$，且 $M=N$，求实数 a,b 的值.

12. 已知 $A=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in\mathbf{N}^*\}$，试判断集合 A 和 B 的关系.

B 组

13. 已知集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{x\mid x\in A\}$，则下列正确的是(　　).

(A) $A\in B$　　(B) $A=B$

(C) $A\subsetneqq B$　　(D) $A\notin B$

14. 下列等式不成立的是(　　).

(A) $\left\{n\pi+\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$

(B) $\left\{\dfrac{m}{2}\,\middle|\,m\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{\dfrac{n}{2}\,\middle|\,n\in\mathbf{Z}\right\}$

(C) $\{x\mid x=2k+1,k\in\mathbf{N}\}=\{x\mid x=2k-1,k\in\mathbf{N}\}$

(D) $\{x\mid x=3k,或\ x=3k-1,或\ x=3k-2,k\in\mathbf{N}^*\}=\mathbf{N}^*$

15. 已知集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{1}{6}+m,m\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\right\}$，$P=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{p}{2}+\dfrac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\right\}$，则 M，N，P 满足(　　).

(A) $M=N\subsetneqq P$　　(B) $M\subsetneqq N=P$

(C) $M\subsetneqq N\subsetneqq P$　　(D) $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

16. 已知集合 $M=\{y\mid y=x^2-2x-1,x\in\mathbf{R}\}$，$P=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 4\}$，则 M 与 P 满足(　　).

(A) $M=P$　　(B) $P\in M$

(C) $M\subsetneqq P$　　(D) $M\not\subseteq P$，且 $M\not\supseteq P$

17. 已知集合 $M=\{y\mid y=|x|,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{x\mid x=m^2,m\in\mathbf{R}\}$，则 M，N 的关系是________.

18. 满足 $\{a,b\}\subsetneqq A\subseteq\{a,b,c,d,e\}$ 的集合 A 共有________个.

19. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,a\in\mathbf{R},x\in\mathbf{R}\}$. 若 $B\subseteq A$，求 a 的取值范围.

1.1.3　集合的基本运算

第1课时　并集、交集

例说

例1　(1) 已知集合 $A=\{x\mid x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-2x-8=0\}$，求 $A\cap B$；

(2) 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x+2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x^2-2x-8,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$；

(3) 已知集合 $A=\{y\mid y=x+2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x^2-2x-8,x\in\mathbf{R}\}$，求 $A\cap B$.

解　(1) 集合 $A=\{-2\}$，$B=\{-2,4\}$.

则 $A\cap B=\{-2\}$.

(2) 集合 A 是直线 $y=x+2$ 上所有点的集合，集合 B 是抛物线 $y=x^2-2x-8$ 上所有点的集合，所以 $A\cap B$ 是直线 $y=x+2$ 和抛物线 $y=x^2-2x-8$ 的交点的集合.

由 $\begin{cases}y=x+2,\\ y=x^2-2x-8,\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\ y=7.\end{cases}$

$\therefore\ A\cap B=\{(-2,0),(5,7)\}$.

(3) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y=x+2$ 的值是任意实数，

$\therefore\ A=\mathbf{R}$.

而当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$y=x^2-2x-8=(x-1)^2-9\geqslant-9$，

$\therefore\ B=\{y|y\geqslant-9\}$. $\therefore\ A\cap B=\{y|y\geqslant-9\}$.

注意 解此类集合问题时，注意代表元素的形式，明确集合的含义. 另外，由于 $A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，所以当 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，$A\cap B$ 中元素应该与集合 A 和 B 中的元素具有相同的形式.

例 2 设关于 x 的方程 $x^2+px-12=0$，$x^2+qx+r=0$ 的解集分别为 A,B. 若 $A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，求实数 p,q,r 的值.

解 由 $A\cap B=\{-3\}$，可知 -3 是方程 $x^2+px-12=0$ 的根，故有 $(-3)^2-3p-12=0$，即 $3p=-3$，

$\therefore\ p=-1$.

