高等数学解读

编著：李绍宽

東華大學出版社

高等数学解读

编著　李绍宽

東華大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解读/李绍宽编著. —上海：东华大学出版社，2007

ISBN 978-7-81111-147-7

Ⅰ.高…　Ⅱ.李…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 124398 号

责任编辑　刘红梅

封面设计　林峰平面设计

高等数学解读　　李绍宽　编著

东华大学出版社出版　　上海市延安西路 1882 号

新华书店上海发行所发行　　江苏省句容市排印厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：12.25　字数：401 千字

2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月第 1 次印刷

印数：1～3000 册

ISBN 978-7-81111-147-7/O・002　　定价：25.00 元

前　　言

如何学好高等数学是工科大学新生所面临的重要课题。高等数学上下两册厚厚两本书，内容丰富，包含了一元微积分、多元微积分等内容，这些内容远远超过在中学六年中学习的数学内容，要在短短一年中学好和掌握这些数学知识，的确是一个艰巨的任务。我们这本“高等数学解读”的目的就是帮助大学新生克服在学习高等数学过程中遇到的各种困难，学好高等数学。

本书按同济大学主编的“高等数学”(上、下)内容，按章进行解读。其中包括每一章节的内容的总结、解决问题的方法、思路以及主要习题的解答。另外，我们补充了一些习题的解答，而这些习题更具有代表性。通过这些例题，可以帮助同学们掌握解题的方法，克服在解题过程中遇到的困难。当然，数学题目是千变万化的。解题的方法和思路也是多种多样的，更需要同学们在学习的过程中自己去总结和领会。我们只能给出作者自己的体会，相信这些内容对同学们提高解题能力，掌握解题方法是有帮助的，但肯定不可能是面面俱到的万能钥匙。

由于水平有限，编写过程中肯定存在许多不足之处，也存在许多错误之处。希望读者能够指正，提出更好的意见，使本书能不断完善，共同为提高高等数学的教学水平而努力。

编　者

2007 年 6 月

目　录

预 备 知 识

第一节 集 合

一、集合的定义

集合——一些特定对象的总体,组成集合的对象称为属于这个集合的元素.集合通常用大写英文字母表示.

重要的数集:

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$——自然数集.

$\mathbb{Z}=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$——整数集.

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{q}{p}\middle| p\in\mathbb{N}\backslash\{0\},q\in\mathbb{Z}\right\}$——有理数集.

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$——实数集.

$\mathbb{C}=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{R},i^2=-1\}$——复数集.

$\varnothing$——空集——不含任何元素.

元素与集合的关系:

元素 a 是属于集合 A 的元素,记为 $a\in A$. a 不是集合 A 的元素,记为 $a\overline{\in}A$.

集合与集合的关系:

若集合 A 的每一个元素都属于集合 B,即 $a\in A$,必有 $a\in B$,我们称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$. 若 $A\subset B$,且 $B\subset A$,称 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

证明两个集合相等.就要从 $a\in A$ 推出 $a\in B$,且从 $b\in B$ 推出 $b\in A$.

若集合中元素个数是有限的,称为有限集.若元素个数不是有限个,称为无限集,其中若集合中元素能排列成一个序列的,称为可列集.例如 $\mathbb{N}$、$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$ 都是可列集,而 n 次方程的根的全体是一个有限集.

二、集合的运算

并集:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

交集:$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

差集:$A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\overline{\in}B\}$

余集：$A^c=\{x\,|\,x\overline{\in}A\}$

直积：$A\times B=\{(x,\ y)\,|\,x\in A,\ y\in B\}$

运算的性质：

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

对偶律：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

由于有结合律，我们可定义

$\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha=\{x\,|\,\exists\alpha,\ x\in A_\alpha\}$ （$\exists\alpha$，指有一个 α）

$\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha=\{x\,|\,\forall\alpha,\ x\in A_\alpha\}$ （$\forall\alpha$，指对一切 α）

同样有对偶律

$(\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha)^c=\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha^c$，　$(\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha)^c=\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha^c$.

三、区间与邻域

高等数学中，主要在实数范围内研究问题，当然偶而也借助复数来帮助解决问题. 关于实数有下面几个重要的性质.

(1) $M\subset\mathbb{R}$ 称为有上界，指存在 $c\in\mathbb{R}$，对一切 $x\in M$，$x\leqslant c$，则 c 称为 M 的上界. 这时，M 一定有一个最小的上界，称为 M 的上确界，记为 $\sup M$.

同样若存在 $c\in\mathbb{R}$，对一切 $x\in M$，$x\geqslant c$，称 c 为 M 的下界，M 的最大的下界称为 M 的下确界，记为 $\inf M$.

若 M 没有上界，称为 M 为上无界，这时 $\sup M=+\infty$，若 M 无下界，称 M 为下无界，这时 $\inf M=-\infty$.

