普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高校21世纪经济学类·管理学类课程系列教材

YUNCHOUXUE

运筹学

（第二版）

徐 渝 主编

陕 西 人 民 出 版 社

高校21世纪经济学类·管理学类课程系列教材

运筹学

YUNCHOUXUE

（第二版）

主编 徐渝

陕西人民出版社

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/徐渝主编. —西安：陕西人民出版社，2001
高校21世纪经济学类、管理学类教材
ISBN 978-7-224-05842-0
Ⅰ. 运… Ⅱ. 徐… 运筹学—高校学校—教材
Ⅳ. 002

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第051245号

高校21世纪经济学类
管理学类课程系列教材

运筹学（第二版）

主　　编 徐　渝　　**封面设计** 王晓勇
责任编辑 朱小平　王金林　　**版式设计** 易玉秦

出版发行 陕西人民出版社
购书电话 （029）87205074　87205094
地　　址 西安北大街147号
邮政编码 710003
经　　销 陕西省新华书店
印　　刷 西安正华印刷科技有限公司

开　　本 787mm×1092mm　1/16
印　　张 17
字　　数 393千字
版　　次 2007年6月第2版　　2007年6月第1次印刷
印　　数 1—3000
书　　号 ISBN　978-7-224-05842-0
定　　价 23.00元

第 2 版

出版说明

由陕西省教育厅和陕西人民出版社共同主持编写的《高校21世纪经济学类·管理学类课程系列教材》自2001年至今，已经陆续出版19个品种，它们分别是《管理信息系统》《管理学》《运筹学》《市场营销》《微观经济学》《宏观经济学》《统计学》《国际金融学》《货币银行学》《经济法》《现代企业管理》《数据库及其应用》《国际贸易》《中国经济史》《会计学》《财务会计学》《财务管理学》《成本会计学》和《基础会计学》。该套教材从2001年起已被收入《全国大中专教学用书汇编》，由新华书店总店向全国高等院校推荐使用，使用院校遍及大江南北，数量达到100余所。同时，该套教材还畅销于全国一些大中城市的图书商城，其中有些品种成为上海书城等大型书城的畅销书上榜品种。

从2005年起，在广泛征求使用院校意见、充分吸收学科最新研究成果的基础上，我们对第一版教材陆续进行了修订，目的是进一步提高教材质量，继续保持该套教材“适用、新颖、前沿”的原有特色，并力求通过我们的努力，将其打造成国内同类教材中的精品，为我国高等教育教材建设做出应有的贡献。

《高校21世纪经济学类·管理学类课程系列教材》编委会

2007年5月10日

前　言

运筹学是管理类本科重要的学科基础课之一。目的是通过讲授、作业、上机、讨论等教学环节，学习理解与经济管理领域密切相关的运筹学分支的基本模型与方法，掌握运筹学整体优化的思想和若干定量分析的优化技术，能正确应用各类模型分析、解决不十分复杂的实际问题。

学生学完本课程后，应达到如下要求：正确理解运筹学方法论，掌握运筹学整体优化思想；掌握线性规划、动态规划、网络模型、排队模型等基本模型的功能和特点，熟悉其建模条件、步骤和相应的技巧，能根据实际背景抽象出适当的运筹学模型；熟练掌握各种模型特别是确定性模型的求解方法，并能对求解结果作简单分析；掌握与基本模型有关的基本概念及基本原理，做到思路清晰、概念明确；具有初步运用运筹学思想和方法分析、解决实际问题的能力，本教材适用于管理类本科各专业的学生及相应各层次各类学员。建议总学时为64学时，其中授课54学时，上机10学时。

本教材的特色是：力图反映面向21世纪教学内容和课程体系改革研究项目的成果，适应厚基础、宽口径、高素质的培养方向和学习型、创造型和个性化培养方式；融教师多年的教学经验与教改成果为一体，注意选材的精练性、框架结构的整体性和文字表达的可接受性，使学习者能在较短的时间内领略到运筹学的特点、优化模型的灵魂和优化方法的精髓，实现教学内容的体系化、精益化和灵捷化，为学习者进一步拓宽研究领域练好基本功；教材力求做到整体框架合理，原理、模型、方法、应用有机结合，思路清晰且具启发性，便于学生举一反三；基本概念准确、原理分析透彻、方法步骤清晰、可操作性强；突出管理实践平台，注重对学生实际能力的培养，教材将配备相当数量的思考练习题、应用案例和小实践素材，为学生深入钻研和实践提供条件。

