高职精品课程教材

GAOZHI JINGPIN KECHENG JIAOCAI

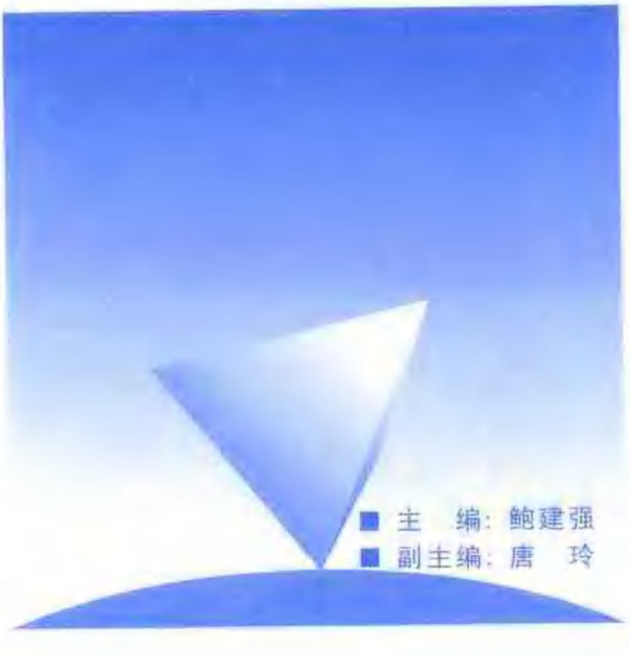
经济数学

■ 主　编：鲍建强
■ 副主编：唐　玲

廣東省出版集團
广东经济出版社

高职精品课程教材

经济数学



■ 主　编：鲍建强
■ 副主编：唐　玲

廣東省出版集團
广东经济出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济数学 / 鲍建强主编，唐玲副主编. —广州：广东经济出版社，2007.2

（高职精品课程教材）

ISBN 978-7-80728-519-9

Ⅰ.经… Ⅱ.①鲍…②唐… Ⅲ.经济数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 015582 号

出版发行	广东经济出版社（广州市环市东路水荫路 11 号 5 楼）
经销	广东新华发行集团
印刷	广东省肇庆新华印刷有限公司（广东省肇庆市狮岗）
开本	787 毫米×1092 毫米 1/16
印张	10 2 插页
字数	161 000 字
版次	2007 年 2 月第 1 版
印次	2007 年 2 月第 1 次
印数	1～3 000 册
书号	ISBN 978-7-80728-519-9
定价	23.00 元

如发现印装质量问题，影响阅读，请与承印厂联系调换。

发行部地址：广州市五羊新城寺右二马路冠城大厦省图批新场三楼 330 号

电话：（020）87395594 87393204 邮政编码：510600

邮购地址：广州市环市东路水荫路 11 号 11 楼 邮政编码：510075

（广东经世图书发行中心）电话：（020）37601950

营销网址：**http://www.gebook.com**

广东经济出版社常年法律顾问：屠靳锋律师、刘红丽律师

主　编：鲍建强

副主编：唐　玲

编写人员：鲍建强　唐　玲　梁嘉宁　黄　皓
张　萍　江崑嵛　李培军

前言

随着我国社会主义经济建设的发展和经济体制改革的深入，高等职业教育作为我国高等教育的一个重要组成部分，其目标是要培养生产和管理第一线的技术应用型人才．经济数学在各门管理学科中的地位日益重要，在数量经济方面尤为突出．在此背景下，我们组织了多位一直在教学一线有着丰富教学经验的教师，参考了大量的相关书籍和资料，编写了基础性和实用性都很强的这套经济数学教材，以满足广大师生学习经济数学的需要．

本教材本着“以能力为主线，以必需、够用为度”的原则，在适当注意数学的科学性、严谨性、系统性的基础上，注重以实例引入，讲清概念，简化深奥的数学理论，增强几何图形以帮助学生理解深奥的数学理论；注重培养学生基本的数学思维方法，基本运算能力和分析问题、解决问题的能力，以及熟练掌握运用公式解题的技巧．

本教材内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分．书后附有常用数学公式与习题答案，便于学生学习和查阅．

