数学模型选讲

王树禾/编著

科学出版社
www.sciencep.com

数学模型选讲

王树禾　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书对众多实际问题建立数学模型且给出论证与算法，注重数学的严谨性、数模的实用性、算法的有效性和呈现方式的趣味性与可读性. 选题出自自然科学、工程技术、社会生活、国家盛衰、军事战争、交通通信、医疗卫生、选举评优、投资发展、计划生育、天气预报、对策运筹、试验设计、统筹优选、密码编译、物价问题、经济调整、资源管理、混沌紊动等领域，或十分重要，或十分敏感. 通过这批非人工的"真问题"的学习，强化读者化实际模型为数学模型的意识和建模解题的能力与技巧.

本书系应用数学专业教材，也可供理工、经管等专业大学生与研究生选学，还是数模竞赛(MCM)集训班与有关科研人员的理想参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型选讲/王树禾编著. —北京：科学出版社，2008
ISBN 978-7-03-020208-6

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004011 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 1 月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1—4 000 字数：356 000

定价：28.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前　　言

科学的目的不只是解释现象，科学的主要任务是建立数学模型.

——冯·诺依曼(Von Neumann)

当今社会日趋数学化，随着人类生活质量的提高，生产力的发展和科学文化的进步，数学迅速介入一切领域，高技术实则为一种数学技术. 所谓数学技术，即指把现实的问题转述成一个相应的数学模型，且用计算机加以解决或用数学理论定性定量加以研究，得出那个现实问题的定量结论或重要性质. 恰如伟大的哲学家与数学家笛卡儿(Descartes)所云："一切问题都可以化成数学问题."

但是，如何建立和解答纷纭复杂的实际问题的数学模型，我们很难给出普适的原则. 本书以众多典型的具体问题之建模分析，向读者显示建立数学模型的思路与技巧. 所谓数学模型，乃是现实世界当中某一类特殊的运动变化过程或关系或结构的一种模拟性的数学结构，是对现实模型的理想化，是一种科学的抽象.

在建模过程中，不得不把那些对我们关心的问题影响甚微的因素忽略掉，不然，所建模型因为数学结构太复杂而失去数学上的可解性；但也不能把足够相关的因素忽略掉，不然所建模型因为不能足够准确地反映实际情况而失去可靠性. 可解性与可靠性同时最佳是很罕见的，一般我们总是在可解性的前提下，力争有满意的可靠性.

同一个现实问题，可以建立不同的数学模型. 事实上，被我们研究的实际问题好比一个"黑匣子"，要用各种方法从不同角度去观察探讨它的秘密. 数学模型的建立需要有创造性、想像力甚至具有一定的艺术性，必须接受实践的检验，有时需要反复修正.

本书涉及的知识面极宽，在写作过程中，我们一般不再论证所用的数学知识，采取拿过来就用的态度，这些知识主要来自线性代数、解析几何、微积分、图论、运筹学、组合数学、常微分方程、偏微分方程、混沌、数理统计等，我们假设读者对这些数学分支已经通晓，如果有必要，读者可以选取本书列出的参考文献去查阅.

本书是作者在中国科学技术大学应用数学专业和全校 MCM(Mathematical Contest in Modeling)集训班多年主讲数学模型课的讲稿基础上整理成册的. 采用

本书做教材，如果每周 4 学时，一学期结业. 除了可作为有关专业大学生与研究生的教材外，本书对应用数学工作者和准备参赛 CUMCM 和国际 AMCM 的同学也是一部理想读本.

书末列有习题 100 例，与课文内容一样重要，供教师布置作业时挑选. 至于课文，未必全部授完，可按课时与听课学生的专业和学时酌情选讲，剩余部分鼓励学生自修研习.

王树禾

2007 年于中国科学技术大学

目　　录

一 离散数学模型

计算机科学、网络信息和数字化浪潮，使得离散数学模型价值连城.