此时，$A=\{x|x^2-x-12=0\}$，即 $A=\{-3,4\}$.

由 $A\cup B=\{-3,4\}$，$A\cap B=\{-3\}$，可知方程 $x^2+qx+r=0$ 有两个相等的实数根为 -3，即这个方程为 $(x+3)^2=0$，即 $x^2+6x+9=0$，故 $q=6$，$r=9$.

$\therefore\ p=-1,q=6,r=9$.

注意 解此题的关键是从已知条件 $A\cap B=\{-3\}$ 入手寻找突破口. 要注意检验计算结果是否符合已知条件以及是否满足集合元素的互异性.

例 3 设 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x|x^2-3x+a=0\}$. 若 $A\cup B=A$，求由实数 a 组成的集合.

解 由 $A\cup B=A$，可知 $B\subseteq A$.

而 $A=\{1,2\}$，故 B 可为 $\{1,2\}$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\varnothing$.

当 $B=\{1,2\}=A$ 时，显然有 $a=2$；

当 $B=\{1\}$，$\{2\}$，$\varnothing$ 时，方程 $x^2-3x+a=0$ 有两个相等的实数根或无实数根，故 $\Delta\leqslant0$，即 $9-4a\leqslant0$.

解得 $a\geqslant\frac{9}{4}$.

但当 $a=\frac{9}{4}$ 时，得 $B=\left\{\frac{3}{2}\right\}$，不能满足 $B\subseteq A$，舍去.

故所求的集合为 $\{2\}\cup\left\{a\middle|a>\frac{9}{4}\right\}$.

注意 (1) 解答本题的常见错误是：①未能通过检验舍去 $a=\frac{9}{4}$；②遗漏 $B=\varnothing$ 的情况.

(2) 以下结论有助于解决集合的有关问题：

$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$，$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

$\varnothing\cup A=A$，$\varnothing\cap A=\varnothing$，$\varnothing\subseteq A$ 等.

训练

A 组

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$，则满足 $A\cup B=A$ 的集合 B 的个数为( ).

(A) 8 (B) 7 (C) 4 (D) 3

2. 设集合 $M=\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}$，$N=\left\{x\middle|\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant1\right\}$. 如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 的"长度"，那么集合 $M\cap N$ 的"长度"是( ).

(A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{3}$

3. 设 M,N 是两个不相等的集合. 若 $Z=M\cap N$，则 $M\cup Z$ 等于( ).

(A) Z (B) N (C) $\varnothing$ (D) M

4. 已知 $A=\{x|x=2n,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=3n,n\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$________.

5. 已知集合 $A=\{x|-3<x<5\}$，$B=\{x|x<a\}$，且满足 $A\cap B=A$，则实数 a 的取值范围是________.

6. 已知 $a<0<b<|a|$，$A=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{x|-b\leqslant x\leqslant-a\}$，则 $A\cap B=$________，$A\cup B=$________.

7. 已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，集合 B 满足下列条件：$B\subsetneqq A$，$1\in A\cap B$，$4\notin A\cap B$. 写出 B 的所有可能情况.

8. (1) 已知 $M=\{x|x^2+3x=0\}$，$N=\{x|x^2+2x-3=0\}$，求 $M\cap N$；

(2) 已知 $M=\{y|y=x^2-4x+3,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y|y=-x^2+2x+8,x\in\mathbf{R}\}$，求 $M\cap N$；

(3) 已知 $M=\{(x,y)|y=x+1\}$，$N=\{(x,y)|y=x^2-x-2\}$，求 $M\cap N$.

9. 已知 $A=\{x|-2<x<-1$，或 $x>1\}$，$B=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$A\cup B=\{x|x>-2\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant3\}$，求实数 a,b 的值.

