

高等数学解读

编著：李绍宽

东华大学出版社

013/428

2007

高等数学解读

编著 李绍宽



东华大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解读/李绍宽编著. —上海: 东华大学出版社, 2007

ISBN 978-7-81111-147-7

I. 高… II. 李… III. 高等数学—高等学校—
教学参考资料 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 124398 号

责任编辑 刘红梅

封面设计 林峰平面设计

高等数学解读

李绍宽 编著

东华大学出版社出版
新华书店上海发行所发行

上海市延安西路 1882 号
江苏省句容市排印厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 12.25 字数: 401 千字

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1~3000 册

ISBN 978-7-81111-147-7/O·002

定价: 25.00 元

前 言

如何学好高等数学是工科大学新生所面临的重要课题。高等数学上下两册厚厚两本书,内容丰富,包含了一元微积分、多元微积分等内容,这些内容远远超过在中学六年中学习的数学内容,要在短短一年中学好和掌握这些数学知识,的确是一个艰巨的任务。我们这本“高等数学解读”的目的就是帮助大学新生克服在学习高等数学过程中遇到的各种困难,学好高等数学。

本书按同济大学主编的“高等数学”(上、下)内容,按章进行解读。其中包括每一章节的内容的总结、解决问题的方法、思路以及主要习题的解答。另外,我们补充了一些习题的解答,而这些习题更具有代表性。通过这些例题,可以帮助同学们掌握解题的方法,克服在解题过程中遇到的困难。当然,数学题目是千变万化的。解题的方法和思路也是多种多样的,更需要同学们在学习的过程中自己去总结和领会。我们只能给出作者自己的体会,相信这些内容对同学们提高解题能力,掌握解题方法是有帮助的,但肯定不可能是面面俱到的万能钥匙。

由于水平有限,编写过程中肯定存在许多不足之处,也存在许多错误之处。希望读者能够指正,提出更好的意见,使本书能不断完善,共同为提高高等数学的教学水平而努力。

编 者

2007年6月



目 录

预备知识	1
第一节 集合	1
一、集合的定义	1
二、集合的运算	1
三、区间与邻域	2
四、问题与例题	3
第二节 映射	4
一、映射的定义及其运算	4
二、关系	5
三、问题与例题	5
第三节 一元函数	6
一、概念	6
二、函数的初等性质	7
三、函数的运算	7
四、初等函数	8
五、问题与例题	8
第一章 极限与连续	14
第一节 数列的极限	14
一、数列极限的定义	14
二、重要极限	14
三、极限的性质	14
四、问题与例题	15
第二节 函数极限	17
一、函数极限的概念	17
二、重要极限	18
三、极限的性质	18
四、极限的运算法则	19



五、问题与例题	19
第三节 两个准则与两个重要极限	23
一、数列极限中的两个重要准则	23
二、两个重要极限	23
三、问题与例题	25
第四节 无穷小量与无穷大量	28
一、无穷小量与无穷大量的定义	28
二、无穷小量与无穷大量的性质	29
三、无穷小量与无穷大量的比较	29
四、等价无穷小公式	30
五、问题与例题	30
第五节 函数的连续性	32
一、连续性定义	32
二、连续函数的运算性质	33
三、闭区间上连续函数	34
四、问题与例题	34
第六节 综合问题	38
一、渐近线	38
二、数列极限的问题	39
三、关于函数极限问题	44
四、关于连续的问题	45
第二章 一元函数微分学	48
第一节 导数的概念	48
一、导数的定义和意义	48
二、可导与连续的关系	48
三、定义用处的问题与例题	49
第二节 导数的计算	53
一、函数的求导问题	53
二、求导的例题	54
三、导数的应用	56
第三节 高阶导数	59
一、定义	59
二、低阶导数的计算——一阶一阶求	59