1.1 网络上的里程碑

给定连接若干城市的铁路网，找一条给定两城市间的最短路线，此即所谓**最短路线问题**. 它的数学模型如下：

$G(V,E)$是加权图，即$\forall e\in E(G)$，$\exists w(e)\in \mathbf{R}^+$，记

$$W(G)=\sum_{e\in E(G)} w(e),$$

$\forall u,v\in V(G)$，求轨 $P_0(u,v)$，使得

$$W(P_0)=\min_{P\in \mathscr{P}(u,v)}\{W(P)\},$$

其中，$\mathscr{P}(u,v)$是从 u 到 v 的轨集合.

众多实际问题可化成图论模型，欲知其详，可细读王树禾编著的《图论》[1].

以后我们称上述 $P_0(u,v)$之长 $W(P_0)$为顶点 u,v 之**距离**.

边权在友谊图中代表两位朋友感情深厚的程度；在通信图中，边权表示通信线路的造价或维修费用，等等. 许多不同的实际问题，其数学模型与上述铁路网上最短路线问题的数学模型一致.

为解决最短路线问题，下面介绍顶点 $u_0\in V(G)$到加权连通图 $G(V,E)$各顶点最短轨的一种有效算法. 所谓算法，指一组有穷规划，它准确告知，为解决给定的问题何时应做何种操作.

一个图论算法的计算量为 $O(P(\nu,\varepsilon))$时，称其为有效算法或好算法，其中，$P(\nu,\varepsilon)$是多项式，ν 与 ε 分别是图的顶数与边数.

Dijkstra 算法（u,v 不相邻时，$w(uv)=\infty$）

(1) 令 $l(u_0)=0$，$l(v)=\infty$，$v\neq u_0$，$S_0=\{u_0\}$，$i=0$.

(2) 对每个 $v\in\overline{S_i}$（$\overline{S_i}=V(G)-S_i$），$\min\{l(v),l(u_i)+w(u_iv)\}$代替 $l(v)$；设 u_{i+1}是使 $l(v)$取最小值的 $\overline{S_i}$ 中的顶，令 $S_{i+1}=S_i\cup\{u_{i+1}\}$.

(3) 若 $i=\nu-1$,止;若 $i<\nu-1$,用 $i+1$ 代替 i,转(2).

由上述算法知:

(1) S_i 中各顶标 $l(u)$ 即为 u_0 到 u 的距离.又因 $\nu<+\infty$,故有限步之后,$V(G)$ 中每一顶都标志了与 u_0 的距离,从而可以找到各顶到 u_0 的最短轨.

(2) Dijkstra 算法的时间复杂度为 $O(\nu^2)$,所以是有效算法.

例如图 1-1 中由顶 u_0 到各顶的最短轨及距离(各顶标)已标志在图 1-1(h)中,u_0 至各顶的最短轨可按图中粗实线找到.