10. 已知两个不同集合 $A=\{1,3,a^2-a+3\}$，$B=\{1,5,a^3-a^2-4a+7\}$，且 $A\cap B=\{1,3\}$. 求：

(1) 实数 a 的值及集合 A 和 B；

(2) 满足 $A\cap B\subsetneqq M\subsetneqq A\cup B$ 的集合 M 的所有可能的子集的个数.

B 组

11. 设集合 $M=\{x \mid y^2=x+1\}$，$P=\{x \mid y^2=-2(x-3)\}$，则 $M\cap P=$(　　).

(A) $\left\{(x,y) \middle| x=\frac{5}{3}, y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$

(B) $\{x \mid -1<x<3\}$

(C) $\{x \mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$

(D) $\{x \mid x\leqslant 3\}$

12. 已知集合 $P=\{a^2, a+1, -3\}$，$Q=\{a-2, 2a+1, a^2+1\}$，且 $P\cap Q=\{-3\}$，则实数 a 所有可能取值组成的集合是(　　).

(A) $\{0,3\}$　　(B) $\{-2,1\}$

(C) $\{-1,2\}$　　(D) $\{-1,-2\}$

13. 已知 $M=\{x \mid x^2+px-3=0\}$，$N=\{x \mid x^3-qx^2+rx=0\}$，$S=\{p,q,r\}$，且 $M\cap N=\{-3\}$，$M\cup N=\{-3,-2,0,1\}$，则集合 S 等于(　　).

(A) $\{-6,-2,5\}$　　(B) $\{2,5,6\}$

(C) $\{-2,5,6\}$　　(D) $\{-5,2,6\}$

14. 已知集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{x^2,1\}$，且 $A\cup B=\{1,3,x\}$，则实数 x 的所有可能取值组成的集合是________.

15. 已知集合 $M=\{2,4,x^3-2x^2-x+7\}$，$N=\{-4, y+3, y^2-2y+2, y^3+3y+7\}$，且 $M\cap N=\{2,5\}$，则 $M\cup N=$________.

16. 已知 $A=\{x \mid 2x^2+px+q=0\}$，$B=\{x \mid 6x^2+(2-p)x+(5+q)=0\}$，且 $A\cap B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$，求 $A\cup B$.

17. 已知 $A=\{x \mid x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x \mid x^2+2x-8=0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，$A\cap C=\varnothing$，求实数 a 的值.

第 2 课时　补集

例说

例 4　设集合 A,B 都是全集 $U=\{1,2,3,4\}$ 的子集. 已知 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，$A\cap B=\{3\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$，求 $\complement_U(A\cup B)$.

分析　本题涉及集合 A,B 及其补集、交集和并集的运算，关系比较复杂，借助 Venn 图可以使复杂的集合关系变得直观和清楚.

解　如图 1-1，用方框表示全集 U，在方框内画出集合 A 与 B.

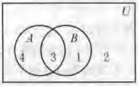


图 1-1

由 $(\complement_U A)\cap B=\{1\}$，在 A 之外 B 之内填上 1；

由 $A\cap B=\{3\}$，在 A,B 的公共部分填上 3；

又由 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2\}$，在 A 与 B 之外，方框之内填上 2.

已知全集 $U=\{1,2,3,4\}$，因此应在 A 之内 B 之外填上 4.

由图 1-1，可知 $A\cup B=\{1,3,4\}$，从而 $\complement_U(A\cup B)=\{2\}$.

例 5　设 $U=\left\{-\frac{1}{3}, 5, -3\right\}$，$-\frac{1}{3}$ 是 $A=\{x \mid 3x^2+px-5=0\}$ 与 $B=\{x \mid 3x^2+10x+q=0\}$ 的公共元素，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cap B)$.

