

College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

高等数学附册 学习辅导与习题选解

同济·第六版
(上下册合订本)

同济大学数学系 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

高等数学附册
学习辅导与习题选解

同济·第六版（上下册合订本）

同济大学数学系 编

高等教育出版社

内容提要

本书与同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)相配套,由同济大学数学系的教师按照《高等数学》第六版的章节顺序编写而成。

本书的编排与教学需求保持同步,每节(或相关的几节)包括内容要点、教学要求、释疑解难、例题增补、习题解法提要等栏目。习题解法提要对教材中较难并具有典型性的约三分之一总量的习题作出简要解答,既给学生以参考,又留有自我发挥的余地。每章末还编写了该章总习题选解。

本书主要面向使用该教材的学生,并可供使用该教材的教师作教学参考;同时又具有相对的独立性,可作为工科和其他非数学类专业学生学习高等数学课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学附册学习辅导与习题选解:同济·第六版:上下册合订本/同济大学数学系编. —北京:高等教育出版社,2007.4
ISBN 978-7-04-020744-6

I. 高… II. 同… III. 高等数学—高等学校—教学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第039604号

策划编辑 王强 责任编辑 王强 封面设计 王凌波 责任绘图 吴文信
版式设计 王莹 责任校对 王雨 责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landaco.com
			http://www.landaco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	高等教育出版社印刷厂		
开 本	787×960 1/16	版 次	2007年4月第1版
印 张	21.75	印 次	2007年4月第1次印刷
字 数	400 000	定 价	22.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 20744-00

前 言

本书是与同济大学数学系编《高等数学》第六版（由高等教育出版社出版）相配套的学习辅导书，主要面向使用该教材的学生，也可供使用该教材的教师作教学参考。

自进入新世纪以来，我国高等教育的规模有了迅速的扩展，我国的高等教育已经从以往的精英教育向大众化教育转变。在这个过程中，无论是教育界还是社会各方面，都对高等教育的质量十分关注。我们编写这本指导书，就是为了适应这种变化的形势，满足广大工科、经济、管理类等非数学类专业的学生学习高等数学的需要，期望能对提高高等数学的教学质量，对学生掌握高等数学的教学基本要求起到一种辅助的作用。

本书按《高等数学》第六版的章节顺序编排，以便与教学需求保持同步。考虑到读者使用的方便，编写时注意到使这本书具有相对的独立性。在编写时，我们对应第六版教材的顺序逐节编写，有的地方根据需要几节合并编写，每节（或合并的几节）包括如下几部分内容：

一、内容要点

提纲挈领地归纳本节的主要内容，至于具体的概念、定理、公式等一般不再列出，由读者自行复习回顾。

二、教学要求

主要根据教育部高等学校非数学类专业数学基础课程教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求确定，同时也根据当前的教学实际作了少许修改。对教学要求的层次，也沿用惯例，按“理解”、“了解”或“掌握”、“会”的次序表示程度上的差异。

三、释疑解难

针对读者在学习本节内容时常常问及的一些带有共同性的、又有较大意义的问题，选出若干个给以分析、解答，以帮助读者释疑解难。有些问题的解答还对教学内容作了补充和提高，以供一些学有余力的学生阅读参考。

四、例题增补

按照本节的教学要求，在教材原有例题和习题的基础上，适当选取少量概念性、启发性或综合性较强的例题作为补充，并作出解答和说明。

五、习题解法提要

在教材中选出较难并具有典型性的一小部分习题（约占1/3），作出习题

解法提要,供教师、学生参考。习题解法提要中的题号就是该题在原教材该节习题中的编号。

除了逐节编写上述几部分内容以外,每一章末还编写了该章教材的总习题选解,所选的习题数量约占 $1/2$ 。

本书由同济大学数学系的下列五位教师编写(按编写的章节次序排列):邱伯驹(第一、九章)、徐建平(第二、三、八章)、朱晓平(第四、五、六章)、应明(第七、十二章)、郭镜明(第十、十一章)。