参加本书编写的同志有：西安交通大学徐渝（前言、绪论、第3章第1节、第4章、第8章），西安电子科技大学胡奇英、杜黎（第4章第4节、第5章），西北大学张雪阳（第1章），西安理工大学熊义杰（第2章、第3章第2节、第8章案例素材3），西北工业大学郭鹏、上官景浩（第6章、第7章）。

这本教材是陕西省高校运筹学工作者的合作成果。尽管作者作了很大努力，但鉴于本身的水平，书中不妥及错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正！

编　者

2001年7月

第二版前言

由陕西省高校运筹学工作者合作，陕西人民出版社出版的高校21世纪经济学类·管理学类课程系列教材之一的《运筹学》自2001年8月发行以来，被陕西省各高校广泛采用作为本科生、MBA研究生的教材，在使用过程中，许多教师、学生提出了很好的意见和建议，本次修订工作就是在此基础上进行的。

在修订过程中，获悉本教材入选“普通高等教育‘十一五’国家级教材规划”，在欣喜的同时，更感到责任重大，全体参编老师以高度的责任感在修订中认真做好工作，力争为读者提供一本高质量的教材。

根据实际使用情况和教改、教学的需要，除了注意印刷错误的订正和文字叙述的流畅性之外，在内容、编排及教辅手段上做了重大调整，以方便教学与适应学科发展的需要。

鉴于胡奇英教授工作调动，离陕赴沪，未能参加这次教材的修订工作，我们约请西安理工大学管理学院熊国强副教授重新编写了第5章网络规划与网络分析。在此对胡教授先前的辛勤付出表示衷心感谢。

另外，约请西安财经学院高俊琦教授增写了第8章对策论，在第3章特殊的线性规划中增加了目标规划一节。对第4章动态规划及其应用的举例改用分阶段分析方式，使之更为简明、清晰。删除了原来的第8章，除保留部分原有案例外又选编了一些新的案例，并将这些案例分散到各章，以便使案例随章节内容的学习进程尽早与学生接触，更加自然地实现理论与实践的结合。

为方便教改、教学，加强高校教师之间的交流，我们特别编写了《〈运筹学〉教师使用手册》，内容包括：课程的性质、目的及任务；课程的基本要求；教学内容（统一讲授内容及选讲内容建议）；实践环节（习题与习题课、讨论课、计算机辅助教学、小实践或课程设计的建议）；学时分配建议；教材使用说明（教学目的、重点和教学方法建议）；习题解答与提示；教师建议反馈表。欢迎使用本教材的教师参与交流并给予斧正，《〈运筹学〉教师使用手册》可直接与陕西人民出版社联系索取。

参加本次教材修订的同志有：西安交通大学徐渝（第二版前言、第3章第1节、第4章），西北大学张雪阳（第1章），西安理工大学熊义杰（第2章、第3章第2节），西安理工大学熊国强（第5章），西北工业大学郭鹏、安会刚（第3章第3节、第6章、第7章），西安财经学院高俊琦（第8章）。

编　者

谨识于2006年8月

高校21世纪经济学类
管理学类课程系列教材

目　录

第 1 章　线性规划与单纯形法

本章要点：

1. 线性规划问题的数学模型
2. 线性规划问题的基本理论
3. 线性规划问题的求解

本章框架：

- 线性规划
  - 基本概念
    - 线性规划问题的数学模型和标准型
    - 线性规划问题的解
      - 可行解
      - 基本解
      - 基本可行解
      - 最优解
    - 线性规划问题的几何意义
  - 求解方法
    - 图解法
    - 单纯形法
      - 基本单纯形法
      - 人工变量法
        - 大 M 法
        - 两阶段法
    - 修正单纯形法
  - 经济管理中的几类典型问题的线性规划模型