本教材学时数以不少于**54**学时为宜，各教师可根据学时数的多少适当增减内容．

本教材可作为高职高专经济数学教材，也可作为专科层次的职工大学、业余大学等成人教育的教材．

参加编写的教师（均为广州城市职业学院教师）：鲍建强、唐玲、梁嘉宁、黄皓、张萍、江昆嵛、李培军．

由于编者的水平有限，时间仓便，书中难免有缺点和错漏，敬请广大读考批评指正，在此，谨表衷心感谢．

目　录

第一章 函　　数

函数是微积分中的一个基本概念，也是微积分研究的对象，在运用数学模型研究经济现象中起着重要的作用．在这一章里，我们将对函数的概念及其有关的知识进行系统性的复习，加深认识，为今后的学习打下基础．

1.1 函数的概念

一、函数的定义

（一）常量与变量

在我们研究一些现象或过程的时候，经常会遇到各种不同的量，这些量大体上可分为两类：一类是在研究的过程中相对地保持不变的量，我们把它称为常量，例如圆周率 π，物体的重力加速度 g 等；另一类是在研究过程中变化的、可以取不同数值的量，我们把它称为变量，例如一天中的气温，销售过程中的销售量等．在本书中，我们一般用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，u，v 等表示变量．

在理解常量与变量时，应注意以下几点：

1．常量与变量是相对于所研究的过程来讲的．同一个量，在某一研究过程中可以看作是常量，而在另一研究过程中则可以看作是变量，反过来也同样．例如，银行里的存款利率，在一个较短的时期里可以看作是常量，但在较长的时期里则是一个变量．

2．常量在实数轴上用定点来表示，变量在实数轴上用动点来表示．

3．变量可以取的所有不同的数值所构成的集合，称为这个变量的变动区域．连续变量的变动区域通常用数轴上的区间来表示．

区间表示法（设 a，b 是两个实数，且 $a<b$）

有限区间：

闭区间	$[a, b]$	表示大于或等于 a 且小于或等于 b 的数集
开区间	(a, b)	表示大于 a 且小于 b 的数集
半开半闭区间	$[a, b)$	表示大于或等于 a 且小于 b 的数集
	$(a, b]$	表示大于 a 且小于或等于 b 的数集

无限区间：

$(-\infty, +\infty)$	表示全体实数
$(-\infty, a]$	表示小于或等于 a 的数集
$(-\infty, a)$	表示小于 a 的数集
$[a, +\infty)$	表示大于或等于 a 的数集
$(a, +\infty)$	表示大于 a 的数集

（二）函数的定义

定义 1.1 设 x，y 是某个变化过程中的两个变量，若当变量 x 在非空实数集 D 内任取一个数值时，变量 y 按照某一对应规则 f 总有一个确定的数值和它相对应，则称变量 y 是 x 的函数，记作：

$$y=f(x)$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量或 x 的函数，D 称为函数的定义域.

当自变量 x 在定义域内取定某一数值 x_0 时，因变量 y 按照所给的函数关系 $y=f(x)$ 所对应的值，称为当 $x=x_0$ 时的函数值，记作：

$$y|_{x=x_0} \text{或} f(x_0)$$

当 x 取遍定义域中每一个值时，所得相应的函数值的全体称为 $y=f(x)$ 的值域.

例 1 已知 $f(x)=2x^3-4x+1$，求 $f(-2)$、$f(-x)$、$f(x^2)$ 和 $[f(x)]^2$.

解 $f(-2)=(2x^3-4x+1)|_{x=-2}=2(-2)^3-4(-2)+1=-7$

$f(-x)=2(-x)^3-4(-x)+1=-2x^3+4x+1$

$f(x^2)=2(x^2)^3-4x^2+1=2x^6-4x^2+1$

$[f(x)]^2=(2x^3-4x+1)^2$

关于函数的定义，我们做下面的说明：

1. 函数的对应规则一般用字母“f”来表示，不同的函数的对应规则也可以用不同的字母来表示，如 $y=g(x)$ 等等. $y=f(x)$ 只是表示变量 x 与 y 之间具有对应关系，而确定的对应规则要根据具体的表达式来确定.

2. 由定义 1.1 可知，自变量 x 在定义域 D 内取定一个值时，函数值 y 是由对应规则 f 来确定的，所以函数是由它的定义域 D 和对应规则 f 完全确定的. 我们把函数的定义域和对应规则称为函数的两要素. 由此，我们说某两个函数相同，是指它们有完全相同的定义域和相同的对应规则，而与其变量的表示符号无关，如 $y=\sin x$ 和 $u=\sin v$ 在实数域上是同一个函数.