在编写某些章节的释疑解难时,我们参阅了原工科数学课程教学指导委员会本科组编写的《高等数学释疑解难》,并采用了其中的少数问题,在此谨对作者表示诚挚的谢意。

对于本书中存在的问题,欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编 者

2007年1月

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 映射与函数	1
一、内容要点(1) 二、教学要求(1) 三、释疑解难(1)	
四、例题增补(3) 五、习题解法提要(4)	
第二节 数列的极限	6
一、内容要点(6) 二、教学要求(7) 三、释疑解难(7)	
四、例题增补(8) 五、习题解法提要(8)	
第三节 函数的极限	9
一、内容要点(9) 二、教学要求(9) 三、释疑解难(9)	
四、例题增补(11) 五、习题解法提要(11)	
第四、五节 无穷小与无穷大 极限运算法则	13
一、内容要点(13) 二、教学要求(13) 三、释疑解难(13)	
四、例题增补(14) 五、习题解法提要(16)	
第六节 极限存在准则 两个重要极限	18
一、内容要点(18) 二、教学要求(18) 三、释疑解难(18)	
四、例题增补(19) 五、习题解法提要(20)	
第七节 无穷小的比较	21
一、内容要点(21) 二、教学要求(22) 三、释疑解难(22)	
四、例题增补(23) 五、习题解法提要(24)	
第八、九节 函数的连续性与连续函数的运算	25
一、内容要点(25) 二、教学要求(25) 三、释疑解难(26)	
四、例题增补(27) 五、习题解法提要(28)	
第十节 闭区间上连续函数的性质	32
一、内容要点(32) 二、教学要求(32) 三、释疑解难(32)	
四、例题增补(32) 五、习题解法提要(33)	
总习题一选解	34
第二章 导数与微分	40
第一节 导数概念	40
一、内容要点(40) 二、教学要求(40) 三、释疑解难(40)	
四、例题增补(42) 五、习题解法提要(42)	

第二节 函数的求导法则	44
一、内容要点(44) 二、教学要求(45) 三、释疑解难(45)	
四、例题增补(45) 五、习题解法提要(46)	
第三节 高阶导数	47
一、内容要点(47) 二、教学要求(47) 三、释疑解难(48)	
四、例题增补(48) 五、习题解法提要(49)	
第四节 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	51
一、内容要点(51) 二、教学要求(51) 三、释疑解难(51)	
四、例题增补(52) 五、习题解法提要(52)	
第五节 函数的微分	55
一、内容要点(55) 二、教学要求(55) 三、释疑解难(55)	
四、例题增补(55) 五、习题解法提要(56)	
总习题二选解	57
第三章 微分中值定理与导数的应用	61
第一节 微分中值定理	61
一、内容要点(61) 二、教学要求(61) 三、释疑解难(61)	
四、例题增补(62) 五、习题解法提要(63)	
第二节 洛必达法则	65
一、内容要点(65) 二、教学要求(66) 三、释疑解难(66)	
四、例题增补(67) 五、习题解法提要(67)	
第三节 泰勒公式	68
一、内容要点(68) 二、教学要求(69) 三、释疑解难(69)	
四、例题增补(69) 五、习题解法提要(70)	
第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性	72
一、内容要点(72) 二、教学要求(72) 三、释疑解难(73)	
四、例题增补(73) 五、习题解法提要(75)	
第五节 函数的极值与最大值最小值	78
一、内容要点(78) 二、教学要求(78) 三、释疑解难(78)	
四、例题增补(79) 五、习题解法提要(79)	
第六、七、八节 函数图形的描绘、曲率、方程的近似解	82
一、内容要点(82) 二、教学要求(82) 三、例题增补(82)	
四、习题解法提要(83)	
总习题三选解	84
第四章 不定积分	89
第一节 不定积分的概念与性质	89