(2) 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，即对任何实数 $a<b$，必存在有理数 $r\in\mathbb{Q}$，$a<r<b$.

(3) 对任何正数 $\varepsilon>0$，

$\sup\{n\varepsilon\,|\,n\in\mathbb{Z}\}=+\infty$，　$\inf\{n\varepsilon\,|\,n\in\mathbb{Z}\}=-\infty$.

对实数集，有下面常用的子集：

闭区间：$[a,\ b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$.

开区间：$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}$.

注意：$[a,\ +\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$ 也称闭区间；

　　　$(a,\ +\infty)=\{x\,|\,x>a\}$ 也称开区间.

$\bigcup(a,\ \delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}(\delta>0)$ 称为 a 的 δ-邻域，它是一个开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$.

$\overset{\circ}{U}(a,\ \delta)=U(a,\ \delta)\backslash\{a\}$ 称为 a 的 δ-空心邻域.

有时把$(M,\ +\infty)(M>0)$ 称为 $+\infty$ 的 M-邻域.

$(-\infty,\ -M)\cup(M,\ +\infty)(M>0)$ 称为 ∞ 的 M-邻域.

四、问题与例题

1. 证明两个集合相等

【例 1】 证明$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

证 设 $x\in(A\cup B)^c$,则 $x\overline{\in}A\cup B$,即 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$,从而 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$.

故 $x\in A^c\cap B^c$.

若 $x\in A^c\cap B^c$,即 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$,故 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$,故 $x\overline{\in}A\cup B$.

所以 $x\in(A\cup B)^c$. 即$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$.

同样可证$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

【例 2】 证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n}\right)=[0,\ 1]$.

证 设 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n}\right)$,所以 $-\dfrac{1}{n}<x<1+\dfrac{1}{n}$,令 $n\to+\infty$,从而 $0\leqslant x\leqslant 1$,即 $x\in[0,\ 1]$. 反之,$x\in[0,\ 1]$，$0\leqslant x\leqslant 1$,所以 $-\dfrac{1}{n}<x<1+\dfrac{1}{n}$.

所以 $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n}\right)$,从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n}\right)=[0,\ 1]$.

【例 3】 已知 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots$. 证明 $A_1=\left[\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(A_k\backslash A_{k+1})\right]\cup\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k\right)$.

证 右 $\subset$ 左是显然的. 若 $x\in A_1$，$x\overline{\in}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$,则存在 $k_0\geqslant 1$，$x\in A_{k_0}$，而 $x\overline{\in}A_{k_0+1}$.

故 $x\in A_{k_0}\backslash A_{k_0+1}$,因此可知左 $\subset$ 右,即证.

2. 讨论有限集与可列集的问题

【例 4】 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$ 为可列集,证明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也为可列集.

证 设 $A_1=\{a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots\}$

$A_2=\{a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots\}$

$A_3=\{a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \cdots\}$

$\vdots$

从而 $$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\}$$

也为可列集.

【例 5】A 中有 n 个元素，$p(A)$ 表示 A 的所有子集的全体构成的集合，求 $p(A)$ 中有多少个元素.

解 A 的子集中可能有 $0, 1, 2, \cdots, n$ 个不同元素，而有 k 个元素的子集的个数有 C_n^k 个，从而 $p(A)$ 中有

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

个元素.

【例 6】A 是一个无限集，证明存在可列集 $A_0 \subset A$.

证 A 为无限集，从而 $A \neq \varnothing$，存在 $a_1 \in A$.

但 $A \neq \{a_1\}$，从而 $A \backslash \{a_1\} \neq \varnothing$，存在 $a_2 \in A \backslash \{a_1\}$.

…

若存在 $a_1, \cdots, a_n \in A$，则 $A \neq \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，故存在

$$a_{n+1} \in A \backslash \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

由归纳法可知存在 $a_1, a_2, a_3, \cdots \in A$，即 $A_0 = \{a_1, a_2, \cdots\}$ 为可列集.

而 $A_0 \subset A$.

第二节 映　射

一、映射的定义及其运算

1. 映射的定义

A, B 为两个非空集合，φ 为一个规则，对每个元素 $x \in A$，按规则 φ，存在唯一的元素 $y \in B$ 与之相对应，则称 φ 为 A 到 B 的一个映射，记 $y = \varphi(x)$: $A \to B$.

设 φ 是 A 到 B 的一个映射，$x \in A$，称 $y = \varphi(x)$ 为 x 的象，而 x 称为 y 在映象 φ 下的原象，A 称为 φ 的定义域，而 $\{\varphi(x) \mid x \in A\}$ 称为 φ 的值域，记为 $\varphi(A) \subset B$.

若 $\varphi(A) = B$，称 φ 为 A 到 B 上的一个满射. 若 $x_1 \neq x_2 \in A$，有 $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$，称 φ 为 A 到 B 的一个单射. 而若 φ 既是满射，又是单射，则称 φ 为 A 到 B 上的一个双射（也称为一一映射）.