三、 n 阶导数 $y^{(n)}$ 的计算	61
四、求 $y^{(n)}(x_0)$ 的方法	62
第四节 微分	64
一、微分的定义	64
二、微分公式与法则	64
三、微分的意义	64
四、微分的计算与应用问题	65
第五节 微分中值定理	67
一、中值定理的基本内容	67
二、中值定理的推广形式	68
三、中值定理的作用与问题	68
第六节 泰勒公式	76
一、泰勒公式	76
二、泰勒公式的用处与例题	77
第七节 洛必大法则	81
一、洛必大法则	81
二、用洛必大法则求极限的例子	82
三、从洛必大法则导出的几个重要极限	83
四、用洛必大法则的其它问题	84
第八节 函数性质的讨论	85
一、函数的单调性问题	85
二、曲线的凹凸与拐点问题	91
三、关于函数极值的应用问题和其它相关例题	94
四、曲线的曲率	97
第三章 一元函数的积分学	99
第一节 原函数与不定积分	99
一、原函数与不定积分的概念	99
二、与不定积分有关的例题	99
第二节 不定积分的计算	100
一、不定积分的计算公式	100
二、积分方法	102
三、有理函数的不定积分	110
第三节 定积分的概念	114



一、定义	114
二、定积分的性质	115
三、微积分基本定理	116
四、问题与例题	116
第四节 定积分的计算	122
一、定积分的依据	122
二、定积分中的特殊问题	125
三、关于积分中值定理	133
第五节 定积分的应用	134
一、元素法	134
二、几何应用	135
三、定积分的物理应用	142
四、定积分的平均值意义	144
第六节 反常积分(广义积分)	146
一、无穷限的反常积分	146
二、无界函数的反常积分	148
第四章 微分方程	150
第一节 微分方程的基本概念	150
一、基本概念	150
二、关于微分方程概念的问题	150
第二节 一阶微分方程	152
一、可分离变量的微分方程	152
二、齐次方程	153
三、线性微分方程	157
四、一阶微分方程的一般解法——凑全微分方法	159
第三节 可降阶的二阶微分方程	161
一、 $y''=f(x)$ 型的微分方程	161
二、 $F(x, y', y'')=0$ 型的微分方程	161
三、 $F(y, y', y'')=0$ 型的微分方程	162
四、可降阶微分方程的参数方程解法	164
第四节 高阶线性微分方程	164
一、高阶线性微分方程的概念	164
二、常系数线性微分方程的求解	166



三、欧拉方程	170
第五节 微分方程应用问题	171
一、几何问题	171
二、力学问题	173
三、溶度问题	174
第五章 向量代数与空间解析几何	176
第一节 向量代数	176
一、点,向量,坐标	176
二、向量的运算	177
三、有关向量代数的问题	179
第二节 平面与直线	183
一、平面的决定方法和平面方程	183
二、有关平面的问题	184
三、直线的决定方法和直线方程	185
四、与直线有关的问题	186
五、平面,直线的例题与问题	187
第三节 曲面与曲线	192
一、曲面方程的建立	192
二、二次曲面的分类	196
三、曲线方程	197
四、曲面束——曲线在坐标面上的投影	198
第六章 多元函数微分学	200
第一节 多元函数的基本概念	200
第二节 多元函数的极限与连续性	202
一、多元函数的极限	202
二、多元函数的连续性	203
三、多元函数的极限的计算	203
第三节 多元函数的偏导数	205
一、多元函数偏导数的讨论	205
二、偏导数的计算	207
第四节 全微分	214
一、全微分的定义	214
二、全微分的计算	215



三、可微性的讨论	216
四、全微分的应用	218
第五节 方向导数与梯度	219
一、方向导数的定义	219
二、梯度	220
三、有势场与梯度场	220
第六节 多元函数微分学的应用	222
一、空间曲线的切线与法平面	222
二、曲面的切平面与法线	224
三、多元函数的极值	232
第七章 重积分	241
第一节 重积分的定义与性质	241
一、重积分的定义	241
二、重积分的性质	242
第二节 二重积分的计算	246
一、利用直角坐标	246
二、利用极坐标	249
三、二重积分的坐标变换	250
四、关于二次积分问题	253
五、利用二重积分解决定积分问题	257
第三节 三重积分的计算	260
一、直角坐标与柱面坐标	260
二、球面坐标	262
三、三重积分的变换代换	265
四、关于三重累次积分	268
第四节 重积分的应用	271
一、曲面面积的计算	271
二、平面区域与立体区域物理量的计算	275
第八章 曲线积分与曲面积分	284
第一节 对弧长与面积的曲线积分与曲面积分(第一类曲线积分与曲面积分)	284
一、第一类曲线积分的定义	284
二、第一类曲面积分的定义	285