一、内容要点(89)	二、教学要求(89)	三、释疑解难(89)	
四、例题增补(90)	五、习题解法提要(91)		
第二节 换元积分法	92		
一、内容要点(92)	二、教学要求(92)	三、释疑解难(93)	
四、例题增补(94)	五、习题解法提要(95)		
第三节 分部积分法	98		
一、内容要点(98)	二、教学要求(98)	三、释疑解难(98)	
四、例题增补(99)	五、习题解法提要(100)		
第四节 有理函数的积分	101		
一、内容要点(101)	二、教学要求(101)	三、释疑解难(101)	
四、例题增补(102)	五、习题解法提要(103)		
总习题四选解	105		
第五章 定积分	109		
第一、二节 定积分的概念与性质 微积分基本公式	109		
一、内容要点(109)	二、教学要求(109)	三、释疑解难(109)	
四、例题增补(110)	五、习题解法提要(112)		
第三节 定积分的换元法和分部积分法	116		
一、内容要点(116)	二、教学要求(116)	三、释疑解难(116)	
四、例题增补(117)	五、习题解法提要(118)		
第四节 反常积分	121		
一、内容要点(121)	二、教学要求(121)	三、释疑解难(121)	
四、例题增补(122)	五、习题解法提要(123)		
总习题五选解	123		
第六章 定积分的应用	128		
第一、二、三节 定积分的几何与物理应用	128		
一、内容要点(128)	二、教学要求(128)	三、释疑解难(128)	
四、例题增补(129)	五、习题解法提要(130)		
总习题六选解	134		
第七章 微分方程	137		
第一节 微分方程的基本概念	137		
一、内容要点(137)	二、教学要求(137)	三、释疑解难(137)	
四、例题增补(139)	五、习题解法提要(139)		
第二、三节 可分离变量的微分方程与齐次方程	140		
一、内容要点(140)	二、教学要求(140)	三、释疑解难(140)	
四、例题增补(142)	五、习题解法提要(144)		

第四节 一阶线性微分方程·····	147
一、内容要点(147) 二、教学要求(147) 三、释疑解难(147)	
四、例题增补(149) 五、习题解法提要(151)	
第五节 可降阶的高阶微分方程·····	153
一、内容要点(153) 二、教学要求(153) 三、释疑解难(153)	
四、例题增补(154) 五、习题解法提要(156)	
第六节 高阶线性微分方程·····	158
一、内容要点(158) 二、教学要求(158) 三、释疑解难(158)	
四、例题增补(159) 五、习题解法提要(160)	
第七、八节 常系数线性微分方程·····	160
一、内容要点(160) 二、教学要求(161) 三、释疑解难(161)	
四、例题增补(162) 五、习题解法提要(164)	
总习题七选解·····	168
第八章 空间解析几何与向量代数·····	173
第一节 向量及其线性运算·····	173
一、内容要点(173) 二、教学要求(173) 三、释疑解难(173)	
四、例题增补(173) 五、习题解法提要(174)	
第二节 数量积、向量积、*混合积·····	175
一、内容要点(175) 二、教学要求(175) 三、释疑解难(175)	
四、例题增补(176) 五、习题解法提要(176)	
第三节 曲面及其方程·····	177
一、内容要点(177) 二、教学要求(178) 三、释疑解难(178)	
四、例题增补(178) 五、习题解法提要(178)	
第四节 空间曲线及其方程·····	179
一、内容要点(179) 二、教学要求(179) 三、释疑解难(179)	
四、例题增补(180) 五、习题解法提要(180)	
第五、六节 平面及其方程 空间直线及其方程·····	181
一、内容要点(181) 二、教学要求(181) 三、释疑解难(182)	
四、例题增补(182) 五、习题解法提要(184)	
总习题八选解·····	186
第九章 多元函数微分法及其应用·····	190
第一节 多元函数的基本概念·····	190
一、内容要点(190) 二、教学要求(190) 三、释疑解难(190)	
四、例题增补(192) 五、习题解法提要(193)	
第二节 偏导数·····	194

