

张昌叙 张 炜 编著

圆筒形结构计算

yuantongxingjiegou

jisuan

中国建筑工业出版社

圆筒形结构计算

张昌叙 张 炜 编著

中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

圆筒形结构计算/张昌叙, 张炜编著. —北京: 中国建筑工业出版社, 2007

ISBN 978-7-112-09190-4

I. 圆… II. ①张…②张… III. 圆筒—建筑结构—结构计算 IV. TU31

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 035969 号

本书主要针对圆筒形结构在筒壁不规则压力作用下筒壁变形及内力计算的难题, 介绍了作者经过深入研究提出的集中荷载法及其应用。集中荷载法不仅可以计算不规则压力作用下圆筒形结构筒壁的变形及内力, 而且也适用于环向对称, 沿筒壁高度规则分布 (三角形、矩形、梯形分布) 荷载情形。该方法应用弹性地基梁类比法和力学叠加原理, 获得了圆筒形结构在环向对称的一集中荷载作用下筒壁变形及内力的弹性解析解, 从而为这类结构的结构计算又提供了一种新的、可靠的理论分析方法, 弥补了现有计算方法的不足。为便于读者对集中荷载法的应用, 书中编制了相关计算用表及计算例题。

书中还对目前广泛采用的圆柱壳有矩理论作了扼要的介绍。

本书可供工程设计、教学、科研及工程检测人员参考使用。

* * *

责任编辑: 武晓涛

责任设计: 赵明霞

责任校对: 梁珊珊 刘 钰

圆筒形结构计算

张昌叙 张 炜 编著

*

中国建筑工业出版社出版、发行 (北京西郊百万庄)

新华书店经销

北京市永峥印刷有限责任公司

北京市安泰印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 12 $\frac{1}{4}$ 字数: 295 千字

2007 年 5 月第一版 2007 年 5 月第一次印刷

印数: 1—3000 册 定价: 25.00 元

ISBN 978-7-112-09190-4

(15854)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题, 可寄本社退换

(邮政编码: 100037)

本社网址: <http://www.cabp.com.cn>

网上书店: <http://www.china-building.com.cn>

作者简介

张昌叙 1942 年生，1964 年毕业于重庆建筑工程学院土木工程系。参加工作后长期从事建筑科学研究、技术服务、技术管理及国家建筑工程标准规范的编制和管理工作。历任研究室副主任、主任、院总工程师、院长等职，现任陕西省建筑科学研究院顾问总工程师，享受政府特殊津贴，教授级高级工程师。

张 炜 1968 年生，1991 年毕业于重庆建筑工程学院建筑工程系。现任陕西省古建筑设计研究所副所长，高级工程师，主要从事古建筑保护、维修、加固及仿古建筑设计等工作。

前 言

旋转壳在特种工程结构中有广泛的应用,其中,圆柱壳在贮液池,如水池、油罐、污水沉淀池以及贮仓和核电站的安全壳中常被采用。

关于圆筒形结构筒壁变形和内力的计算问题,前人已有深入的研究,其中,圆柱壳有矩理论便是一种经典理论和方法。但是,由于所建立的基本微分方程式在求解过程中的困难,使该经典理论和方法在应用中受到了一定限制,它只能适用于圆筒形结构在筒壁作用环向对称,且沿筒壁高度方向直线变化(三角形、矩形、梯形)的分布荷载情形。在工程实际中,由于结构物所处的环境及设计特点各异,往往碰到作用于筒壁上的侧向压力荷载并非沿筒壁高度规则变化分布,如半埋式或全埋式贮液池受土体侧压力、地下水侧压力作用;贮液池在地震时产生的动水压力;贮仓中贮物的侧压力;筒壁环向预应力钢筋对筒壁的挤压力等等。当在设计中有以上这类环向对称、沿筒壁高度不规则分布荷载作用时,则应将其转换成规则分布荷载进行计算。不言而喻,这将带来计算误差,有时甚至是惊人的计算误差,从而失去了进行结构计算的实际意义。此外,对配置环向预应力钢筋的圆筒形结构,圆柱壳有矩理论尚不能解决预应力钢筋的分批张拉应力损失的计算问题,这对于预应力结构设计而言,无疑是一个遗憾。除了圆柱壳有矩理论之外,计算圆筒形结构还有弹性地基梁初参数法和有限单元分析方法等,但这些方法的应用颇感不便。

鉴于此,作者通过深入研究,应用了科学研究中的一种逻辑思维方法——类比法,将圆筒形结构的筒壁沿竖向截取单位宽度的纵向长条为脱离体,将其视为弹性地基梁,应用弹性地基上无限长梁和半无限长梁理论,并巧妙地利用叠加原理,最终获得了有限长弹性地基梁在一个集中力作用下的挠度(弹性线)基本微分方程式的解。当采用集中荷载法对结构进行计算时,可将分布荷载折算成多个集中荷载,分别计算每个集中荷载下筒壁的变形或内力,最后将计算结果叠加。该方法力学概念清晰,计算简便(利用本书的计算用表),有效地解决了等壁厚圆筒形结构在不规则压力作用下筒壁变形、内力及预应力结构中预应力钢筋分批张拉应力损失计算等难题。