三、第一类曲线积分的计算	286
四、第一类曲面积分的计算	290
第二节 向量值函数对坐标元的曲线积分与曲面积分(第二类曲线 积分与曲面积分)	293
一、向量值函数对坐标元的曲线积分(第二类曲线积分)的 背景、定义	293
二、第二类曲线积分的计算	294
三、Green 公式及其应用	299
四、第二类曲面积分的背景与定义	309
五、第二类曲面积分的计算	310
六、高斯公式	313
七、场论初步	319
第九章 无穷级数	327
第一节 数项级数	327
一、无穷级数的性质	327
二、正项级数判别法	331
三、一般级数的绝对收敛与条件收敛	337
第二节 幂级数	341
一、幂级数的收敛域	342
二、幂级数的运算与性质	344
三、函数的泰勒级数	349
第三节 傅里叶级数	357
一、内积与三角正交系	357
二、傅里叶级数	360
三、傅里叶系的性质, 正弦级数与余弦级数	365
四、一般周期函数的傅里叶级数	369
五、傅里叶级数的应用	374



预备知识

第一节 集合

一、集合的定义

集合——一些特定对象的总体,组成集合的对象称为属于这个集合的元素.集合通常用大写英文字母表示.

重要的数集:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ——自然数集.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ——整数集.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{q}{p} \mid p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{Z} \right\}$ ——有理数集.

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ ——实数集.

$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ ——复数集.

\emptyset ——空集——不含任何元素.

元素与集合的关系:

元素 a 是属于集合 A 的元素,记为 $a \in A$. a 不是集合 A 的元素,记为 $a \notin A$.

集合与集合的关系:

若集合 A 的每一个元素都属于集合 B ,即 $a \in A$,必有 $a \in B$,我们称 A 是 B 的子集,记为 $A \subset B$.若 $A \subset B$,且 $B \subset A$,称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

证明两个集合相等.就要从 $a \in A$ 推出 $a \in B$,且从 $b \in B$ 推出 $b \in A$.

若集合中元素个数是有限的,称为有限集.若元素个数不是有限个,称为无限集,其中若集合中元素能排列成一个序列的,称为可列集.例如 \mathbb{N} 、 \mathbb{Z} 、 \mathbb{Q} 都是可列集,而 n 次方程的根的全体是一个有限集.

二、集合的运算

并集: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

交集: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

差集: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$



余集: $A^c = \{x | x \notin A\}$

直积: $A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$

运算的性质:

交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$

结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$

分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$

对偶律: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$

由于有结合律,我们可定义

$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \{x | \exists \alpha, x \in A_{\alpha}\}$ ($\exists \alpha$, 指有一个 α)

$\bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \{x | \forall \alpha, x \in A_{\alpha}\}$ ($\forall \alpha$, 指对一切 α)

同样有对偶律

$(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha})^c = \bigcap_{\alpha} A_{\alpha}^c, (\bigcap_{\alpha} A_{\alpha})^c = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}^c.$

三、区间与邻域

高等数学中,主要在实数范围内研究问题,当然偶而也借助复数来帮助解决问题.关于实数有下面几个重要的性质.

(1) $M \subset \mathbb{R}$ 称为有上界,指存在 $c \in \mathbb{R}$,对一切 $x \in M, x \leq c$,则 c 称为 M 的上界.这时, M 一定有一个最小的上界,称为 M 的上确界,记为 $\sup M$.

同样若存在 $c \in \mathbb{R}$,对一切 $x \in M, x \geq c$,称 c 为 M 的下界, M 的最大的下界称为 M 的下确界,记为 $\inf M$.

若 M 没有上界,称为 M 为上无界,这时 $\sup M = +\infty$,若 M 无下界,称 M 为下无界,这时 $\inf M = -\infty$.

(2) 在 \mathbb{R} 中稠密,即对任何实数 $a < b$,必存在有理数 $r \in \mathbb{Q}, a < r < b$.

(3) 对任何正数 $\epsilon > 0$,

$\sup\{n\epsilon | n \in \mathbb{Z}\} = +\infty, \inf\{n\epsilon | n \in \mathbb{Z}\} = -\infty.$

对实数集,有下面常用的子集:

闭区间: $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$

开区间: $(a, b) = \{x | a < x < b\}.$

注意: $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$ 也称闭区间;

$(a, +\infty) = \{x | x > a\}$ 也称开区间.