一、内容要点(194)	二、教学要求(195)	三、释疑解难(195)
四、例题增补(196)	五、习题解法提要(196)	
第三节 全微分		198
一、内容要点(198)	二、教学要求(198)	三、释疑解难(198)
四、例题增补(199)	五、习题解法提要(200)	
第四节 多元复合函数的求导法则		202
一、内容要点(202)	二、教学要求(202)	三、释疑解难(202)
四、例题增补(203)	五、习题解法提要(205)	
第五节 隐函数的求导公式		208
一、内容要点(208)	二、教学要求(208)	三、释疑解难(208)
四、例题增补(209)	五、习题解法提要(212)	
第六节 多元函数微分学的几何应用		215
一、内容要点(215)	二、教学要求(215)	三、释疑解难(215)
四、例题增补(216)	五、习题解法提要(216)	
第七节 方向导数和梯度		219
一、内容要点(219)	二、教学要求(219)	三、释疑解难(219)
四、例题增补(221)	五、习题解法提要(222)	
第八节 多元函数的极值及其求法		223
一、内容要点(223)	二、教学要求(224)	三、释疑解难(224)
四、例题增补(225)	五、习题解法提要(227)	
总习题九选解		229
第十章 重积分		235
第一、二节 二重积分的概念、性质及算法		235
一、内容要点(235)	二、教学要求(235)	三、释疑解难(235)
四、例题增补(236)	五、习题解法提要(238)	
第三节 三重积分的概念、性质及算法		245
一、内容要点(245)	二、教学要求(245)	三、释疑解难(245)
四、例题增补(247)	五、习题解法提要(248)	
第四节 重积分的应用		251
一、内容要点(251)	二、教学要求(251)	三、释疑解难(251)
四、例题增补(253)	五、习题解法提要(254)	
总习题十选解		257
第十一章 曲线积分与曲面积分		264
第一节 对弧长的曲线积分(第一类曲线积分)		264
一、内容要点(264)	二、教学要求(264)	三、释疑解难(264)

四、例题增补(266) 五、习题解法提要(267)	
第二节 对坐标的曲线积分(第二类曲线积分).....	269
一、内容要点(269) 二、教学要求(270) 三、释疑解难(270)	
四、例题增补(271) 五、习题解法提要(272)	
第三节 格林公式及其应用.....	275
一、内容要点(275) 二、教学要求(275) 三、释疑解难(275)	
四、例题增补(277) 五、习题解法提要(279)	
第四、五节 两类曲面积分的概念、性质及计算法.....	284
一、内容要点(284) 二、教学要求(284) 三、释疑解难(284)	
四、例题增补(287) 五、习题解法提要(289)	
第六、七节 高斯公式和斯托克斯公式	293
一、内容要点(293) 二、教学要求(293) 三、释疑解难(293)	
四、例题增补(295) 五、习题解法提要(297)	
总习题十一选解.....	300
第十二章 无穷级数	306
第一节 常数项级数及其性质.....	306
一、内容要点(306) 二、教学要求(306) 三、释疑解难(306)	
四、例题增补(307) 五、习题解法提要(308)	
第二节 常数项级数的审敛法.....	309
一、内容要点(309) 二、教学要求(310) 三、释疑解难(310)	
四、例题增补(312) 五、习题解法提要(314)	
第三节 幂级数.....	315
一、内容要点(315) 二、教学要求(315) 三、释疑解难(315)	
四、例题增补(317) 五、习题解法提要(318)	
第四、五节 函数展开成幂级数及其应用	319
一、内容要点(319) 二、教学要求(320) 三、释疑解难(320)	
四、例题增补(322) 五、习题解法提要(325)	
第七、八节 傅里叶级数与一般周期函数的傅里叶级数	326
一、内容要点(326) 二、教学要求(326) 三、释疑解难(327)	
四、例题增补(328) 五、习题解法提要(329)	
总习题十二选解.....	331

第一章 函数与极限

第一节 映射与函数

一、内容要点

1. 集合的一般概念,集合的表示法,集合的基本运算——并、交、差,两个集合的直积;常见的几类实数集:区间、邻域、去心邻域;平面上矩形区域的直积表示法.
2. 映射的概念以及满射、单射、一一映射、逆映射和复合映射.
3. 函数的概念,函数的几种特性,反函数和复合函数,反函数存在的一个充分条件.
4. 函数的四则运算,初等函数,* 双曲函数.

二、教学要求

1. 理解函数概念,了解函数的几种特性:有界性、单调性、奇偶性和周期性.
2. 理解复合函数概念,了解反函数概念.
3. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

三、释疑解难

1. 从映射出发定义的函数与传统的函数定义不一致,如何解释?

答 从映射出发定义的函数是:“设数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数.”按定义,它由三部分构成:一是定义域 D ,二是函数值所在的范围:实数集 \mathbf{R} ,三是对应法则 f ,并称对应法则 f 是定义在 D 上的函数. 这个定义突出了对应法则 f ,它是函数定义的核心.