§1.1　线性规划问题的提出与模型

线性规划是运筹学的一个重要分支，也是研究较早、发展较快、应用较广且比较成熟的一个分支。早在 1947 年，当时正在美国空军担任数学顾问的丹捷格（Dantzig）面对《最优规划的科学计算》中提出的“如何使规划过程机械化”的问题着手建立数学模型，他从改造投入产出模型入手，逐步研究形成了“单纯形法”，并于 1953 年提出“修正单纯形法”以解决计算机求解过程中的舍入误差问题。随着计算机的日益普及，其适用领域更广泛：从解决技术问题中的最优化，到工业、商业、交通运输业、军事的计划和管理及决策分析都可以发挥作用；小到一个小组的日常工作和计划的安排，大到国民经济计划的最优化方案的提出，都有用武之地。它是现代管理科学的重要基础和手段之一。

§1.1.1　问题的提出

在生产管理和经营活动中经常提出的一个问题是：如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，以便得到最好的经济效益。

例 1—1 某工厂计划生产 A、B、C 三种产品，每吨利润分别为 2 万元、3 万元、1 万元；生产单位产品所需的工时及原材料如表 1—1 所示。如供应的原材料每天不超过 3 吨，每天所能利用的劳动力总工时是固定的。问如何制定日生产计划，使三种产品总利润最大？

表 1—1 资源消耗表

每吨产品所需资源 \ 产品 资源	A	B	C
工时（占总工时比例）	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
原材料（吨）	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{3}$

这是一个求极大值问题，可以用以下数学语言来描述。

假设每天生产A 产品 x_1 吨，

B 产品 x_2 吨，

C 产品 x_3 吨，

得到利润 $2x_1+3x_2+x_3$ 万元，由于资源的限制，就有：

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 1$$

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3\leqslant 3$$

该工厂的目的是：在不超过资源供给量的前提下，如何确定 A、B、C 的产量，使得到的利润最大。用 Z 表示总利润，则这个问题可以表示为

$$\mathrm{Max}Z = 2x_1+3x_2+x_3$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 1\\ \frac{1}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3\leqslant 3\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{cases}$$

例 1—2 某工地租赁机械甲和乙来安装 A、B、C 三种构件，已知这两种机械每天的安装能力如表 1—2 所示。

表 1—2 机械安装能力

每天安装能力 \ 构件 机械	A	B	C
机械甲	5	8	10
机械乙	6	6	20

而工程任务要求至少安装 250 根 A 构件，300 根 B 构件和 700 根 C 构件；又知机械甲每天租赁费为 250 元，机械乙每天租赁费为 350 元，试决定租赁机械甲和乙各多少天，才能使总租赁费最少？

设租赁机械甲 x_1 天，机械乙 x_2 天，为满足 A、B、C 的安装要求，必须满足以下条件：

$$5x_1+6x_2\geqslant 250$$
$$8x_1+6x_2\geqslant 300$$
$$10x_1+20x_2\geqslant 700$$
$$x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0$$

以 W 表示总租赁费，则 $W=250x_1+350x_2$. 因此该问题可表示为：

$$\text{Min}W=250x_1+350x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases}5x_1+6x_2\geqslant 250\\8x_1+6x_2\geqslant 300\\10x_1+20x_2\geqslant 700\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

§1.1.2　线性规划的数学模型

从以上例子可以看出它们都属于一类优化问题，从数学上说具有以下共同特征：

(1) 每一个问题都要求一组变量称为决策变量，这组变量的一组定值就代表一个具体方案，通常要求这些变量取值是非负的。

(2) 存在一定的限制条件，称为约束条件，这些约束条件都可以用一组线性等式或不等式来表示。

(3) 都有一个目标要求，并且这个目标可以表示为决策变量的线性函数（称为目标函数），按所研究问题的不同，要求目标函数实现极大化或极小化。

我们将具有以上三个特点的最优化问题称为线性规划问题。这类问题可以用数学语言描述如下：

目标函数　　Max (Min) $Z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

满足约束条件：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant (=,\ \geqslant)\ b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant (=,\ \geqslant)\ b_2\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant (=,\ \geqslant)\ b_m\\x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0\end{cases}$$