$\bigcup (a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\} (\delta > 0)$ 称为 a 的 δ -邻域,它是一个开区间 $(a - \delta, a + \delta)$.



$\dot{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$ 称为 a 的 δ -空心邻域.

有时把 $(M, +\infty)$ ($M > 0$) 称为 $+\infty$ 的 M -邻域.

$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ ($M > 0$) 称为 ∞ 的 M -邻域.

四、问题与例题

1. 证明两个集合相等

【例 1】 证明 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

证 设 $x \in (A \cup B)^c$, 则 $x \notin A \cup B$, 即 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 从而 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$.

故 $x \in A^c \cap B^c$.

若 $x \in A^c \cap B^c$, 即 $x \in A^c$ 且 $x \in B^c$, 故 $x \notin A$ 且 $x \notin B$, 故 $x \notin A \cup B$.

所以 $x \in (A \cup B)^c$. 即 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

同样可证 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

【例 2】 证明 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$.

证 设 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, 所以 $-\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$, 令 $n \rightarrow +\infty$, 从而 $0 \leq x \leq 1$, 即 $x \in [0, 1]$. 反之, $x \in [0, 1]$, $0 \leq x \leq 1$, 所以 $-\frac{1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}$.

所以 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$, 从而 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) = [0, 1]$.

【例 3】 已知 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$. 证明 $A_1 = \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \setminus A_{k+1})\right] \cup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

证 右 \subset 左是显然的. 若 $x \in A_1$, $x \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, 则存在 $k_0 \geq 1$, $x \in A_{k_0}$, 而 $x \notin A_{k_0+1}$.

故 $x \in A_{k_0} \setminus A_{k_0+1}$, 因此可知左 \subset 右, 即证.

2. 讨论有限集与可列集的问题

【例 4】 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为可列集, 证明 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 也为可列集.

证 设 $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots\}$

$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots\}$

$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots\}$

\vdots



从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \dots\}$

也为可列集.

【例5】 A 中有 n 个元素, $p(A)$ 表示 A 的所有子集的全体构成的集合, 求 $p(A)$ 中有多少个元素.

● A 的子集中可能有 $0, 1, 2, \dots, n$ 个不同元素, 而有 k 个元素的子集的个数有 C_n^k 个, 从而 $p(A)$ 中有

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$$

个元素.

【例6】 A 是一个无限集, 证明存在可列集 $A_0 \subset A$.

● A 为无限集, 从而 $A \neq \emptyset$, 存在 $a_1 \in A$.

但 $A \neq \{a_1\}$, 从而 $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$, 存在 $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.

...

若存在 $a_1, \dots, a_n \in A$, 则 $A \neq \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 故存在

$$a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

由归纳法可知存在 $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$, 即 $A_0 = \{a_1, a_2, \dots\}$ 为可列集.

而 $A_0 \subset A$.

第二节 映 射

一、映射的定义及其运算

1. 映射的定义

A, B 为两个非空集合, φ 为一个规则, 对每个元素 $x \in A$, 按规则 φ , 存在唯一的元素 $y \in B$ 与之相对应, 则称 φ 为 A 到 B 的一个映射, 记 $y = \varphi(x)$: $A \rightarrow B$.

设 φ 是 A 到 B 的一个映射, $x \in A$, 称 $y = \varphi(x)$ 为 x 的象, 而 x 称为 y 在映象 φ 下的原象, A 称为 φ 的定义域, 而 $\{\varphi(x) \mid x \in A\}$ 称为 φ 的值域, 记为 $\varphi(A) \subset B$.

若 $\varphi(A) = B$, 称 φ 为 A 到 B 上的一个满射. 若 $x_1 \neq x_2 \in A$, 有 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, 称 φ 为 A 到 B 的一个单射. 而若 φ 既是满射, 又是单射, 则称 φ 为 A 到 B 上的一个双射(也称为一一映射).

若存在 A 到 B 上的一一映射, 称 A 与 B 等势, 记 $\bar{A} = \bar{B}$. 显然 A 是可列集



的条件是 $\bar{A} = \bar{B}$, 而 A, B 为有限集时, $\bar{A} = \bar{B}$ 的条件为 A 与 B 中含有相同个数的元素.

2. 映射的运算

复合映射: 若 φ 为 $A \rightarrow B$, $\psi: B \rightarrow C, x \in A, \psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x))$ 为 A 到 C 的映射, 称为 φ 与 ψ 的复合映射.