为便于读者对集中荷载法的应用,本书编制了大量计算用表。计算用表编制时,将筒壁荷载(集中荷载)的数量确定为10个,并分别作用于距筒底 $0.05H$ 、 $0.10H$ 、 $0.15H$ 、……、 $0.95H$ 处,其中 H 为筒壁高;计算截面为 $0.0H$ 、 $0.1H$ 、 $0.2H$ 、……、 $1.0H$ 。计算分析表明,将筒壁上的分布荷载等效地折算成10个集中荷载进行计算,计算结果已具有较好的精确性,完全可以满足工程设计的要求。

在本书的编写过程中,得到居晓延、王耀南、贾忠奎同志的协助,谨在此表示感谢。

本书介绍的集中荷载法是作者对特种结构力学分析和设计计算方法的一点探索,渴望广大读者对该研究成果和本书提出宝贵意见,作者将不胜感激。

目 录

第一章 概论	1
第一节 圆柱壳有矩理论	1
第二节 弹性地基上无限长梁	5
第三节 弹性地基上半无限长梁	7
第二章 集中荷载法	8
第一节 集中荷载法的原理	8
第二节 圆筒形结构筒壁变形和内力的计算公式	10
第三章 计算方法应用	17
第一节 荷载的简化	17
第二节 环向力及弯矩系数表的编制	18
第三节 高圆筒结构筒壁计算	19
第四节 集中荷载局部加密时的计算	22
第五节 计算例题	24
附录	37
附表1 弯矩系数 K_{1M} (两端铰支)	37
附表2 弯矩系数 K_{2M} (上端自由下端铰支)	56
附表3 弯矩系数 K_{3M} (上端自由下端固定)	75
附表4 弯矩系数 K_{4M} (上端铰支下端固定)	94
附表5 环向力系数 K_{1T} (两端铰支)	113
附表6 环向力系数 K_{2T} (上端自由下端铰支)	132
附表7 环向力系数 K_{3T} (上端自由下端固定)	151
附表8 环向力系数 K_{4T} (上端铰支下端固定)	170
参考文献	189

第一章 概 论

圆筒形结构由于受力合理, 节省材料, 因此在建筑工程中得到广泛应用, 如贮液、贮物等特种结构。

目前, 在圆筒形结构的力学分析和设计计算方法中, 有圆柱壳的无矩理论; 圆柱壳的有矩理论; 弹性地基梁初参数法; 有限单元分析法等。其中, 圆柱壳无矩理论不适用于圆筒形结构筒壁有弯曲内力的计算; 圆柱壳有矩理论在应用上受到一定限制, 只能适用在筒壁沿高度方向作用规则分布荷载 (三角形、矩形、梯形分布荷载) 情形; 弹性地基梁初参数法和有限单元分析法的应用比较繁杂, 常不受工程技术人员的欢迎。

本书在简略介绍圆柱壳的有矩理论之后, 着重阐述作者研究提出的集中荷载法及该方法的应用。

第一节 圆柱壳有矩理论

在工程中采用的圆筒形结构, 因筒壁的厚度 h 远小于圆筒的半径 R , 这就可以将筒壁看作为圆柱形薄壳。它是旋转壳体中比较简单的一种类型, 而且在正常情况下, 筒壁所受到的侧压力是轴对称的, 此时筒壁只产生轴对称变形和内力, 从而使这类结构的计算成为圆柱形薄壳计算中最简单的一类问题。

1. 基本微分方程

下面, 将以研究受轴对称荷载的圆筒形结构筒壁的变形及内力入手, 如图 1-1 所示截取环向为单位弧长、高度为 dx 的微元体为自由体, 根据力的平衡条件可得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV(x)}{dx} + q(x) - 2T(x) \cdot \sin \frac{d\psi}{2} &= 0 \\ \frac{dM(x)}{dx} - V(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

因为 $d\psi = \frac{1}{R}$ 很小, 所以 $\sin \frac{d\psi}{2} \approx \frac{d\psi}{2} = \frac{1}{2R}$ 。这样根据式 (1-1) 便得:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - \frac{T(x)}{R} + q(x) = 0 \quad (1-2)$$

引入变形条件

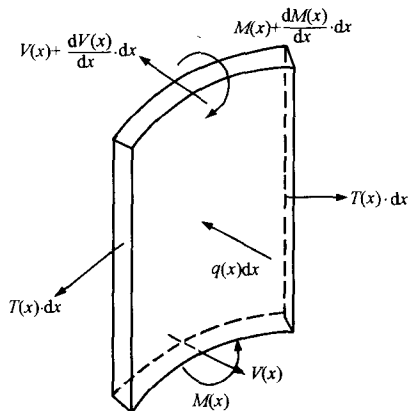


图 1-1 圆柱壳微元体

$$T(x) = \frac{\gamma(x)}{R} \cdot Eh \quad (1-3)$$

式中 $\gamma(x)$ ——壳体的径向变形（挠度）；

E ——壳体材料的弹性模量；

h ——壳体的厚度。

另外，由材料力学可知，如不考虑泊松系数 μ ，则有

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -D \frac{d^4 \gamma(x)}{dx^4} = -EJ \frac{d^4 \gamma(x)}{dx^4} \quad (1-4)$$