3. 定义域 D 是指使得函数有意义的自变量 x 的取值范围. 确定函数的定义域时，应注意以下几种式子：

(1) 分式中，分母不能为零.

(2) 偶次根式中，被开方式必须大于或等于零.

(3) 对数式中，真数必须大于零.

(4) 三角函数和反三角函数要符合其定义.

(5) 如果函数的表达式由多项因式组成，则它的定义域是各项因式定义域的公共部分.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$；　　(2) $y=\arcsin(x-2)$；

(3) $y=\dfrac{2}{x+1}-\sqrt{5-x}$；　　(4) $y=\dfrac{\ln(4-x^2)}{x}$.

解 (1) 对于$\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$，要求 $x^2-5x+6\neq0$，可以解出 $x\neq2$，$x\neq3$，

因此，$y=\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$的定义域是 $(-\infty,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 对于 $\arcsin(x-2)$，要求 $-1\leqslant x-2\leqslant1$，即 $1\leqslant x\leqslant3$，

因此，$y=\arcsin(x-2)$ 的定义域是 $[1,3]$.

(3) 对于$\dfrac{2}{x+1}$，要求 $x+1\neq0$，即 $x\neq-1$，

对于 $\sqrt{5-x}$，要求 $5-x\geqslant0$，即 $x\leqslant5$；

因此，$y=\dfrac{2}{x+1}-\sqrt{5-x}$的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(-1,5]$.

(4) 首先分母 $x\neq0$，

对于 $\ln(4-x^2)$，要求 $4-x^2>0$，可以解出 $-2<x<2$，

因此，$y=\ln(4-x^2)+\dfrac{1}{x}$的定义域是 $(-2,0)\cup(0,2)$.

二、函数的表示法

函数的表示法主要有三种，即解析法（又称公式法）、图示法和列表法.

（一）解析法（又称公式法）

用数学式子来表示两个变量之间的对应关系. 例如：$y=x^2-1$，$y=\sqrt{1-\cos x}$ 等都是用解析法来表示的函数. 解析法是对函数的精确描述，它的形式比较简洁，便于我们对函数进行分析和研究，是我们今后主要采用的方法.

特别指出，在某些研究过程中，一个函数不能只由一个式子表示，而是在其定义域内不同的部分用不同的式子来表示，这样的函数称为分段函数.

例如，某地区航空信函的资费标准是20克以内（含20克）资费为5元，20克以上每超重1克资费增加0.1元，信函的重量不能超过500克. 那么，资费 y 和信函重量 x 的函数关系可用分段函数表示为：

$$y=\begin{cases}5 & 0<x\leqslant 20\\ 5+0.1(x-20) & 20<x\leqslant 500\end{cases}$$

在理解分段函数时，应注意以下两点：

1. 分段函数的定义域是各段自变量取值范围的并集.

2. 分段函数是由两个或两个以上的式子合起来表示一个函数，对定义域内的某个值，分段函数只能确定一个函数值. 因此，求分段函数在某点处的函数值，应该先判定该点所在的范围，然后选取函数在该范围内的表达式去计算.

例3 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & -5<x<0\\ 2, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ 3x+1, & 2<x\leqslant 4\end{cases}$，求函数的定义域 D 及 $f(-1)$、$f(0)$、$f(2.5)$.

解 D：$(-5,4]$

$f(-1)=(1-x^2)\mid_{x=-1}=1-(-1)^2=0$；

$f(0)=2$；

$f(2.5)=(3x+1)\mid_{x=2.5}=3\times 2.5+1=8.5$.

（二）图示法

用平面直角坐标系中的曲线来表示两个变量之间的对应关系，如图1－1所示.

图示法是对函数的直观描述，从图形上可以直接看到变量之间的依赖关系和变化趋势.

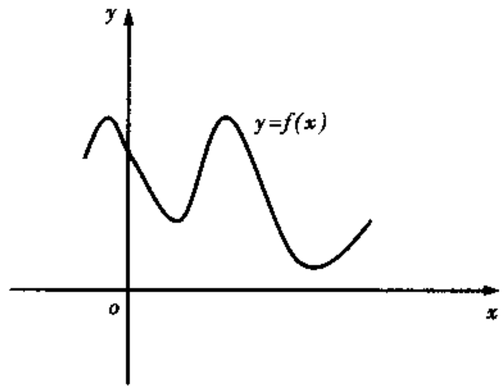


图 1－1

（三）列表法

把自变量的值与相应的函数值列成表格来表示变量之间的对应关系，如表 1－1 所示. 列表法常常是在实际问题中使用的描述函数的方法，因为往往在许多实际问题中，变量之间的对应关系很难由确定的解析式来表示，而从表格中可以直接查出某些函数值，避免了繁琐的运算.