逆映射: 若 φ 为 A 到 B 上一一映射, 对 $y \in B$, 存在唯一 $x \in A, y = \varphi(x)$.

这样对 $y \in B \rightarrow x \in A, \varphi(x) = y$, 称这个映射为 φ 的逆映射, 记为 $\varphi^{-1}: y \in B \rightarrow x \in A$.

显然, 这时, φ^{-1} 为 B 到 A 上的一一映射, 且

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = id_B, \quad \varphi^{-1} \circ \varphi = id_A.$$

这里 $id_A: A \rightarrow A$ 的恒等映射.

若 φ 为 A 到 B 上的一一映射, ψ 为 B 到 C 上的一一映射, 则 $\psi \circ \varphi$ 为 A 到 C 上的一一映射.

二、关系

若 φ 是 A 到 B 的映射,

$$G(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in A\}$$

称为 φ 的图象, 显然 $G(\varphi) \subset A \times B$.

A 到 B 的关系 $R \subset A \times B, x \in A, y \in B$, 若 $(x, y) \in R$, 称 x 与 y 有关系, 记 xRy .

关系是映射的推广, 它也有两种运算:

逆关系: R 为 A 到 B 的关系, R^{-1} 为 B 到 A 的关系:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

复合关系: R_1 为 A 到 B 的关系, R_2 为 B 到 C 的关系, $R_2 \circ R_1$ 为 A 到 C 的关系:

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid \exists y \in B, (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\}.$$

三、问题与例题

1. 关于映射与势的问题

【例 1】构造一个 \mathbb{Z} 到 \mathbb{N} 上的一一映射.

● $\varphi(0) = 0, \varphi(-n) = 2n, n = 1, 2, \dots, \varphi(n) = 2n-1, n = 1, 2, \dots$

【例 2】构造一个 $(0, 1)$ 到 $(0, 1]$ 上的一一映射.

● $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}, \dots, \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n-1}, \dots,$



$$\varphi(x) = x, x \neq \frac{1}{n} (n = 2, 3, 4, \dots).$$

【例3】证明 $(0, 1)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 等势.

● $\varphi(x) = \tan \pi \left(x - \frac{1}{2}\right)$ 为 $(0, 1)$ 到 $(-\infty, +\infty)$ 上一一映射.

从而 $(0, 1)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 等势.

【例4】 A 为无限集, B 为可列集, $A \cap B = \emptyset$. 证明 $A \cup B$ 与 A 等势.

● 设 $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. 由于 A 为无限集, 则存在 $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset A$.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{2n}, & x = b_n, n = 1, 2, \dots \\ a_{2n-1}, & x = a_n, n = 1, 2, \dots \\ x, & x \in A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots\} \end{cases}$$

则 φ 为 $A \cup B$ 到 A 上的一一映射, 从而 $A \cup B$ 与 A 等势.

2. 关于映射和关系的问题

【例5】 A 到 A 的关系 R 称为等价关系, 若满足

$$(1) x \in A, xRx; \quad (2) x, y \in A, xRy \rightarrow yRx;$$

$$(3) x, y, z \in A, xRy, yRz \rightarrow xRz.$$

证明 $[x] = \{y | yRx\}$ 成立; $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ 时, $[x] = [y]$.

● 由 $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, 从而存在 $z \in [x] \cap [y]$, 因此 zRx, zRy . 由 (2),

(3) 可知 xRz, zRy , 从而 xRy .

$u \in [x]$ 当且仅当 uRx, xRy , 从而 uRy , 即 $u \in [y]$, 故 $[x] = [y]$.

【例6】证明 A 到 B 关系 R 是 $A \rightarrow B$ 的映射 φ 的图象, 当且仅当

$$\text{Proj}_A R = \{x | \exists y \in B, (x, y) \in R\} = A.$$

且对一切 $x \in A$,

$$R_x = \{y | (x, y) \in R\}$$

为单点集.

● 必要性是显然的. 充分性, $x \in R$, 定义 $\varphi(x) = y, R_x = \{y\}$, 则 $G(\varphi) = R$.

第三节 一元函数

一、概念

$D \subset \mathbb{R}$ 到 \mathbb{R} 的映射 f 称为一元函数, D 称为 f 的定义域, 记为 $y = f(x)$,