式中 D ——圆柱刚度， $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ；

J ——截面惯性矩。

这样，将式（1-3）、式（1-4）代入式（1-2），最后得：

$$EJ \frac{d^4 \gamma(x)}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} \cdot \gamma(x) = q(x)$$

$$\text{或} \quad \frac{d^4 \gamma(x)}{dx^4} + \frac{12}{R^2 h^2} \cdot \gamma(x) = \frac{1}{EJ} q(x) \quad (1-5)$$

设 $\frac{3}{R^2 h^2} = \beta$ （ β 为引入常数），则得到如下基本微分方程式：

$$\frac{d^4 \gamma(x)}{dx^4} + 4\beta \cdot \gamma(x) = \frac{1}{EJ} q(x) \quad (1-6)$$

2. 基本微分方程的解

基本微分方程（1-6）的解，将由两部分组成，即齐次方程的通解和微分方程的特解。

基本微分方程（1-6）对应的齐次方程系一常系数微分方程：

$$\frac{d^4 \gamma(x)}{dx^4} + 4\beta \cdot \gamma(x) = 0 \quad (1-7)$$

上述方程解的表达式为：

$$\gamma_1(x) = c_1 e^{\beta x} \cdot \cos \beta x + c_2 e^{\beta x} \cdot \sin \beta x + c_3 e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x + c_4 e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x \quad (1-8)$$

基本微分方程的特解，即由荷载 $q(x)$ 引起的径向变形（挠度） $\gamma_2(x)$ 。 $\gamma_2(x)$ 可采用壳体的薄膜理论，利用材料力学的截面法予以计算。所谓壳体的薄膜理论，是壳体在外荷载作用下略去壳体截面内产生的弯矩和横向剪力，只计截面的顺剪力，这些顺剪力是由壳面内的均匀正应力和剪应力组成。壳体实现薄膜内力需要满足以下条件：

- （1）壳体具有均匀连续变化的曲面；
- （2）壳体上的荷载是均匀连续分布的；
- （3）壳体的各个界面能够沿着曲线的法向方向自由转动，支座只产生阻止曲面切线方向位移的反力。

根据图 1-2 所示受均匀荷载的圆环，环截面的内力为：

$$N_\theta = q \cdot R \quad (1-9)$$

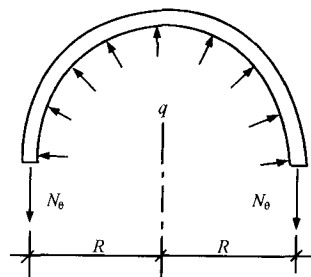


图 1-2 受均匀荷载的圆环

则由轴对称下内力与位移的关系式得到基本微分方程 (1-6) 的特解:

$$y_2(x) = \frac{R^2}{Eh} \cdot q \quad (1-10)$$

因此, 基本微分方程 (1-6) 的全解便为:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + y_2(x) \\ &= c_1 \cdot e^{\beta x} \cdot \cos \beta x + c_2 e^{\beta x} \cdot \sin \beta x + c_3 e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x + c_4 e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x + \frac{R^2}{Eh} \cdot q \end{aligned} \quad (1-11)$$

公式 (1-11) 中的积分常数 c_1 、 c_2 、 c_3 、 c_4 根据结构的边界条件确定。

3. 筒壁转角及内力表达式

在获得了筒壁挠曲方程 (1-11) 之后, 就可以由材料力学中挠度与环向力、转角、弯矩、剪力间的函数关系得到下列公式:

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= \frac{Eh}{R} \cdot y(x) = \frac{Eh}{R} (c_1 e^{\beta x} \cdot \cos \beta x + c_2 e^{\beta x} \cdot \sin \beta x \\ &\quad + c_3 e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x + c_4 e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x) + R \cdot q \\ \theta(x) &= \frac{dy(x)}{dx} = \beta \{ e^{\beta x} [c_1 (\cos \beta x - \sin \beta x) + c_2 (\sin \beta x + \cos \beta x)] \\ &\quad + e^{-\beta x} [-c_3 (\cos \beta x + \sin \beta x) + c_4 (\cos \beta x - \sin \beta x)] \} + \frac{R^2}{Eh} \cdot q'(x) \\ M(x) &= -EJ \frac{d^2 y(x)}{dx^2} = 2EJ\beta^2 [e^{\beta x} (c_1 \sin \beta x - c_2 \cdot \cos \beta x) \\ &\quad + e^{-\beta x} (-c_3 \sin \beta x + c_4 \cdot \cos \beta x)] \\ V(x) &= -EJ \frac{d^3 y(x)}{dx^3} = -EJ\beta^3 \{ e^{\beta x} [-c_1 (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ &\quad - c_2 (\cos \beta x - \sin \beta x) + e^{-\beta x} [c_3 (\cos \beta x - \sin \beta x) + c_4 (\cos \beta x + \sin \beta x)] \} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

