

上海市大学教材

微积分

上海人民教育出版社

上海市大学教材

微 积 分

《微积分》编写组

江苏工业学院图书馆
藏书章

上海人民出版社

上海市大学教材
微 积 分

《微积分》编写组

上海人民出版社出版

(上海绍兴路5号)

新华书店上海发行所发行 上海商务印刷厂印刷

开本 860×1166 1/32 印张 11 字数 270,000

1974年2月第1版 1974年2月第1次印刷

印数 1-30,000

统一书号: 13171·80 定价: 0.88 元

毛主席语录

教育必须为无产阶级政治服务，必须同生产劳动相结合。

教材要彻底改革，有的首先删繁就简。

出 版 说 明

这本《微积分》教材，内容包括函数和极限、一元函数微分学、一元函数积分学、多元函数、微分方程和优选法共六章，供工科院校数学教学时数较少的专业作教材，也可供理科院校部分专业使用。

本书中有些部分注有*号，可供删节。后三章内容基本上是相对独立的，这对使用这几章提供了更大的取舍或变更次序的余地。由于考虑到教材的通用性，我们没有选用专业典型课题，各专业在使用中可结合实际情况选编典型课题进行教学，更好地做到理论与实际相结合。

我们在编写中，虽然主观上力图在贯彻辩证唯物主义思想、理论联系实际、少而精和便于自学等方面作些努力，但限于水平，书中必定还存在不少缺点和错误，恳切地盼望广大工农兵学员、革命教师和其他读者提出批评和建议。

本书由上海化工学院、上海纺织工学院和有关工厂的部分同志编写。

《微积分》编写组

一九七三年八月

目 录

绪言	1
第一章 函数和极限	8
第一节 变量和函数	8
一、变量(8) 二、函数(9) 习题一(13) 三、初等函数(14)	
四、关于函数记号的说明(15) 习题二(17)	
第二节 建立函数关系式	17
习题三(23)	
第三节 极限和连续	24
一、极限(24) 二、连续(30) 三、极限运算例题(34) 习题四(37)	
第一章总习题	38
第二章 一元函数微分学	41
第一节 导数和微分	41
一、变化率问题(41) 二、导数的定义和微分的概念(46) 三、导数的几何意义(51) 四、指数函数 $y=e^x$ 的导数(52) 习题一(55)	
第二节 微分法	55
一、函数四则运算的求导法则(55) 二、反函数的求导法则(61)	
三、复合函数的求导法则(64) 四、微分的运算法则(67) 五、微分法基本公式(69) 六、利用导数解变化率问题(71) 七、高阶导数(75) 习题二(77)	
*第三节 微分法的补充	79
一、隐函数的微分法(79) 二、参变数函数的微分法(81) 三、二元函数及偏导数的概念(84) 习题三(87)	
第四节 微分学的应用	88
一、有限改变量定理、近似计算和误差估计(88) 二、最大值最小值问题(95) *三、方程近似解(切线法)(108) *四、曲率(111) 习题四(117)	
第二章总习题	118

第三章 一元函数积分学	121
第一节 定积分的概念	121
一、定积分问题举例(121) 二、定积分的定义(127) 三、微分和积分是矛盾的对立统一(128) 四、定积分的几何意义(130) 五、定积分的简单性质(133) 习题一(135)	
第二节 计算定积分的基本公式	136
一、从运动问题引出积分与微分的联系(137) 二、原函数概念(139) 三、定积分计算的基本公式(141) 四、不定积分的概念(144) 习题二(145)	
第三节 不定积分	146
一、基本积分公式(146) 二、不定积分的运算法则(148) 三、换元积分法(150) 四、分部积分法(159) 五、积分表的使用(163) 习题三(167)	
第四节 定积分的计算法	169
一、利用基本公式计算定积分(169) 二、定积分的换元法(172) 三、定积分的分部积分法(174) 四、近似积分法(176) 习题四(181)	
第五节 定积分的应用	182
一、平面图形的面积(183) 二、已知平行截面面积的立体体积(187) *三、曲线的弧长与旋转曲面的面积(192) 四、函数的平均值(197) 五、功(201) 习题五(205)	
第三章总习题	207
第四章 多元函数	211
第一节 曲面与方程	211
一、空间直角坐标系(211) 二、平面(215) 习题一(217) 三、几个二次曲面(217) 习题二(220)	
第二节 多元函数及其微分法	220
一、二元函数及其几何表示(220) 习题三(222) 二、多元函数微分法(223) 习题四(234)	
第三节 多元函数微分法的应用	235
一、近似计算和误差估计(235) 二、极值(239) 三、经验公式(最小二乘法)(243) 习题五(248)	
第四章总习题	249