解　A,B 中的方程都有一根为 $-\frac{1}{3}$，分别代入，得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p-5=0,\\ \frac{1}{3}-\frac{10}{3}+q=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}p=-14,\\ q=3.\end{cases}$$

$$\therefore\ A=\{x \mid 3x^2-14x-5=0\}=\{x \mid (3x+1)(x-5)=0\}=\left\{-\frac{1}{3}, 5\right\},$$

$$B=\{x \mid 3x^2+10x+3=0\}=\{x \mid (3x+1)(x+3)=0\}=\left\{-\frac{1}{3}, -3\right\}.$$

$\therefore$　$\complement_U A=\{-3\}$，$\complement_U B=\{5\}$，

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{-3,5\}$.

$\because$　$A\cap B=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$，　$\therefore$　$\complement_U(A\cap B)=\{-3,5\}$.

注意　补集有下列一些常用结论：

(1) $\complement_U(\complement_U A)=A$；

(2) $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；

(3) $A\cup(\complement_U A)=U$；

(4) $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$；

(5) $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$.

例 6　向 50 名学生调查对 A,B 两观点的态度，结果如下：赞成观点 A 的人数是全体的 $\frac{3}{5}$，其余的不赞成；赞成观点 B 的比赞成观点 A 的多 3 人，其余的不赞成；另

外，对观点 A，B 都不赞成的学生比对观点 A，B 都赞成的学生的 $\frac{1}{3}$ 多 1 人. 问：对观点 A，B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人？

解 赞成观点 A 的人数为 $50\times\frac{3}{5}=30$，

赞成观点 B 的人数为 $30+3=33$.

如图 1-2，记 50 名学生组成的集合为 U，赞成观点 A 的学生全体为集合 A，赞成观点 B 的学生全体为集合 B.

设对观点 A，B 都赞成的学生人数为 x，则对观点 A，B 都不赞成的学生人数为 $\frac{x}{3}+1$，赞成观点 A 而不赞成观点 B 的学生人数为 $30-x$，赞成观点 B 而不赞成观点 A 的学生人数为 $33-x$.

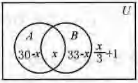


图 1-2

由题意可得方程

$(30-x)+(33-x)+x+\left(\frac{x}{3}+1\right)=50$.

解得 $x=21$，$\frac{x}{3}+1=8$.

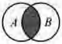
答：对观点 A，B 都赞成的学生有 21 人，对观点 A，B 都不赞成的学生有 8 人.

注意 解本例的关键是运用 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$ 求解.

训练

A 组

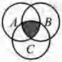
18. 已知集合 A，B，C，求下列图中阴影部分表示的集合：

(1) 

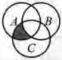
________；

(2) 

________；

(3) 

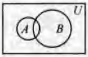
________；

(4) 

________；

(5) 
________.

19. 如图，U 为全集，A，B 为 U 的子集，将集合 $[\complement_U(A\cup B)]\cup(A\cap B)$ 用阴影表示出来.



（第 19 题）

20. (1) 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid |x|>1\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x-\frac{1}{2}\geqslant 0\right\}$，则 $\complement_UA=$________，$\complement_UB=$________；
(2) 设全集 $U=\{a,b,c,d,e,f\}$，$M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，则 $(\complement_UM)\cap(\complement_UN)=$________；
(3) 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid |x|\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid |x|>2\}$，则 $(\complement_UA)\cup(\complement_UB)=$________.

21. 若全集有 17 个元素，A 集合有 14 个元素，B 集合有 7 个元素，则 $A\cup B$ 的元素个数最多为________，$A\cap B$ 的元素个数最少为________.

22. 已知全集 $U=\{2,3,a^2-2a-3\}$，集合 $A=\{2,|a+7|\}$，$\complement_UA=\{5\}$，则实数 a 的值是________.

23. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $M=\{3,4,5\}$，$N=\{1,3,6\}$，那么集合 $\{2,7,8\}$ 可以表示为(　　).
(A) $M\cup N$　　(B) $(\complement_UM)\cup(\complement_UN)$
(C) $M\cap N$　　(D) $(\complement_UM)\cap(\complement_UN)$

24. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $E=\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 2\}$，$F=\{x\mid -1<x<5\}$，则集合 $\{x\mid -1<x<2\}$ 可以表示为(　　).
(A) $E\cap F$　　(B) $(\complement_UE)\cap F$
(C) $(\complement_UE)\cup(\complement_UF)$　　(D) $\complement_U(E\cup F)$

25. 已知全集 U $(U\neq\varnothing)$ 和子集 M，N，P，且 $M=\complement_UN$，$N=\complement_UP$，则 M，P 满足(　　).
(A) $M=\complement_UP$　　(B) $M=P$
(C) $M\supsetneqq P$　　(D) $M\subsetneqq P$

26. 设全集 $U=\{x\mid x\leqslant 8,x\in\mathbf{N}\}$. 若 $A\cap(\complement_UB)=\{1,8\}$，$(\complement_UA)\cap B=\{2,6\}$，$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\{4,7\}$，则(　　).
(A) $A=\{1,8\}$，$B=\{2,6\}$
(B) $A=\{1,3,5,8\}$，$B=\{2,3,5,6\}$
(C) $A=\{1,8\}$，$B=\{2,3,5,6\}$
(D) $A=\{1,3,8\}$，$B=\{2,5,6\}$

27. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，且 $(\complement_UA)\cap B=\{1,9\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\{4,6,8\}$，求集合 A，B.

28. 设全集$U=\{$不大于 20 的质数$\}$，且$A\cap(\complement_U B)=\{3,5\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{7,11\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{2,17\}$，求集合$A$，$B$.

29. 某校有 21 名学生参加数学兴趣小组，17 名学生参加物理兴趣小组，10 名学生参加历史兴趣小组. 他们之中同时参加数学兴趣小组、物理兴趣小组的有 12 人，同时参加数学兴趣小组、历史兴趣小组的有 6 人，同时参加物理兴趣小组、历史兴趣小组的有 5 人，同时参加这三个兴趣小组的有 2 人. 现在这三个兴趣小组的学生一起去郊游，问：一共有多少人？

B　组

30. 已知全集$U=\{a\mid 1\leqslant a\leqslant 100,a\in\mathbf{Z}\}$，集合$A\subsetneqq U$，且$A=\{$奇数$\}$，集合$B=\{b\mid 1<b<100,b=3k,k\in\mathbf{Z}\}$，则$(\complement_U A)\cap B$中数值最大的元素是________.

31. 已知全集$U=\{(x,y)\mid y=3x-1\}$，集合$A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-2}{x-1}=3\right\}$，则$\complement_U A=$________.

32. 已知全集$U=\{x\mid x=-n,n\in\mathbf{N}^*\}$，集合$A=\{x\mid x=-2n,n\in\mathbf{N}^*\}$，则$\complement_U A=$________.

33. 已知集合$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合A，B是U的子集，且$A\cup B=U$，$A\cap B\neq\varnothing$. 若$A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$，则满足条件的集合$A$共有________个.

34. 设全集$U=\{x\mid x=2n,n\in\mathbf{N}^*$，且$n\leqslant 10\}$，$A\subseteq U$，$B\subseteq U$，$A\cap(\complement_U B)=\{4,8,10\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{12,14,16\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\varnothing$，求$\complement_U[(\complement_U A)\cup(\complement_U B)]$.

35. 已知集合A有 10 个元素，集合B有 6 个元素，全集U有 18 个元素，$A\cap B\neq\varnothing$. 设$\complement_U(A\cup B)$有x个元素，求由x的所有值组成的集合.

1.2　函数及其表示

1.2.1　函数的概念

[redacted]时　函数的概念及其函数的定义域

例说

例 1　在下列各题中，函数$f(x)$与$g(x)$是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=(x-1)^0$与$g(x)=1$；

(2) $f(x)=\sqrt{x}$与$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=x^2$与$g(x)=(x+1)^2$；

(4) $f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$与$g(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^2$.

分析　根据函数的定义，判断两个函数是否相同，除观察对应法则是否相同外，还需判断定义域是否相同. 只有对应法则和定义域都完全一致时，这两个函数才表示同一函数.