为了解公式 (1-12) 的具体应用, 将以

图 1-3 所示圆形水池为例予以说明。水池上下端均为铰支承, 池壁计算高度为 H , 池壁厚 h , 半径 R , 受水压作用, 其底部的荷载分布强度为 q 。水池的计算参数 $\beta H = 4.0$ 。

由于作用于池壁上任一截面的荷载分布强度为:

$$q(x) = \left(1 - \frac{x}{H}\right) q_0 \quad (1-13)$$

因此, 根据式 (1-11) 得:

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\beta x} \cdot \cos \beta x + c_2 e^{\beta x} \cdot \sin \beta x \\ &\quad + c_3 e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x + c_4 e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x \\ &\quad + \frac{R^2}{Eh} \left(1 - \frac{x}{H}\right) q_0 \end{aligned} \quad (1-14)$$

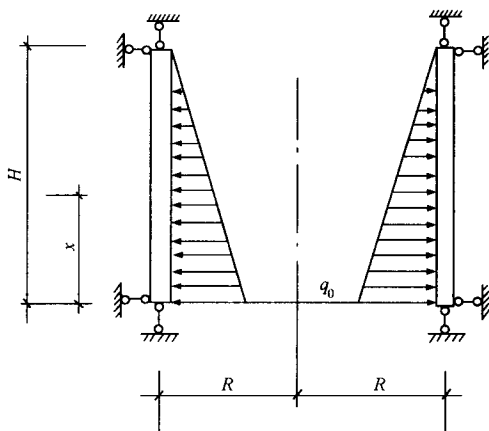


图 1-3 水池计算简图

根据边界条件

$$x=0 \text{ 时: } y(0)=0, M(0)=0;$$

$$x=H \text{ 时: } y(H)=0, M(H)=0。$$

可得到:

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_3 &= -\frac{R^2}{Eh} \cdot q_0 \\ -c_2 + c_4 &= 0 \\ c_1 e^{\beta H} \cdot \cos \beta H + c_2 e^{\beta H} \cdot \sin \beta H + c_3 e^{-\beta H} \cdot \cos \beta H + c_4 e^{-\beta H} \cdot \sin \beta H &= 0 \\ c_1 e^{\beta H} \cdot \sin \beta H - c_2 e^{\beta H} \cdot \cos \beta H - c_3 e^{-\beta H} \cdot \sin \beta H + c_4 e^{-\beta H} \cdot \cos \beta H &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

联立解上面方程组, 得到待定常数分别为:

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{-\cos^2 \beta H + \sin^2 \beta H + e^{-2\beta H}}{2\cos^2 \beta H - 2\sin^2 \beta H - (e^{2\beta H} - e^{-2\beta H})} \cdot \frac{R^2}{Eh} q_0 \\ c_2 &= \frac{-2\cos \beta H \cdot \sin \beta H}{2\cos^2 \beta H - 2\sin^2 \beta H - (e^{2\beta H} - e^{-2\beta H})} \cdot \frac{R^2}{Eh} q_0 \\ c_3 &= \frac{-\cos^2 \beta H + \sin^2 \beta H + e^{2\beta H}}{2\cos^2 \beta H - 2\sin^2 \beta H - (e^{2\beta H} - e^{-2\beta H})} \cdot \frac{R^2}{Eh} q_0 \\ c_4 &= \frac{-2\cos \beta H \cdot \sin \beta H}{2\cos^2 \beta H - 2\sin^2 \beta H - (e^{2\beta H} - e^{-2\beta H})} \cdot \frac{R^2}{Eh} q_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

对本例, 将参数 $\beta H = 4.0$ 代入式 (1-16) 得:

$$c_1 = -0.000049 \frac{R^2}{Eh} q_0$$

$$c_2 = 0.000332 \frac{R^2}{Eh} q_0$$

$$c_3 = -0.999951 \frac{R^2}{Eh} q_0$$

$$c_4 = 0.000332 \frac{R^2}{Eh} q_0$$

因此, 将待定积分常数值代入公式 (1-12) 及公式 (1-14) 就得出水池池壁的变形及内力。表 1-1 列出了池壁环向力及弯矩的计算结果。由表所示结果看出, 本例的计算值与参考文献 [5] 的计算表所列结果完全吻合。