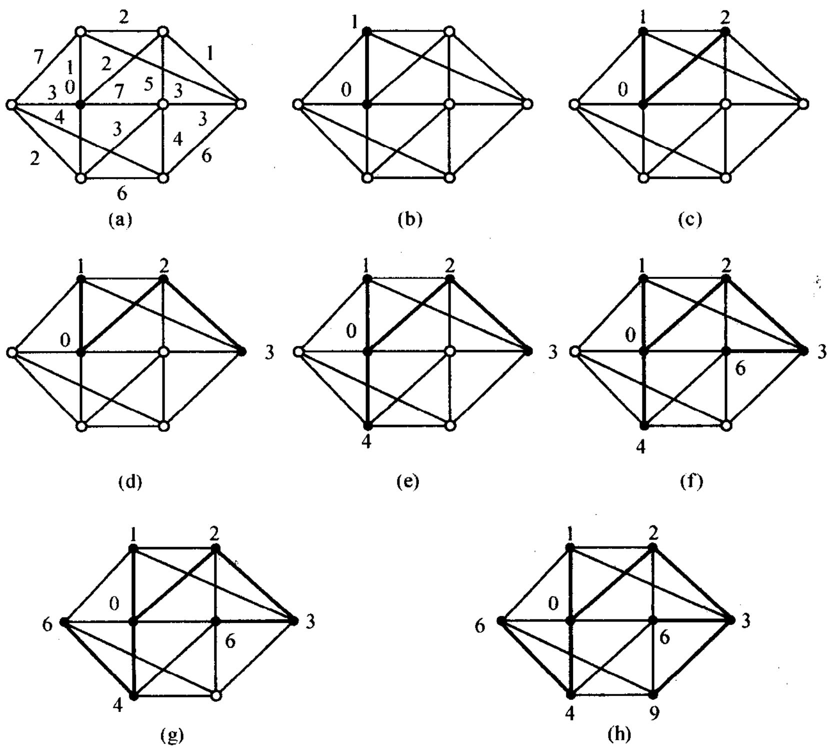

图 1-1

1.2　连接问题

今欲修筑连接几个城市的铁路,已知 i 城与 j 城之间铁路造价为 c_{ij},试设计一个路线图,使总造价最低.

上述连接问题的数学模型是:在已知的加权连通图上求最小权的生成连通子图,它显然是一个生成树,这个生成树也叫最轻树或最优树,下面介绍求最优树的算法.

Kruskal 算法

(1) 选 $e_1 \in E(G)$,使得 $w(e_1)=\min$.

(2) 若 $e_1, e_2, \cdots, e_i$ 已选好,则从 $E(G)-\{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$中选取 e_{i+1},使得

① $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_i, e_{i+1}\}]$中无圈,且

② $w(e_{i+1})=\min$.

(3) 继续进行到选出 $e_{\nu-1}$为止.

其中 $G[E'](E' \subseteq E(G))$叫做 E'的导出子图,它是以 E'为边集,以 E'中边之端点为顶的图.

定理 Kruskal 算法选得的边的导出子图为最优树.

证 Kruskal 算法得出的子图 T^* 是生成树自不待说,下证它的最优性. 设 T^* 不是最优树,T_1 是 G 的任给定的一个生成树,$f(T_1)$是$\{e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}\}$中不在 T_1 上的 e_i 的脚标 i 的最小值,令 T 是使 $f(T)$最大的一个最优树,因为 T^* 不是最优树,又 $E(T^*)=\{e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}\}$,故 $e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}$ 中必有不在 $E(T)$中的边. 设 $f(T)=k$,即 $e_1, e_2, \cdots, e_{\nu-1}$在 T 与 T^* 上,而 e_k 不在 T 上,于是 $T+e_k$ 中有一个圈 C. 令 e_k'是在 T 上而不在 T^* 上的边,且 e_k'在 C 上,显然,$T'=(T+e_k)-e_k'$也是生成树,又 $W(T')=W(T)+w(e_k)-w(e_k')$. 由算法知,$e_k$ 本是使 $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_k\}]$上无圈的权最小的边,又 $G[\{e_1, e_2, \cdots, e_k, e_{k'-1}\}]$是 T 之子图,也无圈,则有 $w(e_k') \leqslant w(e_k)$. 于是 $W(T') \geqslant W(T)$,即 T'也是最优树,但 $f(T')>k=f(T)$,与 $f(T)$之最大性矛盾,证毕.

例如,求北京(Pe)、巴黎(Pa)、纽约(NY)、伦敦(L)、墨西哥城(MC)与东京(T)六大城市间航线的最优连接.

用 Kruskal 算法求解的结果如图 1-2 所示,其中粗实线是求出的最优树上的边,此树总权为 122.

还有一个所谓 Steiner 连接问题:

在一个连通的铁路网上指定若干城市,要求从此铁路网上选出一个连通的子铁路网,使得上述指定的城市在此子网上,且此子网的总长度最小.

这个问题的数学模型是:

输入 连通图 $G(V, E)$,边权 $l(e)>0$,自然数 k,$X \subseteq V(G)$.

问 G 上是否有树 $T(W, F)$,使得 $X \subseteq W \subseteq V(G)$,$F \subseteq E(G)$,且 $\sum_{e \in F} l(e) \leqslant k$?