解　(1) $f(x)$与$g(x)$的定义域不同，不是同一函数.

(2) $f(x)$与$g(x)$的对应关系不同，不是同一函数.

(3) $f(x)$与$g(x)$的对应关系不同，不是同一函数.

(4) $f(x)$与$g(x)$的定义域和对应关系均相同，所以是同一函数.

例 2　求函数$y=\sqrt{3-x}+\frac{4}{\sqrt{x+|x|}}$的定义域.

解　由题意把问题转化为解不等式组：

$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\ x+|x|>0,\end{cases}$ 解得$0<x\leqslant 3$.

故这个函数的定义域为$(0,3]$.

[redacted]　根据函数的解析式求函数的定义域的基本思路是：从解析式有意义出发，列出关于自变量的不等式(组)，解这个不等式(组)就能得到所求的定义域.

例 3　已知函数$f(x)=|x-1|-1$，$x\in\{-1,0,1,2,3,4\}$.

(1) 求$f[f(-1)]$，$f[f(1)]$的值；

(2) 求$f(x)$的值域、最大值和最小值；

(3) 画出函数$f(x)$的图象.

解　(1) $\because$ $f(-1)=1$，

$\therefore$ $f[f(-1)]=f(1)=-1$.

$\because$ $f(1)=-1$，　$\therefore$ $f[f(1)]=f(-1)=1$.

(2) $f(x)$的值域为$\{-1,0,1,2\}$，最大值为 2，最小值为-1.

（3）函数图象如图 1－3 所示.

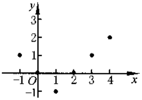


图 1－3

解决含多个函数符号的复合函数的有关问题.关键在于搞清符号的意义.如本例，$f[f(-1)]$表示以$x=f(-1)$为自变量相应的$f(x)$的值.

训 练

A 组

1. 下列各组函数中，表示同一函数的是（　　）.

（A）$f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=(\sqrt{x})^2$

（B）$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}, g(x)=x+1$

（C）$f(x)=\sqrt{x^2}, g(t)=|t|$

（D）$f(x)=\sqrt[3]{x^3}, g(x)=|x|$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$的定义域为（　　）.

（A）$(0,+\infty)$

（B）$(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

（C）$(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$

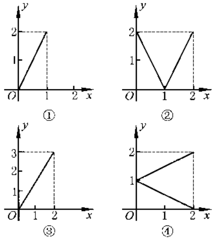
（D）$(0,1)$

3. 已知函数 $f(x)=4\pi x^2(x\in[a,8])$和函数 $S(r)=4\pi r^2(r\in[2,b])$是同一函数，则实数 a,b 的积为（　　）.

（A）16　　（B）-16

（C）8　　（D）不确定

4. 已知集合 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$. 给出下列 4 个图形，其中能表示集合 M 到集合 N 的函数关系的个数为（　　）.



（第 4 题）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

5. 已知下列各组函数：

①$y=x^0+1$ 与 $y=2$；

②$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；

③$y=x^2+2|x|+1$ 与 $y=(|x|+1)^2$；

④$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}+1$ 与 $y=x$；

⑤$y=x^2+1$ 与 $y=t^2+1$.

其中表示同一个函数的有（　　）.

（A）1 组　（B）2 组　（C）3 组　（D）4 组

6. 已知集合 $M=\{-1,1,2,4\}$，$N=\{0,1,3\}$. 给出下列 4 个对应法则：

①$y=x^2$；　　②$y=\dfrac{1}{x}-1$；

③$y=|x|-1$；　　④$y=|x-1|$.

其中能构成从 M 到 N 的函数是（　　）.

（A）①　（B）②　（C）③　（D）④

7. 函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2(x-1)}}+\sqrt{4-x}$的定义域为________.

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$，那么$f(1)+f(2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(3)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f(4)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$________.