传统的函数定义(如《高等数学》第四版中的表述):“设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数.”按此定义,它由两部分构成:一是定义域 D ,二是变量 y 和变量 x 之间的对应法则. 如果确定的数值总是惟一的(这时函数称为单值函数),则二的内容中也隐含了函数值在实数集 \mathbf{R} 内. 因此,传统的函数定义,如果是单值函数,那么它所包含的函数的要素与从映射出发定义的函

数的要素是完全一致的.

两个定义也有不一致的地方:其一,从映射出发定义的函数,必定是单值函数.而传统的函数定义(如《高等数学》第四版中的表述),包含单值函数和多值函数;其二,传统的函数定义是有缺陷的,它称“ y 是 x 的函数”,而同时又称“ y 是与 x 对应的函数值”,这就把函数与函数值混在一起了;其三,传统的函数记号与映射的记号不尽相同,但它也有使用方便之处.以正弦函数为例,如用映射记号表示,则写作:映射 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 这里的 f 规定为: $\forall x \in \mathbf{R}, y = f(x) = \sin x$; 而用传统的函数记号,只要用 $f(x) = \sin x$ 表示即可,这里省略了大家明确的 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, 比较简明.所以,在《高等数学》第六版中,除利用映射的记号外,还采用了传统的函数记号.

2. 单调函数必定存在反函数,不单调的函数是否一定不存在反函数?

答 不是的.函数的单调性只是函数存在反函数的一个充分条件,并不是必要条件.函数 f 是否存在反函数,取决于 f 是否为其定义域 D 到 $f(D)$ 上的单射.如果是的话,那么 f 就存在反函数 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$; 否则就不存在反函数.不单调的函数,也可能是其定义域 D 到 $f(D)$ 上的单射,这时它就存在反函数.例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0], \\ x^2 + 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

在区间 $[-1, 1]$ 上并不单调(图 1-1(a)), 但它是 $[-1, 1]$ 到 $[0, 2]$ 上的单射, 所以存在反函数(图 1-1(b))

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -x & x \in [0, 1], \\ \sqrt{x-1}, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

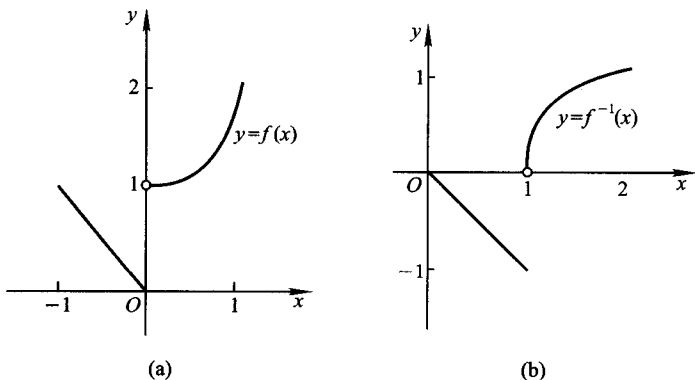


图 1-1

3. 如何理解“函数 $y = \ln(x+1)$ 是由函数 $u = x+1$ 与函数 $y = \ln u$ 复合而成的”这种说法?

答 按照复合函数的定义,函数 g 与函数 f 能构成复合函数 $f \circ g$ 的条件

是: g 的值域 R_g 必须含在 f 的定义域 D_f 内, 即 $R_g \subset D_f$. “函数 $y = \ln(x+1)$ 是由函数 $u = x+1$ 与函数 $y = \ln u$ 复合而成的”这种说法, 在教材中已经被指出这是一种为了简便起见习惯说法. 这种说法未将函数 $u = g(x) = x+1$ 与函数 $u = g^*(x) = x+1, x \in (-1, +\infty)$ 严格区分. 事实上, $y = \ln(x+1)$ 应理解成是由函数 $u = g^*(x)$ 与函数 $y = f(u) = \ln u$ 复合而成的, 这里 $R_{g^*} \subset D_f$.

4. 如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在数集 X 上都无界, 那么 $f(x)g(x)$ 在 X 上也一定无界吗?