上述问题也称 Steiner 树问题,代号 ST,除了对特殊的图 $G(V, E)$,Steiner 树有有效算法外,至今尚未设计出对任何图 G 皆适用的有效算法! 事实上,ST 是所谓 NPC 问题集合中的一元;NPC 是一个问题集合的代号,NPC 集合中的问题们至今无一个问题找到有效算法,而且已经证明,只要 NPC 中有一个问题有有效算法,则 NPC 中的每个问题都存在有效算法,反之,若能证明 NPC 中有一个问题确实不存在

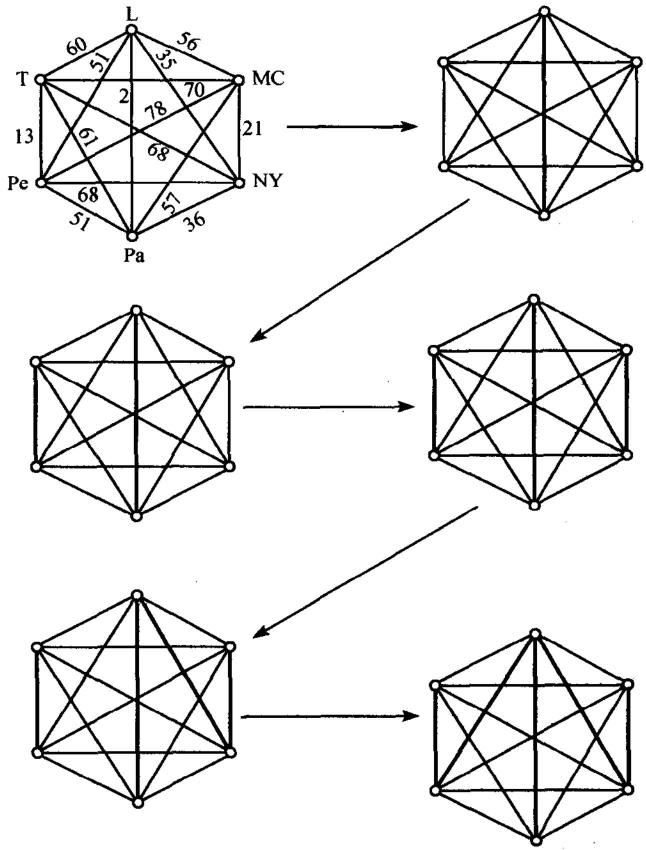

图 1-2

有效算法，则 NPC 中的每个问题都不存在有效算法. NPC 中的每个问题都是难以解决也许是真的不存在有效算法的问题！后面我们设专门的章节讨论这个问题.

1.3　碗摞模型与 Catalan 数

饭后，姊妹洗碗，妹妹把姐姐洗过的碗一个一个放在碗橱摞成一摞，共有 n 个图样两两相异的碗，洗前也摞成一摞，小妹贪玩，碗未必及时放入橱内，姐姐就把洗过的碗摞起来，问小妹摞起的碗可能有几种方式？

与上述摞碗问题有相同数学模型的问题还有许多，例如，一个汽车队在狭窄路面上行驶，不得超车，但可以进入一个死胡同去加油，之后再插队行驶，共 n 辆汽车，问可能有几种排列不同的车队开出城去？

在计算机存储问题当中，n 个字符都要进入“先入后出”存储器 S 恰一次，进入

S 时是有序的，问出 S 的不同字符列可能有几种？

上述三个问题的答案是一致的，为解决上述问题，我们引入“好括号列”的概念与其计数.

括号列是指由左括号“(”和右括号“)”组成的有限序列，所谓好括号列，是指

(1) 空列是好的.

(2) 若 A 与 B 是好括号列，则 AB 也是.

(3) 若 A 是好括号列，则 (A) 也是.

(4) 除(1)、(2)、(3)所称的好括号列外，再无其它好括号列(或称其它括号列为“坏括号列”).

例如(()(()))是好列，(()))(()是坏列.

定理 1 一个括号列是好括号列的充要条件是它由偶数个括号组成，其中一半是左括号，且从左向右读这个括号列时，读出的右括号个数不会超过读出的左括号个数.