表 1－1　某保险从业员上半年业绩表

月份 x	1	2	3	4	5	6
金额 y(元)	3052	2533	864	2678	1644	2349

三、函数的四个特性

（一）有界性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，若存在正数 M，对 (a,b) 内的任意 x，恒有：

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的.

函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的几何意义是：在 (a,b) 内的曲线 $y=f(x)$ 完全落在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间，如图 1－2 所示.

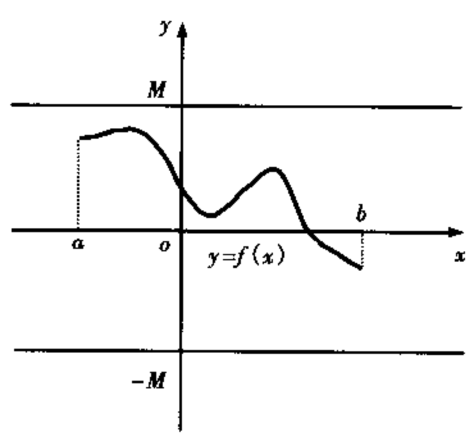


图 1－2

例如 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上，都有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$. 所以 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上都是有界的. 这里 1 就可以看作定义 1.2 中

的正数 M. 而 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内则是无界的.

（二）单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，若对 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$，总有

1. $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是单调增加的，称 (a, b) 为单调增区间.

2. $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内是单调减少的，称 (a, b) 为单调减区间.

单调增函数和单调减函数统称为单调函数，单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

单调增加函数的函数值 y 随着自变量 x 的增加而增加，从左往右看图形是上升的，如图 1－3 所示；单调减少函数的函数值 y 随着自变量 x 的增加而减小，从左往右看图形是下降的，如图 1－4 所示.

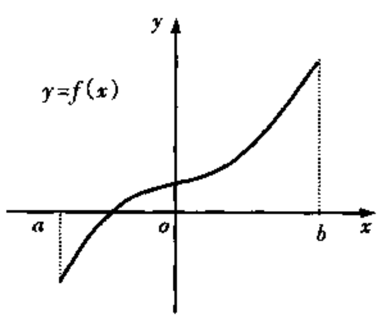


图 1－3

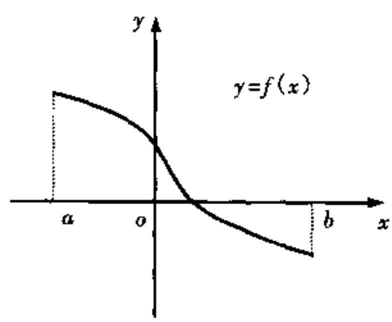


图 1－4

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的，在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的，但是在整个 $(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数，如图 1－5 所示.

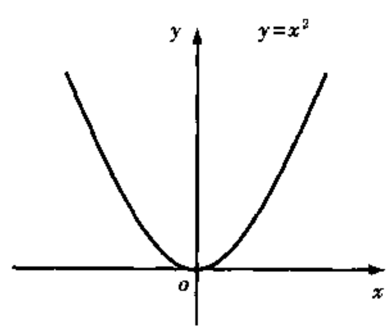


图 1－5

（三）奇偶性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对 D 中任意的 x，有

1. $f(-x)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D 上的偶函数.

2. $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是 D

上的奇函数.

奇偶函数都具有对称性. 奇函数的图形关于原点对称，如图 1－6 所示. 偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1－7 所示. 在研究这类函数时，只要知其一半，就能知其全部.

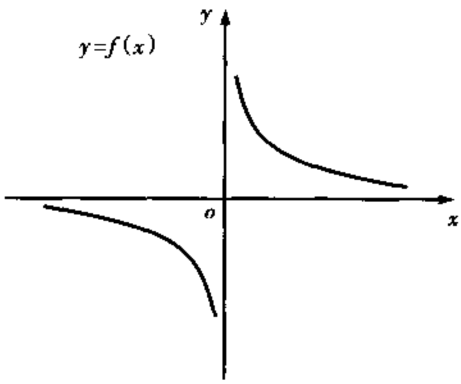


图 1－6

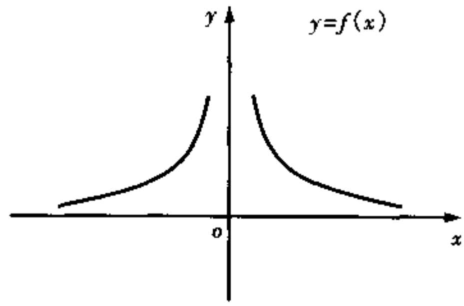


图 1－7

例 4 判别下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=5x^4+3x^2-1$ ；

(2) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{x}$.