第五章 微分方程	251
第一节 微分方程的一些概念	251
第二节 微分方程的解法	257
一、一阶方程(257) *二、二阶常系数线性微分方程(264) 习题一(276)	
第三节 微分方程的应用	278
一、建立微分方程举例(278) 二、应用举例(283) 习题二(293)	
第五章总习题	293
第六章 优选法	295
第一节 优选法的概念	295
一、什么是优选法(295) 二、优选问题的几何意义(297) 三、最佳试验点及其精确度的概念(300)	
第二节 单因素优选法	301
一、分数法(301) 二、0.618法(310) 三、对分法(318) 习题一(320)	
第三节 双因素优选法	320
一、从好点出发法(320) 二、平行线法(322) 三、梯度法(323) 习题二(326)	
第六章总习题	326
附录 习题答案	328

绪 言

一

恩格斯指出：“科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。”（《自然辩证法》）高等数学（其中主要的部分是微积分）和其他科学一样，也是在社会生产的推动下发展起来的。

在我国古代，由于长期生产劳动的实践，已经孕育着微积分思想的萌芽。如西汉刘歆在《西京杂记》中提到的“记里车”，东汉张衡制造的“浑天仪”，蜀汉诸葛亮使用并改进的“木牛流马”，都要设计制造圆形的物件，要求更精确的圆周率，从而产生了魏晋时刘徽提出的“割圆术”，他从圆内接正六边形做起，令边数成倍地增加，即从6而12，而24，而48，……而384，……而3072，用这个正3072边形面积来逼近圆面积，就得到 π 的更精确的值3.1416，“割之弥细，所失弥少；割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这就包含着微积分中“无限细分，无限求和”的思想方法。又如隋代建造的赵州桥（图0-1），这座跨度达37米的大石拱桥，系用一条条长方形条石砌成，一段段直的条石却砌成了一整条弧形曲线的拱圈，这就是微积分中“以直代曲”这个基本思想的生动



图 0-1

现实原型。

到十六、十七世纪，欧洲处于由封建社会向资本主义社会发展的时期，适应资本原始积累的需要，在残酷剥削劳动人民的基础上，生产力得到了很大的发展。机械在制造业和采矿中的使用、远洋航运的发展以及使用枪炮的战争活动，提出了许多迫切需要解决的科学技术课题，从而推动了力学、天文学和数学的发展。航海事业需要确定船只的方位，需要测定地球的经纬度和确定地球与其他星球之间的位置关系，它推动了对天体运动的深入研究；船舶的研制，必须探讨流体运动的规律；战争用枪炮射击弹丸，必须研究抛射体运动；机械、建筑、水利等方面也都提出了种种课题。在实际需要的基础上，通过大量观察和系统实验，人们逐步采用较新的数学方法来帮助总结事物的运动规律。例如：开普勒根据长期天文观测资料总结出行星运动三大定律；伽里略系统地研究了落体速度变化的规律，并提出了惯性定律，他把物理实验与数学分析方法结合起来，精确地用数学公式描述了物理学规律。以机械运动中基本问题之一的速度、路程和时间三者关系这个问题为例，在等速运动的情况下，显然， $\text{速度} = \text{路程} \div \text{时间}$ ；但在变速运动的情况下，单位时间所行的路程已不是常数，对这种速度随时间变化的问题，原来的初等数学就无能为力了。因为初等数学是常量数学，只能反映相对静止的状态，无法描述变速运动中速度、时间和路程之间的复杂关系。这里的矛盾要求数学突破只研究常量的局限性，发展为用辩证的思想方法研究物体运动过程的新工具。微积分就是在当时的社会历史条件下，适应客观现实的需要，在有了变数的基础上产生的。正如恩格斯所指出的：“**数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生，并且是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。**”（《自然辩证法》）

