大学数学基础教程

主审　韩旭里
主编　秦宣云

中南大学出版社

大学数学

基础教程

主审 韩旭里
主编 秦宣云
参编 李军英 刘碧玉 刘旺梅

中南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础教程/秦宣云主编.一长沙:中南大学出版社,
2007.11
ISBN 978-7-81105-601-3

Ⅰ.大...　Ⅱ.秦...　Ⅲ.高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第145282号

大学数学基础教程

主编　秦宣云

□责任编辑　刘　辉
□责任印制　文桂武
□出版发行　中南大学出版社
社址:长沙市麓山南路　　邮编:410083
发行科电话:0731-8876770　　传真:0731-8710482
□印　　装　长沙利君漾印刷厂

□开　　本　787×1092　1/16　□印张　27　□字数　675千字
□版　　次　2007年11月第1版　□2007年11月第1次印刷
□书　　号　ISBN 978-7-81105-601-3
□定　　价　48.00元

前　言

20 世纪末，现代通信技术和多媒体技术的应用揭开了现代远程教育发展的序幕，现代远程教育具有前所未有的适合性和灵活性，成为世界各国政府实现终身教育的第一选择，也成为信息技术改造传统教育的典范，正引领各国对教育领域进行全面变革。

我国实施现代远程教育试点工作以来，各试点高校对远程教育理念、教学管理模式、教育技术手段、教学资源制作、教材建设等方面进行了一系列有益的探讨与实践。现代远程教育以继续教育为宗旨，大量的研究和工作实践表明：继续教育学习与传统全日制学习相比，有不同的策略和取向。主要表现在成人学习是一个在环境分析的基础上、针对自身实际的选择性的学习过程，体现出自我导向式的学习特征。成人在学习内容的选择、学习方法的运用上主要是根据个人的自主判断，并依据环境的变化进行重新调整。这也是终身学习最基本的特征。

关注对实际工作的帮助、对学习内容的兴趣以及分析问题和解决问题能力的提高等，强调学习内容与个体自我经验的整合，注重不断改进认知策略即学会学习，喜欢合作、交往式的学习，等等，这些都是现代远程教育教材编写的思路。

随着数学的理论和方法越来越广泛地应用到自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，社会对各专业人才的数学素养要求越来越高。这门课程的思想和方法不仅提供了解决实际问题的有力数学工具，而且还给学生提供了一种思维方法，帮助学生提高实际应用中所必需的数学素质和文化修养。

本课程内容广，各专业具体情况和安排不相同，特别是网络教育的专门要求，许多从事高等数学教学的教师和学习高等数学的学生都希望有一本重点突出、内容精要、讲述清晰、通俗易懂、深入浅出的教材。我们组织多年从事高等数学教学与研究的教师，精心编写了这本能适合少学时、多专业使用的《大学数学基础教程》，以供网络教育不同专业灵活选用。

在编写过程中，我们结合多年来在教学中积累起来的经验和体会，在以下方面进行了努力：一、在教学内容和体系结构上，将一元和多元函数的微分学及积分学作了相应的整合。与其他教材相比，在教学内容和体系结构上作了精心的取舍，既保证了教学内容和体系结构的连续性、严谨性，又突出了教学内容的精练。二、特别强调了数学在经济管理中的应用。针对教材内容，引进概念时力求自然，尽量从实际问题引出抽象的概念，使读者知道概念的实际背景。三、讲述概念力求语言准确、清楚。对一些重要定理或公式在证明的同时，尽量设法借助几何直观，使读者易于接受。四、例题和习题来源广泛，既有几何、物理方面的，也有医学、经济管理及日常生活方面的。书中所选例题力求形式多样、典型，一个例题有时能说明多方面的问题。在每章的后面配有一定量的习题，用以巩固和掌握基本理论和基本方法。

本书共 15 章，第 1 章到第 7 章内容为高等数学，第 8 章到第 11 章内容为线性代数，第 12 章到第 15 章内容为概率与统计。在教学过程中，教师可以根据教学大纲要求、学时多少

及学生基础等具体情况，对教材内容做必要的增补和删减。

参加本教材编写、资料整理的有秦宣云、李军英、刘碧玉、刘旺梅等，秦宣云负责统稿和定稿。中南大学网络学院范太华、陈峥滢主持工作，吴耀斌、朱颖、彭健俐等参与了该书从策划到成书的整个过程，数学科学与计算技术学院韩旭里教授审核了书稿，并提出了许多宝贵意见。

本书在编写过程中，参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的部分有关内容、例题和习题，在此谨向有关作者、编者一并表示谢意。

由于作者水平有限，书中难免有一些疏漏、不妥与错误之处，恳请专家、同行和读者不吝指正。

编　者

2007 年 10 月

目 录

第 1 章　函数初步

函数是研究经济学的重要工具，也是微积分学的主要研究对象. 函数的基本知识在中学数学中已有介绍，本章在此基础上进一步讨论函数的性质，并对常见的一些经济函数做出分析.