§1.1.3　线性规划的建模步骤

建立一个实际问题的线性规划模型，可以按以下三个步骤进行：

(1) 确定决策变量。这是很关键的一步，决策变量选取得当，不仅会使线性规划的数学模型建得好，而且求解比较方便。

(2) 找出所有限制，并用决策变量的线性等式或不等式来表示，从而得到约束条件。一般可用表格形式列出所有的限制数据，然后根据所列出的数据写出相应的约束条件，以避免遗漏或重复所规定的限制要求。

(3) 把实际问题所要达到的目标用决策变量的线性函数来表示，得到目标函数，并确定是求最大还是求最小。

最后，根据实际问题添加非负条件。

§1.2 线性规划的求解

§1.2.1 图解法

为了给后面的线性规划问题的基本理论提供较直观的几何说明，我们先介绍线性规划问题的图解法。

我们把满足约束条件和非负条件的一组 x_1，x_2，…，x_n 叫做可行解，使目标函数取到最优值的可行解称为最优解。所有可行解组成的集合称为**可行域**。

图解法的一般步骤为：

第一步，建立平面直角坐标系；

第二步，根据线性规划问题的约束条件和非负条件画出可行域；

第三步，作出目标函数等值线 $Z=c$（c 为一常数），并使其平移求得最优解。

例 1—3 用图解法求解下面线性规划问题。

$$\text{Max}Z=2x_1+5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1\leqslant 4\\x_2\leqslant 3\\x_1+2x_2\leqslant 8\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

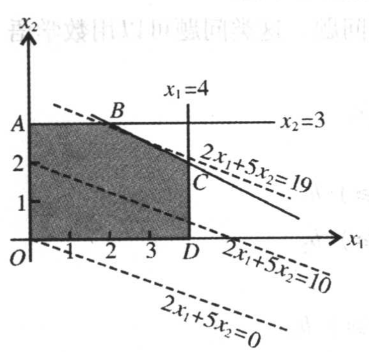

图 1—1

解：在以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系中，满足所有约束条件和非负条件的点构成的区域是 $OABCD$（可行域），如图 1—1 中的阴影部分。

然后令 $Z=c$，随着 c 的不同取值，可得到平面上一族平行线，位于同一直线上的点，具有相同的目标函数值，称为等值线。图中画出 $c=0$，10，19 三条等值线，由此可看出目标函数值增加（极大化问题）的方向，平移目标函数等值线直至既与可行域相交，又要沿增大方向走到最远，由此可得最优点为 B 点，其坐标为 $x_1=2$，$x_2=3$，相应的目标函数最优值为 $Z=2\times2+5\times3=19$。

若将上例中目标函数改为 $Z=x_1+2x_2$，则移动目标函数等值线可与可行域的 BC 边重合。这时线段 BC 上的每一点都是最优解，对应的最优目标函数值都是 8。该线性规划问题就有无穷多个最优解。

例 1—4 用图解法求解下面线性规划问题。

$$\text{Min}Z=2x_1+2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2\geqslant 1\\-x_1+2x_2\leqslant 0\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：该线性规划问题的可行域如图 1—2 中阴影部分，这是一个无界区域。作目标函数等值线，可以看出目标函数最小值在 A 点达到，解方程组得：

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

得 A 点坐标即最优解为 $x_1=1$，$x_2=0$，相应的目标函数最小值为 $Z=2\times1+2\times0=2$。

如果将上述目标函数改为求极大，则目标函数无上界。因此无最优解。在实际问题中，当数学模型有错误时，才可能发生这种情况。

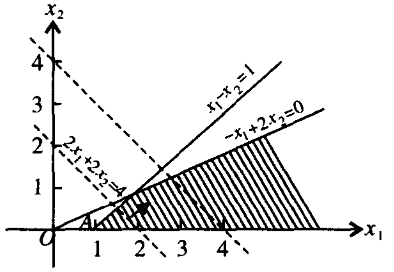

图 1—2

如果在例 1—4 的数学模型中再增加一个约束

$$x_1 - x_2 \leqslant 0,$$

则可行域是空集，这时无可行解，当然也无最优解了。

通过上述图解法我们看到，线性规划问题的所有可行解集构成的可行域一般是凸多边形（有时是无界的）；若有最优解，则一定可在可行域的某个顶点上得到；若在两个顶点上同时得到最优解，则这两个顶点连线上的任一点都是最优解，即有无穷多个最优解；若可行域无界，则可能出现无最优解情况。