二

为了对微积分所研究的问题大体上先有一个初步的认识，现在我们提出三个在初等数学中难以解决的问题，并作一些初步的分析。

问题一 求自由落体在下落后一秒钟这个时刻的瞬时速度。

这是求一个作变速运动的物体在某一时刻的瞬时速度问题。我们知道，根据物理实验总结出自由落体的运动规律为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中， s 是下落的路程(米)， g 是重力加速度(米/秒²)，通常取 $g=9.8$ ， t 是下落的时间(秒)。这一公式给出了自由落体下落的路程与时间的关系，现在就是要我们从这一关系中求出物体在下落后一秒钟这一时刻的速度。

我们先回忆一下初等数学中求速度的方法。假定一个运动物体在时刻 t_1 走过的路程是 s_1 ，到时刻 t_2 ，它走过的路程是 s_2 ，那末，在 $t_2 - t_1 = \Delta t$ 这段时间内，物体走过的路程为 $s_2 - s_1 = \Delta s$ ，因此，物体在这一段时间内的运动速度为

$$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

对于等速直线运动，由于物体的速度是不变的，从上式求得的速度是物体在任一时刻的速度。但是对于变速运动，上式给出的只是 Δt 这段时间内速度的平均值，并不是某一时刻的瞬时速度。而且这样的平均值随着所取时间间隔的不同而不同，例如，自由落体在 $t=1$ 秒到 $t=2$ 秒这段时间内，下落的路程为

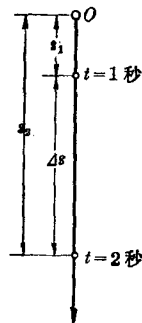


图 0-2

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{2} g(2)^2 - \frac{1}{2} g(1)^2 = \frac{3}{2} g = \frac{3}{2} \times 9.8 = 14.7 \text{ (米)},$$

而在 $t=2$ 秒到 $t=3$ 秒这段时间内, 下落的路程为

$$s_3 - s_2 = \frac{1}{2} g(3)^2 - \frac{1}{2} g(2)^2 = \frac{5}{2} g = \frac{5}{2} \times 9.8 = 24.5 \text{ (米)}.$$

这两段时间间隔虽然都是 1 秒, 但下落的路程不一样, 平均速度也不相等.

在初等数学中研究运动速度只能做到这一步, 因此, 用初等数学方法不能解决我们这里所提出的问题.

如何求自由落体在某一时刻(例如 $t=1$ 秒)的瞬时速度, 这就是微积分中要解决的一个问题.

问题二 求一个曲边三角形的面积.

在初等数学中, 我们已学过三角形、矩形、梯形等面积的计算. 在生产斗争和科学实验中, 经常要求我们计算许多不规则的平面图形的面积. 如果这些图形都是由直线围成的, 那末, 我们总可以

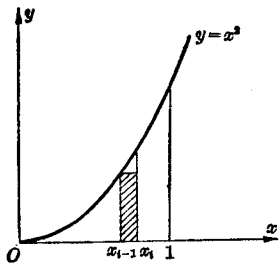


图 0-3

把它分割成有限个三角形和矩形, 分别算出这些三角形和矩形的面积, 然后加起来就得到整个图形的面积. 但现在是要计算曲边三角形——即一边是曲线的三角形——的面积, 例如, 由抛物线 $y=x^2$, 直线 $x=1$ 和 x 轴围成的曲边三角形(图 0-3)的面积, 这种图形的面积怎样计算呢?

我们可以用平行于 y 轴的直线将曲边三角形分成许多小块, 但由于 $y=x^2$ 的图形是曲线, 无论怎样分, 每一小块总有一边是曲线, 因此, 在这里我们遇到了“直”与“曲”的矛盾.