池壁内力计算结果

表 1-1

截 面	计算结果/查表结果		截 面	计算结果/查表结果	
	环向力 $T (\times Rq_0)$	弯矩 $(\times H^2 q_0)$		环向力 $T (\times Rq_0)$	弯矩 $(\times H^2 q_0)$
0.0H	0.0000/0.0000	0.0000/0.0000	0.6H	0.4698/0.4697	0.0020/0.0019
0.1H	0.2828/0.2828	0.0081/0.0081	0.7H	0.3599/0.3598	0.0008/0.0007
0.2H	0.4875/0.4875	0.0100/0.0100	0.8H	0.2414/0.2414	0.0002/0.0001
0.3H	0.5919/0.5919	0.0087/0.0087	0.9H	0.1207/0.1207	0.0001/0.0000
0.4H	0.6076/0.6076	0.0063/0.0063	1.0H	0.0000/0.0000	0.0000/0.0000
0.5H	0.5587/0.5587	0.0038/0.0038			

注: 池底为 0.0H, 池顶为 1.0H。

利用圆柱壳有矩理论对结构进行计算时，可以针对圆筒形结构不同的支承条件编制相应的计算用表。

第二节 弹性地基上无限长梁

弹性地基上无限长梁是研究弹性地基梁问题中最基本、最简单的情形。这里，假设一个集中力 P 作用在一根弹性地基上的无限长梁上，并将坐标原点建立在集中力作用点处（图 1-4）。

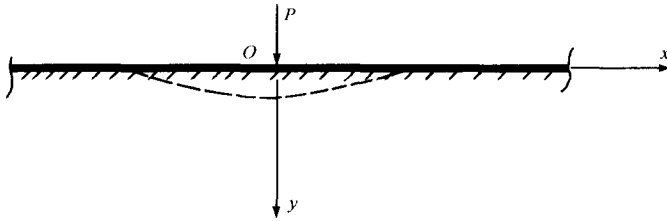


图 1-4 弹性地基上无限长梁

根据文克尔假定，弹性地基梁的地基反力与沉降成正比，即

$$p = k \cdot y \quad (1-17)$$

式中 p ——地基反力强度；

k ——基床系数；

y ——梁的沉降变形。

实际上，当梁受荷载作用产生变形后，除了竖向反力外，尚有作用在梁与地基接触面上的水平摩擦力，因其影响较小，一般不予考虑。

根据材料力学中梁受弯的微分方程可得：

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = -b \cdot k \cdot y \quad (1-18)$$

式中 x ——沿梁长度方向的坐标；

y ——梁的挠度；

E ——梁材料的弹性模量；

J ——梁截面的惯性矩；

b ——梁的底面宽度。

如令 $\beta = \sqrt[4]{b \cdot k / 4EJ}$ ，则微分方程（1-18）变成

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 4\beta^4 y = 0 \quad (1-19)$$

则微分方程（1-19）的一般解为：

$$y(x) = e^{-\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x) + e^{\beta x} (c_3 \cdot \cos \beta x + c_4 \cdot \sin \beta x) \quad (1-20)$$

对于图 1-4 所示弹性地基上无限长梁的变形及对力条件有：

（1）距离集中力作用点无限远处挠度趋近于零，即当 $x \rightarrow \infty$ 时 $y \rightarrow 0$ ；

(2) 由于结构和荷载的对称性, 在坐标 $x=0$ 处, 梁的弹性曲线的切线为水平线, 即 $\frac{dy}{dx}=0$;

(3) 梁在集中荷载作用点的右方, 即 $x=0+\varepsilon$ (ε 为任意小的一个常数) 截面处剪力 $V=-\frac{P}{2}$ 。

因此, 由条件 (1) 得: 梁的挠度曲线方程 (1-20) 中必须有 $c_3=c_4=0$, 故有

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= e^{-\beta x} (c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x) \\ &= c_1 \cdot \eta_1(\beta x) + c_2 \cdot \eta_2(\beta x) \\ \theta(x) &= -c_1 \beta \cdot \eta_1(\beta x) + c_2 \beta \cdot \eta_3(\beta x) \\ M(x) &= -2c_1 EJ\beta^2 \cdot \eta_2(\beta x) + 2c_2 EJ\beta^2 \cdot \eta_4(\beta x) \\ V(x) &= -2c_1 EJ\beta^3 \cdot \eta_3(\beta x) - 2c_2 EJ\beta^3 \cdot \eta_1(\beta x) \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

式中 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ ——引入函数, 其中

$$\left. \begin{aligned} \eta_1(\beta x) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ \eta_2(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x \\ \eta_3(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot (\cos \beta x - \sin \beta x) \\ \eta_4(\beta x) &= e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

引入条件 (2)、(3) 得:

$$\left. \begin{aligned} -c_1 \beta + c_2 \beta &= 0 \\ -2c_1 EJ\beta^3 - 2c_2 EJ\beta^3 &= -\frac{P}{2} \end{aligned} \right\} \quad (1-23)$$

因此

$$c_1 = c_2 = \frac{P}{8\beta^3 EJ} \quad (1-24)$$

将积分常数 c_1, c_2 代入式 (1-21), 得到弹性地基上无限长梁作用一个集中力时梁的变形及内力表达式为:

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= \frac{P}{8\beta^3 EJ} \cdot \eta_1(\beta x) \\ \theta(x) &= -\frac{P}{4\beta^2 EJ} \cdot \eta_2(\beta x) \\ M(x) &= \frac{P}{4\beta} \cdot \eta_3(\beta x) \\ V(x) &= -\frac{P}{2} \cdot \eta_4(\beta x) \end{aligned} \right\} \quad (1-25)$$

需要指出, 式 (1-25) 只适用于 $x \geq 0$ 的梁各截面变形及内力的计算。当 $x < 0$ 时, 转角及剪力公式应变号, 同时在计算中 x 值均取其绝对值。

第三节 弹性地基上半无限长梁

弹性地基上长梁当其一端长度为无限长，另一端为有限长时，称为弹性地基上半无限长梁。图 1-5 表示一根弹性地基上半无限长梁在有限长端有变形及荷载的情形。

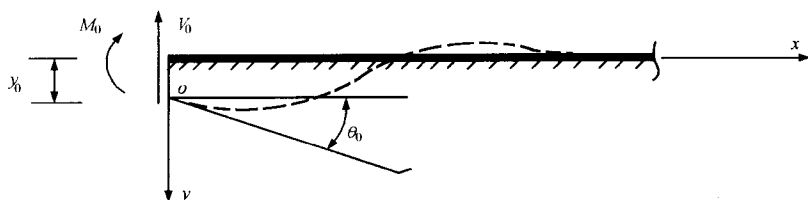


图 1-5 弹性地基上半无限长梁

根据图 1-5 所示弹性地基上半无限长梁的变形条件 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 得到与弹性地基上无限长梁完全相同的结果, 即在梁的挠度曲线方程 (1-20) 中必须有 $c_3 = c_4 = 0$ 。因此, 图 1-5 所示弹性地基上半无限长梁的挠度、转角、弯矩及剪力的计算公式完全与式 (1-21) 相同。但在其应用中, 转角及剪力的符号在 $x < 0$ 时必须变号, 同时 x 值均取其绝对值。公式 (1-21) 中的积分常数 c_1 、 c_2 由有限长一端的边界条件确定。

第二章 集中荷载法

第一节 集中荷载法的原理

把壳体比拟成弹性地基梁是前人早已提出来的一种研究方法。这种方法易于理解和掌握，是简化壳体计算的有效方法。因此，作者在研究圆筒形结构在不规则荷载作用下筒壁变形及内力的理论分析时，也将应用这一方法。

集中荷载法的思路及理论分析的特点可归纳如下：

- (1) 把筒壁沿竖向切取单位宽度的纵条为隔离体，将其比拟成有限长弹性地基梁；
- (2) 把筒壁上作用的荷载等效地转换成若干个集中荷载，以便分析有限长弹性地基梁的变形及内力；
- (3) 把有限长弹性地基梁用一根无限长弹性地基梁和两根半无限长弹性地基梁替代，以便分别分析梁的变形及内力；
- (4) 根据圆筒形结构筒壁上下端的支承情况所对应的边界条件，并按照弹性地基上无限长梁理论，确定两根弹性地基上半无限长梁的有限长一端的边界条件；
- (5) 分别应用弹性地基上无限长梁和半无限长梁理论，确定以上三根梁的变形及内力，并将其叠加。

通过对集中荷载法的思路及分析特点的介绍，充分地展现了集中荷载法是对弹性地基比拟法及力学叠加原理的巧妙应用所得到的研究成果。

下面，将对集中荷载法的原理进行具体的阐述。

图 2-1 所示有限长弹性地基梁 AB ，梁长 H ，在 C 点作用一集中力 P ，该集中力距梁左端的距离为 a ，距梁右端的距离为 b 。

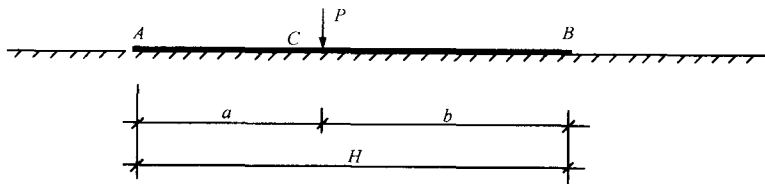


图 2-1 有限长弹性地基梁

将图 2-1 所示有限长弹性地基梁等效转换成图 2-2 所示三根梁，其中梁 (a) 为弹性地基上无限长梁，在点 O_1 处（点 O_1 相应于图 2-1 中点 C 所在位置）作用一集中力 P ，该集中力距点 A_1 处（点 A_1 相应于图 2-1 中点 A 所在位置）的距离为 a ，距点 B_1 处（点 B_1 相应于图 2-1 中点 B 所在位置）的距离为 b ；梁 (b) 及梁 (c) 为弹性地基上半无限长