解 本题各函数的定义域都是关于原点对称.

(1) D：$(-\infty, +\infty)$

因为 $f(-x)=5(-x)^4+3(-x)^2-1=5x^4+3x^2-1=f(x)$ ，

所以 $f(x)=5x^4+3x^2-1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是偶函数.

(2) D：$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$

因为 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^{-(-x)}}{-x}=\dfrac{2^{-x}+2^x}{-x}=-f(x)$ ，

所以 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{x}$ 在 $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ 上是奇函数.

（四）周期性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 T，使得对 D 中任意的 x，恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数. 满足这个等式的最小正数 T 称为函数

的基本周期，一般说函数的周期都是指基本周期.

例如 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是以 π 为周期的周期函数.

周期函数在每一个周期上的图形和性质都是一样的，所以我们只要知道它在一个周期上的图形和性质，就可以知道整个函数的图形和性质，如图 1－8 所示.

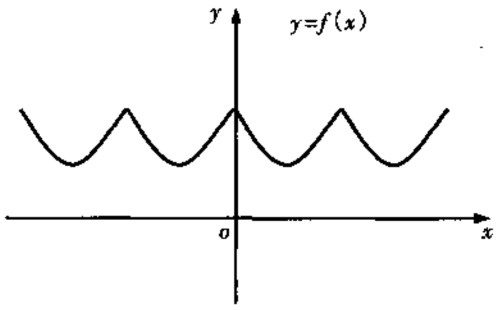


图 1－8

四、反函数

两个变量的函数关系往往是相对的，我们研究时可以根据问题的需要来选择自变量和因变量.

例如，设某种商品的需求量为 Q，价格为 P，两者的关系为

$$Q=-2P,$$

这时 P 是自变量，Q 是 P 的函数. 但有时要反过来，用需求量去确定价格，这时，把 Q 当作自变量，P 当作因变量，则由上面的函数关系有

$$P=-\frac{1}{2}Q,$$

我们称这两个式子互为反函数.

定义 1.6 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 M，如果对于 M 中每一个 y，都有且只有一个满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称这个函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，而 $y=f(x)$ 称为直接函数. 互为反函数的两个函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

一般地，我们习惯用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量，因此通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$.

由上述，可得求反函数的过程分为两步：

1. 从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$；

2. 用 x 表示自变量，y 表示因变量，即 $y=f^{-1}(x)$.

例 5 求 $y=1-3x$ 的反函数.

解 由 $y=1-3x$ 可以解出 $x=\frac{1-y}{3}$，

用 x 表示自变量，y 表示因变量，即 $y=\frac{1-x}{3}$，

所以 $y=\frac{1-x}{3}$ 是 $y=1-3x$ 的反函数.

习题1.1

1. 判别下列函数是否同一函数，为什么？

(1) $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$； (2) $y=x$ 与 $y=\sqrt[3]{x^3}$；

(3) $f(x)=x^2-3x+1$ 与 $g(t)=t^2-3t+1$；

(4) $f(x)=\sqrt{(x-1)^2}$ 与 $f(x)=x-1$.

2. 已知 $f(x)=\frac{x}{2x+1}$，求 $f\left(-\frac{1}{3}\right)$，$f(0)$，$f(a-b)$，$f(-x)$，$f(2x+1)$，$[f(x)+1]^2$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(5x+2)$； (2) $y=\arccos\frac{x}{5}$；

(3) $y=\frac{1}{x^2-x-6}$； (4) $y=\frac{x+1}{x^2-1}$；

(5) $y=\sqrt{9-x^2}$； (6) $y=\frac{2}{x}-\sqrt{x+3}$.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x\leqslant 0\\ \sqrt{1+x^2}, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$，求 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=2x^3-x$； (2) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$； (4) $f(x)=x(x-1)$；

(5) $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$； (6) $f(x)=x^2+2|x|-3$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=x^3-2$； (2) $y=\frac{1+x}{1-x}(x\neq 1)$.