答 不一定. 例如, $f(x) = \tan x, g(x) = \cot x$ 在 $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上都无界, 但是 $f(x)g(x) \equiv 1, x \in X$. 因而 $f(x)g(x)$ 在 X 上是有界的.

四、例题增补

例 1 已知 $f(\sqrt{x}-1) = x+2$, 求函数 $f \circ f$ 的值域.

解 记号 $f(\sqrt{x}-1)$ 表示由 $u = \sqrt{x}-1$ 和 $f(u)$ 构成的复合函数. 现在, 先求 f 的表达式:

因为 $u = \sqrt{x}-1$, 所以

$$x = (u+1)^2, f(u) = (u+1)^2 + 2. \quad (1)$$

在 $u = \sqrt{x}-1$ 中, $x \geq 0 \Rightarrow u \geq -1$, 从而 f 的定义域为 $D_f = [-1, +\infty)$, 值域 $R_f = [2, +\infty)$.

再求 $f \circ f$ 的表达式:

$$\text{由(1)得 } f[f(u)] = [f(u)+1]^2 + 2 = [(u+1)^2 + 3]^2 + 2. \quad (2)$$

当 $u \in D_f$ 时, $f(u) \in R_f \subset D_f \Rightarrow f \circ f$ 的定义域 $D_{f \circ f} = D_f = [-1, +\infty)$.

由(2)知, 当 $u = -1$ 时, $f[f(-1)] = 11$ 是 $f \circ f$ 的最小值, 即 $f[f(u)] \geq 11$. 又 $f[f(u)]$ 在 $D_{f \circ f}$ 上无界. 于是函数 $f \circ f$ 的值域是区间 $[11, +\infty)$.

例 2 设函数 $f(x), g(x), h(x)$ 都是区间 I 上的单调增加函数, 对 $\forall x \in I$, 有 $f(x), g(x), h(x) \in I$, 且

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad (1)$$

证明

$$f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)], \forall x \in I.$$

证 因为 $\forall x \in I$, 有 $f(x), g(x), h(x) \in I$,

所以复合函数 $f \circ f, f \circ g, g \circ g, g \circ h, h \circ h$ 均存在, 且它们都在区间 I 上有定义.

由 f, g, h 的单调性及条件(1), 可得, 对 $\forall x \in I$, 有

$$\begin{aligned} f[f(x)] &\leq f[g(x)], & g[g(x)] &\leq g[h(x)], \\ f[g(x)] &\leq g[g(x)], & g[h(x)] &\leq h[h(x)]. \end{aligned}$$

从而推得

$$f[f(x)] \leq g[g(x)] \leq h[h(x)], \forall x \in I.$$

五、习题解法提要

(习题 1-1)

3. 设映射 $f: X \rightarrow Y, A \subset X, B \subset X$. 证明

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

证 (1) 按集合相等的定义证明. 即, 证明 $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$, 且 $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.

(2) 按子集的定义证明:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\Rightarrow \exists x \in A \cap B, y = f(x) \Rightarrow \exists x \in A \text{ 且 } x \in B, y = f(x) \\ &\Rightarrow y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$

注意: 反之, 由 $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A) \text{ 且 } y \in f(B) \Rightarrow \exists x \in A, y = f(x); \exists x' \in B, y = f(x')$. 由于 f 不一定是单射, 未必有 $x = x'$. 例如, f 为函数 $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}, A = (-\infty, 0], B = [-1, +\infty), A \cap B = [-1, 0], f(A \cap B) = [0, 1], \text{ 但 } f(A) \cap f(B) = [0, +\infty)$.

7. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1)$;

(2) $y = x + \ln x, (0, +\infty)$.

证 (1) 先将函数表达式变形

$$y = \frac{x}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x},$$

再按函数单调的定义证明.

(2) 按函数单调的定义证明.

8. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

证 设 $-l < x_1 < x_2 < 0$, 则 $0 < -x_2 < -x_1 < l$.

由 f 是奇函数, 得 $f(x_2) - f(x_1) = -f(-x_2) + f(-x_1)$,

由 f 在 $(0, l)$ 内单调增加, 得 $f(-x_1) - f(-x_2) > 0$.

12. 求下列函数的反函数:

(3) $y = \frac{ax+b}{cx+d} (ad-bc \neq 0)$;

(6) $y = \frac{2^x}{2^x+1}$.