梁，点 A_2 、 A_3 及 B_2 、 B_3 分别与图 2-1 所示梁左端 A 及右端 B 相对应。

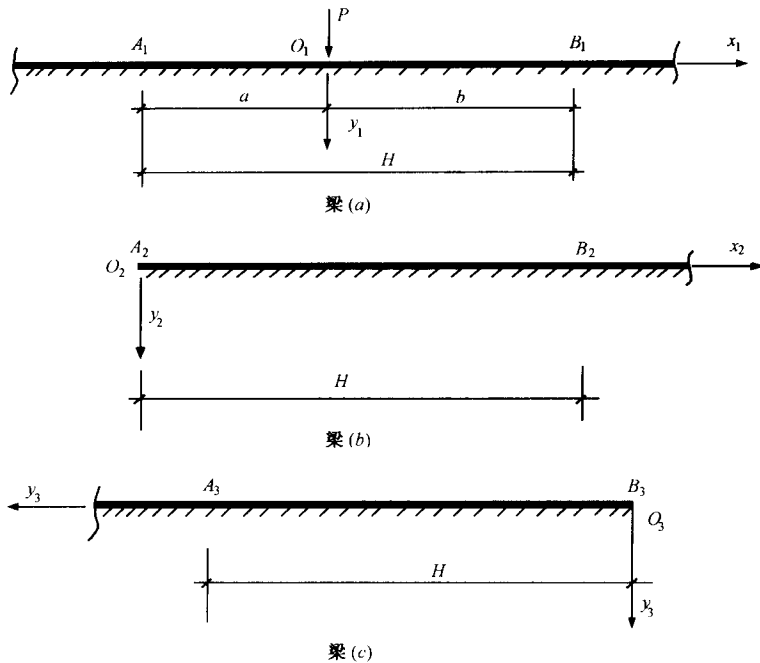


图 2-2 弹性地基上无限长梁和半无限长梁

根据图 2-2 所示三根梁的总变形和总内力与图 2-1 所示梁的变形和内力相等的原则，有如下相互关系：图 2-1 中梁 A 端（或 B 端）的变形（位移或转角）、反力（弯矩或剪力）必须与图 2-2 中截面 A_1 、 A_2 、 A_3 （或 B_1 、 B_2 、 B_3 ）总的变形、反力相等。这一考虑，便是集中荷载法的基础。

在进行集中荷载法的理论分析之前，结合工程实际，为使问题得到一些简化，特做下面的假定：半无限长梁有限长一端的位移、转角、弯矩、剪力对距该端距离 H 以远（包括距离为 H 处）截面不产生影响。该假定在满足一定条件时是成立的。因为由弹性地基上无限长梁和半无限长梁理论知道，变形及内力公式（1-21）中，由于各函数是衰减函数，梁的变形及内力随着坐标 x 的增加而迅速减小，当坐标 x 增加到一定数值后，梁的变形及内力将非常微小，因此，针对工程设计计算从实用出发，在满足设计计算精度要求的前提下，完全可以给出一个参数定值，使有限长弹性地基梁的长度在某一长度以上时，便可忽略梁端支座约束作用的相互影响。理论分析表明，圆筒形结构的参数 βH 值的大小，可用以判断上述假定成立的条件。在圆柱壳理论中，可将筒壁分为短壁与长壁。其中，认为能够忽略远端支座约束影响的圆柱壳称为长壁；把不能忽略远端支座约束影响的圆柱壳称为短壁。长壁与短壁一般按下列情况划分：

$\beta H < 2.5$ 按短壁考虑；

$\beta H \geq 2.5$ 按长壁考虑。

在工程设计中的混凝土圆筒形结构，通常均为长壁圆柱壳。因此，在下面集中荷载法

的理论分析中, 将不计梁端支座约束的相互影响。这一简化, 使集中荷载法的分析及计算变得较简便, 勿需进行繁琐的计算过程和应用令人眼花缭乱的复杂公式。

下面, 依照前一章弹性地基上无限长梁和半无限长梁理论, 对图 2-2 所示弹性地基上的三根梁, 分别列出其变形及内力公式:

1. 对梁 (a)

将公式 (1-25) 中的坐标进行替换后得

$$\left. \begin{aligned} y_1(x_1) &= \frac{P}{8\beta^3 EJ} \cdot \eta_1(\beta x_1) \\ \theta_1(x_1) &= -\frac{P}{4\beta^2 EJ} \cdot \eta_2(\beta x_1) \\ M_1(x_1) &= \frac{P}{4\beta} \cdot \eta_3(\beta x_1) \\ V_1(x_1) &= -\frac{P}{2} \cdot \eta_4(\beta x_1) \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

上述公式只适用于 $x_1 \geq 0$ 的情形; 当 $x_1 < 0$ 时, 转角与剪力公式应予变号, 并在计算中 x_1 取其绝对值。

2. 对梁 (b)