证 若括号列是好列，显然它是由左括号占半数的偶数个括号组成，下面用关于括号个数的归纳法证明从左到右读出的左括号个数不少于读出的右括号个数. 若括号数为 2，命题自真. 设 m 个左括号和 m 个右括号的好列命题已真，我们考虑 n 个左括号与 n 个右括号组成的好括号列，其中 $m<n$.

① 若造此括号列时，最后一步是(2)，此括号列形如 AB，A 与 B 皆是非空好列，从左向右读时，只要还在读 A，由归纳法假设，读出的左括号不比右括号少. 当我们读到 A 的最后一个括号时，读出的左右括号个数一致，再读下去，即读 B. 由归纳去假设，读出的右括号总数仍不超过读出的左括号总数.

② 若造这个括号列时，最后一步是(3)，命题显然成立.

下面证明由左括号占半数的括号列，若从左至右读时，读出的左括号个数不少于右括号个数，则此括号列是好列. 仍用关于括号个数的归纳法，括号数为 2 时，命题显然成立. 假设 $m<n$ 时，m 个左括号 m 个右括号组成的括号列命题已真，考虑 n 个左括号 n 个右括号的括号列，从左向右读时，读了 $2m$ 个括号后，读得左右括号个数相等，由归纳法假设，读出的这个子列是好括号列，右面未读的子列 B 也满足命题条件，由归纳法假设，B 也是好括号列，于是整个括号列 AB 也是好括号列.

若上述非空列 A 不存在，我们从左向右读时，读了第一个括号而未读其它括号时，由命题条件知第一个括号为左括号，读到只剩一个括号未读时，已读出的左括号不比右括号少，又左括号、右括号各占一半，故最后一个括号是右括号. 于是原括号列为 (A)，A 仍满足命题条件，由归纳法假设，A 是好列，故 (A) 也是好括号列，证毕.

定理 2 由 $2n$ 个括号组成的好括号列总数为

$$C(n)=\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}\quad (C(n)\text{ 称为 Catalan 数}).$$

证　由于 $p_1, p_2, \cdots, p_{2n}$ 是 n 个左括号 n 个右括号构成的坏括号列，由定理 1 知，有一个前缀，其中右括号比左括号多. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_j$ 的右括号比左括号多，且 j 最小，这时右括号只比左括号多 1 个，把从 p_{j+1} 开始的每个括号"翻"过来，则得 $n-1$ 个左括号 $n+1$ 个右括号的坏括号列，显然这一变换是可逆的，故 n 个左括号与 n 个右括号组成的坏括号列与 $n-1$ 个左括号 $n+1$ 个右括号组成的括号列一一对应，而 $n-1$ 个左括号 $n+1$ 个右括号组成的括号列共计 C_{2n}^{n+1} 个，n 个左括号 n 个右括号组成的括号列共计 C_{2n}^{n} 个，所以 $2n$ 个括号的好括号列共有

$$C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1} = \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} - \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n)}{(n+1)!}$$
$$= \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n}.$$

证毕.

回到我们前面提出的那三个实际问题，有字符进 S 时，记"("，出 S 时记")"，当 n 个字符全部出了 S 后，得到了 n 个左括号 n 个右括号组成的 $2n$ 个括号的括号列，由定理 1，得到的是好括号列，又由于这种好括号列与出 S 的字符列之间一一对应，故我们的三个实际问题答案皆为 $C(n)$.

1.4　文章码长与 Huffman 树

图 1-3 中画的是一棵以 v_0 为根的二元树(也称二叉树)，兄弟关系左标 0 右标 1，每个叶表示一个字母，由根到叶的轨上的有序 0-1 序列为该叶的代码，00110110100001110111100010100001 的译文为 Good morning.