由于经济变量一般在实数范围内取值，故本书涉及的函数均在实数范围内讨论，此类函数也称为实函数.

如无特别说明，本书中全体实数的集合为 **R**，全体整数的集合为 **Z**，全体自然数的集合为 **N.**

称集合$(a, b)=\{x|a<x<b\}$为开区间，集合$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$为闭区间，$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}$和$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\}$为半开半闭区间. 以上区间都称为有限区间. 类似地，有

$$(a, +\infty)=\{x|a<x<+\infty\}$$
$$(-\infty, b)=\{x|-\infty<x<b\}$$
$$(-\infty, +\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$$

等等，称为无穷区间.

在今后的讨论中，有时需要考虑点 x_0 附近的所有点构成的集合，即开区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$，其中 δ 是一个正数，称其为点 x_0 的邻域. x_0 称为该邻域的中心，δ 称为半径. 称开区间$(x_0-\delta, x_0)$为点 x_0 的左邻域，$(x_0, x_0+\delta)$为点 x_0 的右邻域，$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$为点 x_0 的去心邻域(或空心邻域).

§1.1　函数的概念

1.1.1　函数的定义

在初等数学里，已经见过一些简单的函数：

线性函数：$y=kx+b$，二次函数 $y=ax^2+bx+c$，三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 等，其中 x，y 是两个变量，一般地，有如下函数概念.

定义 1.1.1　设 x，y 为两个变量，x 的取值范围为非空实数集 D，f 为一个对应规则. 若对于每一个 $x\in D$，都能由对应规则 f 惟一确定一个实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在实数集 D 上的一个函数. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域.

如果 $x_0\in D$，则称函数 f 在点 x_0 处有定义，否则称函数 f 在点 x_0 处无定义，如果实数集 $I\subset D$，称函数 f 在集合 I 上有定义，对于每个 $x_0\in D$，因变量 y 的对应取值 y_0 称为函数 f 在点 x_0 处的函数值，记为 $y_0=f(x_0)$，全体函数值所成的集合称为函数的值域，记为 Z，即

$$Z=\{y|y=f(x), x\in D\}$$

函数定义反映了现实世界中变量之间既互相联系又互相制约的本质，依此定义，要决定一个函数，最主要的要素是定义域 D 和函数关系 f. 只要几个函数的定义域与对应规则相同，均可认为是同一函数，如 $y=1+x^2$、$x=1+y^2$ 及 $s=1+t^2$ 均为同一函数；而 $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 不是同一函数，因为前者的定义域为 R，而后者定义域为 $x\neq0$.

由于在数学上通常通过函数值 $f(x)$ 的变化来研究函数 f 的性质，故习惯上也称 $f(x)$ 为 x 的函数，或 y 是 x 的函数.

下面再介绍几个函数的例子.

例 1.1.1 在 100 km 长的铁路线 AB 旁的 C 处有一工厂，与铁路的垂直距离为 20 km，由铁路 B 站向工厂提供原料，公路与铁路每吨千米的货物运价比为 5∶3. 为节约运费，在铁路的 D 处修一货物转运站. 设 AD 距离为 x km，沿 CD 修一公路，如图1－1所示. 试将每吨货物的总运费 y 表示成 x 的函数.

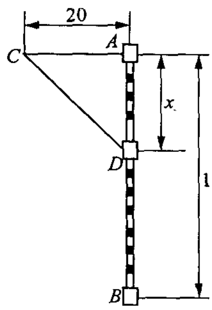


图 1－1

解 设公路上 km/t 货物运价为 a 元，那么铁路 km/t 的货物运价为 $\frac{3}{5}a$ 元，由图 1－1 可知

$$|CD|=\sqrt{x^2+400},$$

则有

$$y=\frac{3}{5}a(100-x)+a\sqrt{x^2+400}\quad(0\leqslant x\leqslant100)$$

例 1.1.2 在自由落体问题中，落体下落的距离 s 和时间 t 的对应规律是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，它的定义域是 $[0,T]$，其中 T 为落体着地的时刻，只有当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，下落距离 s 和时间 t 才有上述对应规律，否则没有意义.

例 1.1.3 $y=\arcsin(2+x^2)$

对任何实数 x，按给定的表达式都没有与之对应的 y 值. 因此该表达式不表示函数关系.

例 1.1.4 $x>y$

按这个规则，每个 x 值有无穷多个 y 值与之对应. 而函数定义中的对应规则要求每一个 x 值只有一个确定的 y 值与之对应. 因此，不符合函数定义，也不表示函数关系.