9. 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$，则 $f[f(1)]=$________，$f[f(-1)]=$________.

10. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{x+5}{3x^2-2x-1}$；

（2）$y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+3}}$；

（3）$y=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{|x|-x}$；

（4）$y=\dfrac{\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x+5}}{|x+1|-1}$；

（5）$y=(\sqrt{x-1}-2)^0+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$；

(6) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x-1}}+\sqrt{3-x}$.

11. 已知函数 $f(x)=2x^4-\dfrac{1}{x}$.

(1) 求 $f(1)$,$f(-1)$,$f(1)+f(-1)$的值;

(2) 求 $f(a)$,$f(-a)$,$f(a)+f(-a)$的值(其中 $a\in\mathbf{R}$,且 $a\neq 0$);

(3) 你从(2)中发现了什么结论?

12. 下列各式是否表示 y 是 x 的函数?如果是,写出这个函数的解析式;如果不是,请说明理由.

(1) $2x+3y=1$ $(x\in\mathbf{R})$;

(2) $xy=-2$ $(x\neq 0)$;

(3) $4x^2+y^2=1$ $\left(x\in\left[-\dfrac{1}{2},0\right]\right)$;

(4) $4x^2+y^2=1$ $\left(x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right],\text{且 } y\in[-1,0]\right)$;

(5) $x^3+y^3=1$ $(x\in\mathbf{R})$.

B 组

13. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$,则方程 $f(4x)=x$ 的解为________.

14. 设函数 $f(n)=k$ (其中 $n\in\mathbf{N}^*$),k 是 π 的小数点后的第 n 位数字. $\pi=3.141\,592\,653\,5\cdots$,则 $\underbrace{f\{f\cdots f}_{100个}[f(10)]\}=$________.

15. 已知函数 $f(x)=2x+a$,$g(x)=\dfrac{1}{4}(x^2+3)$,且 $g[f(x)]=x^2-x+1$,求实数 a 的值.

16. 已知函数 $f(x)=3x^2+2$,$g(x)=x-1$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

17. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+b}$ $(a\neq 0)$,$f(2)=1$,且方程 $ax^2+(b-1)x=0$ 有两个相等的实数根,求 $f(x)$.

课时 复合函数的定义域、函数的值域

例 说

例 4 (1) 已知函数 $f(x)$的定义域为$[0,5]$,求函数 $f(3-2x)$的定义域;

(2) 已知函数 $f(x+3)$的定义域为$[-4,5)$,求函数 $f(2x-3)$的定义域;

(3) 已知函数 $f(x)$的定义域为$[a,b]$,求 $g(x)=f(x+c)-f(x-c)$ $\left(0<c<\dfrac{b-a}{2}\right)$的定义域.

分析 要使 $f(3-2x)$有意义,需 $3-2x\in[0,5]$,满足这一条件的 x 值的全体就是函数 $f(3-2x)$的定义域.

解 (1) $\because$ $0\leqslant 3-2x\leqslant 5$, $\therefore$ $-1\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}$.

故函数 $f(3-2x)$的定义域为$\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$.

(2) $\because$ $x\in[-4,5)$, $\therefore$ $x+3\in[-1,8)$.

故函数 $f(x)$的定义域为$[-1,8)$.

由$-1\leqslant 2x-3<8$,得 $1\leqslant x<\dfrac{11}{2}$.

$\therefore$ 函数 $f(2x-3)$的定义域为$\left[1,\dfrac{11}{2}\right)$.

(3) 由$\begin{cases}a\leqslant x+c\leqslant b,\\ a\leqslant x-c\leqslant b,\end{cases}$得$\begin{cases}a-c\leqslant x\leqslant b-c,\\ a+c\leqslant x\leqslant b+c.\end{cases}$

$\therefore$ $a+c\leqslant x\leqslant b-c$.

$\therefore$ $g(x)$的定义域为$[a+c,b-c]$ $\left(0<c<\dfrac{b-a}{2}\right)$.