解 (3) 先判定反函数存在.

设 $x_1 \neq x_2$, 且 $cx_i + d \neq 0 (i=1, 2)$, 则

$$\frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} - \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{(ad - bc)(x_2 - x_1)}{(cx_1 + d)(cx_2 + d)} \neq 0,$$

这说明所给函数是单射, 存在反函数.

$$\text{由 } y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ 解得 } x = \frac{b - dy}{cy - a}, \text{ 或改记为 } y = \frac{b - dx}{cx - a}.$$

(6) 因为 $y = \frac{2^x}{2^x + 1} = 1 - \frac{1}{2^x + 1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调增加, 且 $0 < y < 1$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 1$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$, 所以, 所给函数存在反函数, 且反函数的定义域为 $(0, 1)$.

$$\text{由 } y = 1 - \frac{1}{2^x + 1} \text{ 解得 } x = \log_2 \frac{y}{1 - y}, \text{ 或改记为 } y = \log_2 \frac{x}{1 - x}, x \in (0, 1).$$

15. 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

- (1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;
 (3) $f(x+a)$ ($a > 0$); (4) $f(x+a) + f(x-a)$ ($a > 0$).

解 (1) $0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$;

(2) $0 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow x \in [2n\pi, (2n+1)\pi] (n \in \mathbf{Z})$;

(3) $0 \leq x+a \leq 1 \Rightarrow x \in [-a, 1-a]$,

(4) $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{当 } 0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } x \in [a, 1-a], \\ \text{当 } a > \frac{1}{2} \text{ 时, 定义域为 } \emptyset. \end{cases}$

18. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购一台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元.

- (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;
 (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数;
 (3) 某一销售商订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

解 设订购 x 台, 实际售价每台 p 元, 厂方所获利润 P 元. 则按题意, 有当 $x \in [0, 100]$ 时, $p = 90, P = (90 - 60)x = 30x$.

当 $x > 100$ 时, 超过 100 台的订购量为 $x - 100$, 售价降低 $0.01(x - 100)$, 但最低价为 75, 即降价数不超过 $90 - 75 = 15$, 故 $0.01(x - 100) \leq 15 \Rightarrow x \leq 1600$. 于是

当 $x \in (100, 1600]$ 时, $p = 90 - 0.01(x - 100) = 91 - 0.01x, P = (91 - 0.01x - 60)x = 31x - 0.01x^2$.

当 $x \in (1600, +\infty)$ 时, $p=75, P=(75-60)x=15x$.

因此, 有

$$(1) p = \begin{cases} 90, & x \in [0, 100], \\ 91 - 0.01x, & x \in (100, 1600], \\ 75, & x \in (1600, +\infty). \end{cases}$$

$$(2) P = \begin{cases} 30x, & x \in [0, 100], \\ 31x - 0.01x^2, & x \in (100, 1600], \\ 15x, & x \in (1600, +\infty). \end{cases}$$

$$(3) x=1000, P=31 \times 10^3 - 0.01 \times 10^6 = 21000 (\text{元}).$$

20. 利用以下联合国统计办公室提供的世界人口数据以及指数模型来推测 2010 年的世界人口.

年 份	人口数(百万)	当年人口数与上一年人口数的比值
1986	4930	
1987	5023	1.0176
1988	5111	1.0175
1989	5201	1.0176
1990	5329	1.0246
1991	5422	1.0175

解 由表中第 3 列, 猜想 1986 年后任一年的世界人口是前一年人口的 1.018 倍. 于是, 在 1986 年后的第 t 年, 世界人口将是

$$P(t) = 4936 \cdot (1.018)^t \quad (\text{百万}).$$

2010 年对应 $t=24$, 于是

$$P(24) = 4936 \cdot (1.018)^{24} \approx 7573.9 \text{ 百万} \approx 76 (\text{亿}),$$

即推测 2010 年的世界人口约为 76 亿.

第二节 数列的极限

一、内容要点

1. 数列极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 的概念及 $\epsilon-N$ 定义.

2. 收敛数列的性质: 极限的唯一性、收敛数列的有界性、保号性以及收敛数列的子数列的性质.