若存在 A 到 B 上的一一映射，称 A 与 B 等势，记 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$. 显然 A 是可列集

的条件是$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathbb{N}}}$，而$A$，$B$为有限集时，$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$的条件为$A$与$B$中含有相同个数的元素.

2. 映射的运算

复合映射：若φ为$A\to B$，ψ: $B\to C$，$x\in A$，$\psi\circ\varphi(x)=\psi(\varphi(x))$为$A$到$C$的映射，称为$\varphi$与$\psi$的复合映射.

逆映射：若φ为A到B上一一映射，对$y\in B$，存在唯一$x\in A$，$y=\varphi(x)$.

这样对$y\in B\to x\in A$，$\varphi(x)=y$，称这个映射为φ的逆映射，记为φ^{-1}：$y\in B\to x\in A$.

显然，这时，φ^{-1}为B到A上的一一映射，且

$$\varphi\circ\varphi^{-1}=id_B,\quad \varphi^{-1}\circ\varphi=id_A.$$

这里id_A：$A\to A$的恒等映射.

若φ为A到B上的一一映射，ψ为B到C上的一一映射，则$\psi\circ\varphi$为A到C上的一一映射.

二、关系

若φ是A到B的映射，

$$G(\varphi)=\{(x,\ \varphi(x))\mid x\in A\}$$

称为φ的图象，显然$G(\varphi)\subset A\times B$.

A到B的关系$R\subset A\times B$，$x\in A$，$y\in B$，若$(x,\ y)\in R$，称x与y有关系，记xRy.

关系是映射的推广，它也有两种运算：

逆关系：R为A到B的关系，R^{-1}为B到A的关系：

$$R^{-1}=\{(y,\ x)\mid (x,\ y)\in R\}.$$

复合关系：R_1为A到B的关系，R_2为B到C的关系，$R_2\circ R_1$为A到C的关系：

$$R_2\circ R_1=\{(x,\ z)\mid \exists\, y\in B,\ (x,\ y)\in R_1,\ (y,\ z)\in R_2\}.$$

三、问题与例题

1. 关于映射与势的问题

【例1】构造一个$\mathbb{Z}$到$\mathbb{N}$上的一一映射.

● $\varphi(0)=0$，$\varphi(-n)=2n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，$\varphi(n)=2n-1$，$n=1,\ 2,\ \cdots$

【例2】构造一个$(0,\ 1)$到$(0,\ 1]$上的一一映射.

● $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$\varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$，$\cdots$，$\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n-1}$，$\cdots$，

$\varphi(x)=x$, $x\neq\dfrac{1}{n}(n=2,3,4,\cdots)$.

【例 3】证明 $(0,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 等势.

$\varphi(x)=\tan\pi\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$ 为 $(0,1)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 上一一映射.

从而 $(0,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 等势.

【例 4】A 为无限集，B 为可列集，$A\cap B=\varnothing$. 证明 $A\cup B$ 与 A 等势.

设 $B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots\}$. 由于 A 为无限集，则存在 $\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}\subset A$.

$$\varphi(x)=\begin{cases}a_{2n}, & x=b_n,\ n=1,2,\cdots\\ a_{2n-1}, & x=a_n,\ n=1,2,\cdots\\ x, & x\in A\backslash\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}\end{cases}$$

则 φ 为 $A\cup B$ 到 A 上的一一映射，从而 $A\cup B$ 与 A 等势.

2. 关于映射和关系的问题

【例 5】A 到 A 的关系 R 称为等价关系，若满足

(1) $x\in A$, xRx;　　(2) $x,y\in A$, $xRy\to yRx$;

(3) $x,y,z\in A$, xRy, $yRz\to xRz$.

证明 $[x]=\{y\mid yRx\}$ 成立；$[x]\cap[y]\neq\varnothing$ 时，$[x]=[y]$.

由 $[x]\cap[y]\neq\varnothing$，从而存在 $z\in[x]\cap[y]$，因此 zRx, zRy. 由 (2), (3) 可知 xRz, zRy，从而 xRy.

$u\in[x]$ 当且仅当 uRx, xRy，从而 uRy，即 $u\in[y]$，故 $[x]=[y]$.

【例 6】证明 A 到 B 关系 R 是 $A\to B$ 的映射 φ 的图象，当且仅当

$$\mathrm{Proj}_A R=\{x\mid\exists\, y\in B,\ (x,y)\in R\}=A.$$

且对一切 $x\in A$,

$$R_x=\{y\mid(x,y)\in R\}$$

为单点集.

必要性是显然的. 充分性，$x\in R$，定义 $\varphi(x)=y$, $R_x=\{y\}$，则 $G(\varphi)=R$.

第三节　一元函数

一、概念

$D\subset\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射 f 称为一元函数，D 称为 f 的定义域，记为 $y=f(x)$,