图解法简单直观，使我们对线性规划问题求解的基本原理有了初步了解，但在变量多时它就无能为力了，下面介绍一般解法——单纯形法。

§1.2.2　线性规划问题的标准型

1. 线性规划问题的标准型

线性规划问题的数学模型有各种不同的形式，为了便于讨论，需要将线性规划数学模型写成一个统一格式，称为线性规划问题的标准型。其统一格式规定为：

（1）目标函数取极大化类型（也可以是极小化类型）；

（2）所有约束条件用等式来表示；

（3）所有决策变量取非负值；

（4）每一约束条件的右端常数为非负值。

由此线性规划问题的标准型为：

目标函数　$$\mathrm{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1—1}$$

满足约束条件：

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1—2) \\ \\ \\ \\ (1—3) \end{matrix}$$

其简缩形式为：

$$\mathrm{Max}Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{1—4}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) & (1—5) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 & (1—6) \end{cases}$$

用向量形式可写为

$$\text{Max}Z = CX \tag{1—7}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} P_j x_j = b & (1—8)\\ x_j \geqslant 0 \quad (j = 1,2,\cdots,n) & (1—9)\end{cases}$$

其中:

$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,$P_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})^T$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$。

用矩阵形式可表示为:

$$\text{Max}Z = CX$$

$$\begin{cases}AX = b\\ X \geqslant O\end{cases}$$

其中,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=[P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n]$$ 为约束方程组的系数矩阵,

$O=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$ 是 n 维列向量。

2. 线性规划问题的标准化

把一般的线性规划问题化成标准型的过程称为线性规划问题的标准化。

(1) 目标函数的标准化。如果给出的问题中目标函数是取极小化类型,即 $\text{Min}Z = CX$,那么,根据 $\text{Min}Z = -\text{Max}(-Z)$,令 $Z' = -Z$,于是就得到:

$$\text{Max}Z' = -CZ$$

这就同标准型的目标函数形式一致了。需要指出的是,在求出 Z' 的极大值以后,要乘以(-1)才是所要求的原问题的极小值。

(2) 约束条件的标准化。当约束条件为"≤"形式时,可在不等式左边加上一个非负的变量,称为松弛变量,把不等式变为等式;当约束条件为"≥"形式时,可在不等式左边减去一个非负的变量,称为剩余变量,把不等式变为等式;若某个 $x_k<0$,则令 $x'_k = -x_k$;若某个决策变量 x_k 无限制可正可负,则可引入两个非负的变量 x'_k,x''_k,令 $x_k = x'_k - x''_k$ 即可。

例 1—5 将例 1—1 的线性规划问题化成标准型。

解:本例的目标函数已符合标准型要求,故只需在两个约束条件中引入两个非负的松弛变量 x_4,x_5 就可得到该问题的标准型为:

$$\text{Max}Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + x_4 = 1\\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 + x_5 = 3\\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0\end{cases}$$

例 1—6　将下面的线性规划问题化成标准型。

$$\text{Min}Z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \text{ 无符号限制} \end{cases}$$

解：令 $x_3 = x'_3 - x''_3$，其中 x'_3，$x''_3 \geqslant 0$，

在第一个约束条件的左边加上松弛变量 x_4，在第二个约束条件的左边减去剩余变量 x_5，在第三个约束条件的两边同乘（-1），然后令 $Z' = -Z$，把 $MinZ$ 改成 $\text{Max}Z'$，于是标准型为：

$$\text{Max}Z' = x_1 - 2x_2 + 3(x'_3 - x''_3) + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + (x'_3 - x''_3) + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + (x'_3 - x''_3) - x_5 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2(x'_3 - x''_3) = 5 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