古代的“割圆术”和古代劳动人民用一块块条石砌成拱形的桥洞给了我们启示, 从整体看是曲的, 从局部看是直的, 在局部上可

以“以直代曲”。因此可以创造条件来促使矛盾的转化。把曲边三角形的底边分成 n 个相等的小区间(记小区间长度为 Δx)，过这些区间的端点引平行于 y 轴的直线，将曲边三角形分成 n 个狭窄的曲边梯形(即有一腰是曲线的梯形)。对于每个窄的曲边梯形，分别作一个小矩形来代替它，这样，“化整为零”，“以直代曲”，把这个曲边三角形化为许多小矩形。例如第 i 个小矩形，它的底为 Δx ，高为 $y = x_{i-1}^2$ ，记这个矩形的面积为 ΔA_i ，则

$$\Delta A_i = x_{i-1}^2 \cdot \Delta x.$$

我们对每个窄曲边梯形都这样做，然后“积零为整”，将 n 个这样的小矩形面积累加起来，用 A_n 表示它们的和，即

$$A_n = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n,$$

那末， A_n 就是这个曲边三角形面积的近似值。不难想象，当曲边三角形分成的块数愈多，也就是 n 取值愈大， A_n 愈接近于曲边三角形的面积。但不管 n 取什么值， A_n 总是这个曲边三角形面积的一个近似值，而不是精确值。怎样才能使近似值转化为精确值呢？这就是微积分中要解决的另一问题。

问题三 用一块正方形铁皮制作一只无盖油盘，应怎样做才能使其容积最大？

在生产实践中，为了落实毛主席关于“要节约闹革命”的教导，经常会碰到怎样用料最省，或消耗最少，或效率最大等问题，这在数学上叫做最大值与最小值问题。

在一块边长为 1 尺的正方形铁皮上，四角截去边长为 x 的小正方形(图 0-4)，再按图中虚线折起来，做成一个无盖油盘。从图可以看出，如果剪去的正方形太小，制成的油盘底面积虽然较大，但高就小(注意，剪去的正方形的边长就是油盘的高)，所得油盘的容积不大；反过来，如果剪去的正方形太大，底面积较小，得到油盘的容积也不大。那么，剪去的正方形的边长该多大才能得到容积最大的油盘呢？

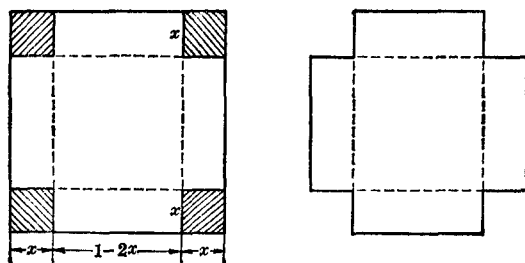


图 0-4

从图看出, 油盘的容积为

$$V = x(1-2x)^2.$$

对一些 x 的值我们可以算得 V 的值如下表:

x	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{10}$
V	0.0160	0.0370	0.0625	0.0720	0.0741	0.0729	0.0640

从这些数据可以看出, 当 x 由大变小时, V 相应地由小变大,

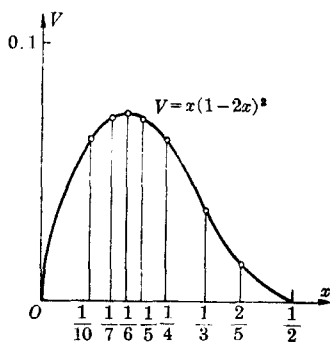


图 0-5

但 $x = \frac{1}{7}$ 时的 V 反而较 $x = \frac{1}{6}$ 时的 V 为小, 当 x 继续变小时 V 也随着变小. 从而看出最大的容积 V 大约在 $x = \frac{1}{6}$ 的附近达到. 也就是说, 当正方形铁皮四角截去 $\frac{1}{6}$ 见方的小块时, 制成的油盘的容积可能是最大的. 在第二章中我们将说明, 确实在 $x = \frac{1}{6}$ 时 V 最大(容积 V 随

x 的变化而变化的情况如图 0-5 所示). 象这类问题, 在高等数学中也有系统的解决办法.