[注] 在函数关系定义中要求对每一个 $x\in D$，都有一个确定的 y 值与之对应. 但我们也常常遇到另一种关系，例如 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$，对于每一个 $x\in[-5,5]$，都有两个 y 值与之对应. 这就不符合前面的函数定义了，按定义应该说它不是一个函数关系. 但为了方便，我们把对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为多值函数. 那么，前面函数定义中的函数关系可称为单值函数. 如果不做声明，本书提到的函数均指单值函数. 对于多值函数 $y=\pm\sqrt{25-x^2}$，可以分成两个单值函数 $y=\sqrt{25-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{25-x^2}$.

1.1.2 函数的表示法

函数的表示法有解析法、表格法和图形法等.

1. 解析法

如果函数的对应规则由一个数学解析式表示，则称这种表示函数的方法为解析法(或公式法). 如前面的例 1.1.1 ~ 1.1.2 中的函数就是用解析法表示的函数.

2. 表格法

实际应用中，常把自变量的不同取值与对应的函数值列于一张表格中，对应规则由表格所确定，这种表示函数的方法称为表格法.

例 1.1.5　根据国家统计局公布的统计资料，我国 2000 ~ 2004 年国民生产总值(GDP)如表 1 - 1 所示.

表 1 - 1

年份 t(年)	2000	2001	2002	2003	2004
总产值 GDP(亿美元)	10 808	11 590	12 371	13 720	15 020

表 1 - 1 描述的是我国国民生产总值在 2000 ~ 2004 的这 5 年间的变化情况，对任何年份 $t \in \{2000, 2001, 2002, 2003, 2004\}$，按表 1 - 1 所示的对应规则能惟一地确定该年的国民生产总值，即 GDP 是年份 t 的函数.

统计部门的各种统计报表、银行利息表、还贷表、保险公司的收益表、保险合同的价值表等均可认为是表格法表示的函数，数学上的各种函数值表也是用表格法表示的函数.

3. 图示法

经济学上经常用图形直观地描述经济变量之间的函数关系，这种表示函数的方法称为图示法.

例 1.1.6　图 1 - 2 描述了某一生产线的生产效率 t 与生产线上工人数量 x 之间的关系.

对于给定的工人数量 x_0，由图 1 - 2 可得惟一确定的生产效率 t_0 与之对应，故生产效率 t 是工人数量 x 的函数，定义域为 $[0, X]$ 中的所有整数.

图示法使函数的变化直观，表格法便于求函数值，而解析法便于运算和分析，3 种函数的表示法各有千秋，常将它们结合使用.

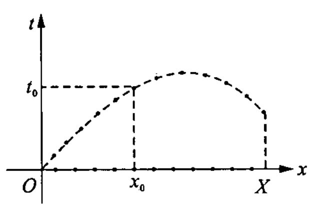


图 1 - 2

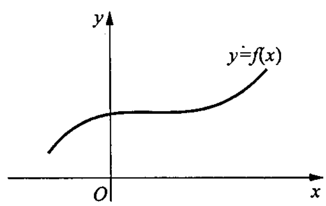


图 1 - 3

设有函数 $y = f(x)$ $(x \in D)$，对每个 $x \in D$，有惟一确定的函数值 $y(=f(x))$ 与之对应. 数对 (x, y) 就确定了平面直角坐标系中的一个点 $P(x, y)$，平面点集 $\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形(见图 1 - 3).

一次函数 $y = ax + b$ 的图形是一条直线，故一次函数也称为线性函数，它是最基本的经济函数类型之一.

1.1.3 函数的基本特性

1. 函数的奇偶性

定义 1.1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意的 $x\in D$，恒有

(1) $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数；

(2) $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

由定义可知，奇、偶函数的定义域 D 必定关于原点对称.

例 1.1.7 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$；

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\sin x$；

(3) $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$.

解 (1) 因为

$$f(-x)=\frac{1}{2}[2^{-x}+2^{-(-x)}]=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})=f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(2^x+2^{-x})$ 为偶函数.

(2) 因为
$$f(-x)=\frac{1}{(-x)^2+1}+\sin(-x)=\frac{1}{x^2+1}-\sin x,$$

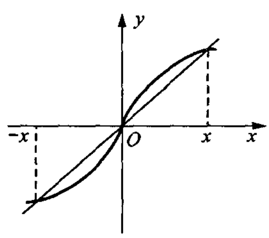
所以 $f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，故 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\sin x$ 为非奇非偶函数.

(3) 因为

$$\begin{aligned} f(-x)&=\lg[\sqrt{(-x)^2+1}-x]=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)\\ &=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\lg(\sqrt{x^2+1}+x)\\ &=-f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)$ 为奇函数.

奇函数的图形关于坐标原点对称[如图 1-4(a)所示]；偶函数的图形关于 y 轴对称[如图 1-4(b)所示].



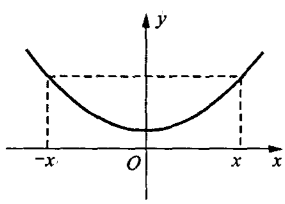


图 1-4