§1.2.3　线性规划问题的解

为了帮助我们理解线性规划的求解过程，先来介绍线性规划问题的各种解的概念。

设线性规划问题的标准型为：

$$\text{Max}Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1—10}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, \cdots, m) & (1—11) \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 & (1—12) \end{cases}$$

可行解　满足约束条件式（1—11）和非负条件式（1—12）的 x_j（$j=1, 2, \cdots, n$）的一组值，称为线性规划问题的可行解。所有可行解构成的集合称为可行域。

最优解　使目标函数达到最优值的可行解，称为线性规划问题的最优解。

基　设 A 是约束方程组的 $m \times n$ 阶系数矩阵，A 的秩 $R(A) = m$，B 是 A 中 $m \times m$ 阶非奇异子式（即 $|B| \neq 0$），则称 B 是线性规划问题的一个基。

若 B 是线性规划问题的一个基，那么 B 一定是由 m 个线性无关的列向量组成。不失一般性，可设：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = [P_1, P_2, \cdots, P_m]$$

称 P_j（$j=1, 2, \cdots, m$）为**基向量**，与 P_j 对应的变量 x_j（$j=1, 2, \cdots, m$）称为**基变量**，其余变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 称为**非基变量**，在约束方程组 $AX=b$ 中，若 B 是线性规划问题的一个基，令其非基变量都等于零，就可求得 $AX=b$ 的一个解：

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m, 0, \cdots, 0)^T$，称为 $AX=b$ 关于基 B 的**基本解**。

由此可见，有一个基就可求得一个基本解，因为一般总有 $m<n$，所以基本解的个数 $\leqslant C_n^m$。

基本可行解 满足非负条件式（1—12）的基本解称为基本可行解。所以基本可行解非零分量的数目小于等于 m，当非零分量的数目小于 m 时，也就是在基本可行解中有一个或多于一个的基变量取零值时，称此解为**退化的基本可行解**。

例 1—7 设线性规划问题的约束条件为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

试求其基本解。

解：$A=[1\ 1\ 1]$，$R(A)=1$，基本解的个数 $\leqslant C_3^1=3$。在约束方程中取 x_1 为基变量，令 $x_2=x_3=0$，解得 $x_1=1$，由此可求得一个基本解 $X^{(1)}=(1,0,0)^T$。类似的可求得另外两个基本解 $X^{(2)}=(0,1,0)^T$ 和 $X^{(3)}=(0,0,1)^T$。不难验证，这三个基本解都是可行解，因而是基本可行解。但一般来说，可行解不一定是基本解。比如在本例中，$X=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})^T$ 是可行解，但不是基本解；反之，基本解也不一定是可行解。

例 1—8 已知线性规划问题的约束条件为：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+3x_2=1 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{cases}$$

这里 $R(A)=2$，取 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

对应的基本解为 $X=(2,-1,0)^T$，不满足非负条件，所以不是可行解。

以上介绍的几个解的概念，它们之间的关系可用图 1—3 表明。

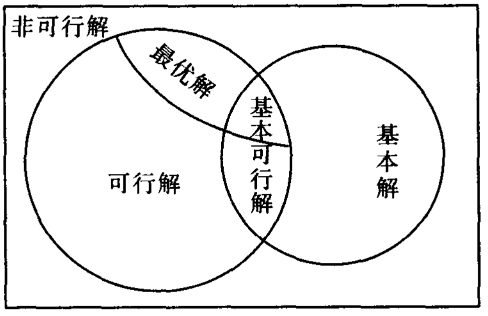

图 1—3 解的关系图

§1.2.4 线性规划问题的几何意义

在介绍图解法时，我们直观地看到可行解、最优解的几何意义，这一节从理论上进一步讨论。

1. 基本概念

凸集 设 K 是 n 维欧氏空间的一个点集，若任意两点 $X^{(1)}\in K$，$X^{(2)}\in K$ 的连线上的一切点

$$aX^{(1)}+(1-a)X^{(2)}\in K \qquad (0<a<1)$$