依据公式 (1-21), 将坐标进行替换后得

$$\left. \begin{aligned} y_2(x_2) &= C_1 \eta_4(\beta x_2) + C_2 \eta_2(\beta x_2) \\ \theta_2(x_2) &= -C_1 \beta \cdot \eta_1(\beta x_2) + C_2 \beta \cdot \eta_3(\beta x_2) \\ M_2(x_2) &= -2C_1 \beta^2 EJ \cdot \eta_2(\beta x_2) + 2C_2 \beta^2 EJ \cdot \eta_4(\beta x_2) \\ V_2(x_2) &= -2C_1 \beta^3 EJ \cdot \eta_3(\beta x_2) - 2C_2 \beta^3 EJ \cdot \eta_1(\beta x_2) \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

上述公式中积分常数 C_1 、 C_2 由梁端 A_2 处的边界条件确定。

3. 对梁 (c)

同上, 有下列公式:

$$\left. \begin{aligned} y_3(x_3) &= C'_1 \eta_4(\beta x_3) + C'_2 \cdot \eta_2(\beta x_3) \\ \theta_3(x_3) &= -C'_1 \beta \cdot \eta_1(\beta x_3) + C'_2 \beta \cdot \eta_3(\beta x_3) \\ M_3(x_3) &= -2C'_1 \beta^2 EJ \cdot \eta_2(\beta x_3) + 2C'_2 \beta^2 EJ \cdot \eta_4(\beta x_3) \\ V_3(x_3) &= -2C'_1 \beta^3 EJ \cdot \eta_3(\beta x_3) - 2C'_2 \beta^3 EJ \cdot \eta_1(\beta x_3) \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

公式 (2-3) 中的积分常数 C'_1 、 C'_2 由梁端 B_3 处的边界条件确定。

在应用公式 (2-3) 时, 如要与梁 (a)、(b) 的变形、内力进行叠加, 转角及剪力公式应变号。

第二节 圆筒形结构筒壁变形和内力的计算公式

在工程结构设计中, 圆筒形结构的上下端的支承条件有多种, 如自由、铰支承、固定

支承等。由于支承条件直接影响筒壁变形及内力的计算公式和计算结果，因此下面将针对工程中常碰到的几种结构支承状态分析圆筒形结构筒壁的变形及内力。

(一) 两端铰支情形

图 2-3 表示两端均为铰支承圆筒形结构纵条梁的计算简图。

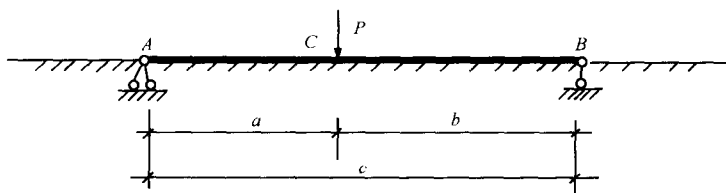


图 2-3 两端铰支弹性地基梁计算简图

依照上节分析，在将图 2-3 所示有限长弹性地基梁等效地替换成一根无限长弹性地基梁和两根半无限长弹性地基梁之后，只需要根据两根半无限长弹性地基梁在有限长一端的边界条件，确定公式 (2-2)、公式 (2-3) 中的待定积分常数 C_1 、 C_2 及 C'_1 、 C'_2 后，即可得到相应两根半无限长梁弹性地基梁变形及内力公式。

1. 确定待定积分常数 C_1 、 C_2

由于图 2-3 梁 A 端为铰支承，因此该端的位移及弯矩均为零。对图 2-2 梁 (b)，其边界条件为：

$$\left. \begin{aligned} y_2(0) = -y_1(a) &= -\frac{P}{8\beta^3 EJ} \eta_1(\beta a) \\ M_2(0) = -M_1(a) &= -\frac{P}{4\beta} \cdot \eta_3(\beta a) \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

将上述边界条件代入式 (2-2) 后得

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{P}{8\beta^3 EJ} \cdot \eta_1(\beta a) \\ C_2 &= -\frac{P}{8\beta^3 EJ} \cdot \eta_3(\beta a) \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

于是，对应于图 2-2 梁 (b) 的位移、转角、弯矩、剪力的计算公式分别为：

$$\left. \begin{aligned} y_2(x_2) &= -\frac{P}{8\beta^3 EJ} [\eta_1(\beta a) \cdot \eta_4(\beta x_2) + \eta_3(\beta a) \cdot \eta_2(\beta x_2)] \\ \theta_2(x_2) &= \frac{P}{8\beta^2 EJ} [\eta_1(\beta a) \cdot \eta_1(\beta x_2) - \eta_3(\beta a) \cdot \eta_3(\beta x_2)] \\ M_2(x_2) &= \frac{P}{4\beta} [\eta_1(\beta a) \cdot \eta_2(\beta x_2) - \eta_3(\beta a) \cdot \eta_4(\beta x_2)] \\ V_2(x_2) &= \frac{P}{4} [\eta_1(\beta a) \cdot \eta_3(\beta x_2) + \eta_3(\beta a) \cdot \eta_1(\beta x_2)] \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

2. 确定待定积分常数 C'_1 、 C'_2

由于图 2-3 梁 B 端的支承情况与 A 端完全相同，故有