三

上面提出的三个问题在形式上虽然很不相同，但解决这些问题的基本思想却是一样的，就是要在分析矛盾的基础上，进一步促使矛盾转化，发展出新的数学概念和方法——微积分。这些我们将在以后逐步加以阐明。

旧的微积分教材，不讲矛盾，不讲转化，不讲辩证法，而是乞灵于形式逻辑的推理论证，把具有活生生的实践来源的高等数学搞得玄而又玄，使得体现在高等数学中的辩证思想完全人为地被形而上学的框架窒息了。这是由于资产阶级的数学家，一方面为了达到排斥工农，实行文化垄断的目的，另一方面也是他们唯心主义形而上学的世界观所决定的。

毛主席教导我们：“我们现在思想战线上的一个重要任务，就是要开展对于修正主义的批判。”

我们必须认真学习马列主义和毛主席的哲学思想，批判反映在数学学科领域中的唯心主义的先验论，这应该成为我们现在学习微积分的基本认识。

第一章 函数和极限

第一节 变量和函数

毛主席指出：“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”。事物的互相联系及其内部规律性，在数量这一侧面就表现为各个数量之间以及各数量在变化过程中的相互依赖关系，在数学上叫做函数关系。这就是我们所要讨论的对象。

一、变 量

在我们研究事物的过程中，常会遇到各种不同的量：如时间、长度、温度、重量等等。各种量，按照不同的情况，有的取不同的数值，有的取同一个数值。我们称在某一过程中取不同数值的量为变量，只取同一数值的量为常量。习惯上，为了易于辨别，一般用 x 、 y 、 z 等字母表示变量，用 a 、 b 、 c 等字母表示常量。

应当注意，一个量是常量还是变量，是对某一过程来说的，不是绝对的。情况变了，常量和变量也可能相互转化；另外，在问题的讨论过程中，如果某个变量的变化相对于其他变量来说可以忽略不计，或者在容许范围内为了处理问题的方便，我们也可把它当作常量来对待。

变量有时可以毫无限制地取实数值，有时要受到某种限制，这要根据问题的具体性质来决定。例如温度的变化不能低于 -273°C ，圆的内接正多边形的边数只能是不小于 3 的自然数。

通常我们用区间表示变量的变化范围。一般，区间可用括号或不等式或图形这三种办法来表示。例如，如果变量 x 在 a 与 b ($a < b$)

两数之间变化,就把这个区间记为 (a, b) 或 $a < x < b$, a 和 b 叫做区间的端点. 这种区间叫做开区间, 在图形上就是数轴上介于点 a 和点 b 之间的全部点, 端点 a 和 b 用圈点表示, 如图 1-1. 如果把端点和区间内的点一起来考虑, 就叫闭区间, 记为 $[a, b]$ 或 $a \leq x \leq b$, 这时图中的 a 与 b 就用实点表示. 还可以有半开半闭的区间 $[a, b)$ 与 $(a, b]$, 它们可分别记为 $a \leq x < b$ 与 $a < x \leq b$. 图 1-2 表

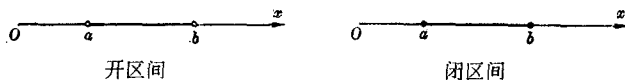


图 1-1

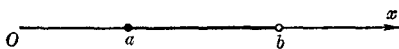


图 1-2

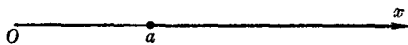


图 1-3

示的是左闭右开区间 $[a, b)$. 推广来用, $[a, +\infty)$ 就表示 x 在不小于 a 的范围内变化, 可记为 $x \geq a$ 或 $a \leq x < +\infty$, 也可在数轴上表示为图 1-3 那样. 类似地, 也有 $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ 与 $(-\infty, +\infty)$ 等.

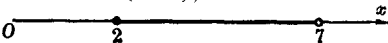
思考和练习

1. 举一、二个实例, 说明变量和常量.
2. 将下列区间换成其他形式表示:

(1) $-2 < x < 2$;

(2) $[-3, 5)$;

(3) $-a < x \leq a$ ($a > 0$);

(4) 

二、函 数

1. 函数概念

实际问题中的变量常不止一个, 而是几个, 它们一同变化, 其