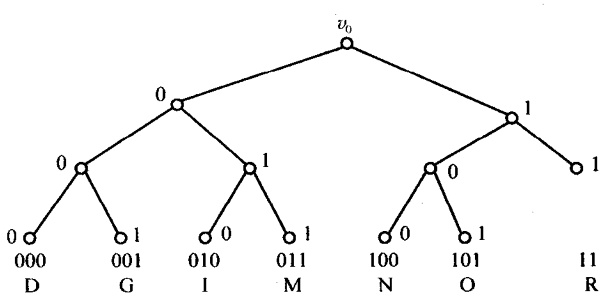

图 1-3

若设计一个 26 个叶的二元树，每个叶代表一个英语字母，则可以用此树的叶码表达任何一句话，进而表达任何一篇文章的信息. 自然，我们希望总码长越短越好，字母(如 Z)出现的频率小的，相应的叶码长一点还不怕，但字母出现的频率大

的(如 e)相应的叶码可不要太长，以期整个文章总码长最短.

这一问题的数学模型即所谓 Huffman 树.

以 v_0 为根 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 为叶的二元树中，轨 $P(v_0,v_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 的长 l_i 叫做 v_i 的码长，v_i 代表的事物出现的概率为 p_i，且 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$，使得

$$m(T)=\sum_{i=1}^{n}p_il_i=\min.$$

这种二元树为 Huffman 树，p_i 叫做权.

不妨设 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n$.

定理 (1) T 是 Huffman 树，v_i,v_j 是兄弟，则 $l_i=l_j$.

(2) v_1,v_2 是兄弟.

(3) T^+ 是带权 $p_1+p_2,p_3,\cdots,p_n$ 的 Huffman 树，与 p_1+p_2 相应的叶子生出两个新叶分别带权 p_1 与 p_2，则所得树 T 是带权 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的 Huffman 树.

证 (1) 由树上轨 $P(v_0,v_i)$ 与 $P(v_0,v_j)$ 的唯一性，以及 v_0 到 v_i,v_j 之父的轨之唯一性，知 $P(v_0,v_i),P(v_0,v_j)$ 等长.

(2) 若 Huffman 树仅 v_1,v_2 两个叶，由 $m(T)=\min$ 知，v_1,v_2 是兄弟，码长 $l_1=l_2=1$. 若 T 有三个以上的叶子，因 T 是二元树，故有码长不小于 2 的叶，又 $m(T)=p_1l_1+p_2l_2+\cdots+p_nl_n=\min$，不妨设 $l_1\geqslant l_i,i=2,3,\cdots,n$. 这是因为，若 $p_k=p_1$，而 $l_k>l_1(n\geqslant k\geqslant 2)$，我们把 v_1 与 v_k 脚标对换，得一同构树，$m(T)$不变，而使新树上 v_1 的码长大于 v_k 的码长；若 $p_k>p_1$，而 $l_k>l_1(n\geqslant k\geqslant 2)$，把 v_1 与 v_k 带权对换，得到的新树 T' 上，$m(T')=p_1l_k+p_2l_2+\cdots+p_kl_1+\cdots+p_nl_n<m(T)$，与 $m(T)$的最小性相违，所以不妨认为 l_1 是最大码长，且 $l_1\geqslant l_2\geqslant\cdots\geqslant l_n$；若 v_1 无兄弟，则 l_1 还可压缩 1，这与 $m(T)=\min$ 矛盾，故 v_1 的兄弟是 v_2.

(3) 设 T' 是带权 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 的 Huffman 树，只需证明 $m(T)\leqslant m(T')$. 由(2)，带权 p_1,p_2 的叶在 T' 中是兄弟，令 T'_+ 是 T' 中 p_1 与 p_2 为权的叶删除，其父的权取 p_1+p_2 的树，则

$$m(T')=m(T'_+)+p_1+p_2,$$
$$m(T)=m(T^+)+p_1+p_2,$$

而 T^+ 是带权 $p_1+p_2,p_3,\cdots,p_n$ 的 Huffman 树，故 $m(T'_+)\geqslant m(T^+)$，于是 $m(T)\leqslant m(T')$，证毕.

下面用例题说明如何使用“兄弟寻父法”来构作 Huffman 树，“兄弟寻父”的根据是上述定理.

求带权 0.1,0.1,0.1,0.2,0.5 的 Huffman 树.

图 1-4(d)中即为所求之 Huffman 树(Huffman 树未必唯一).

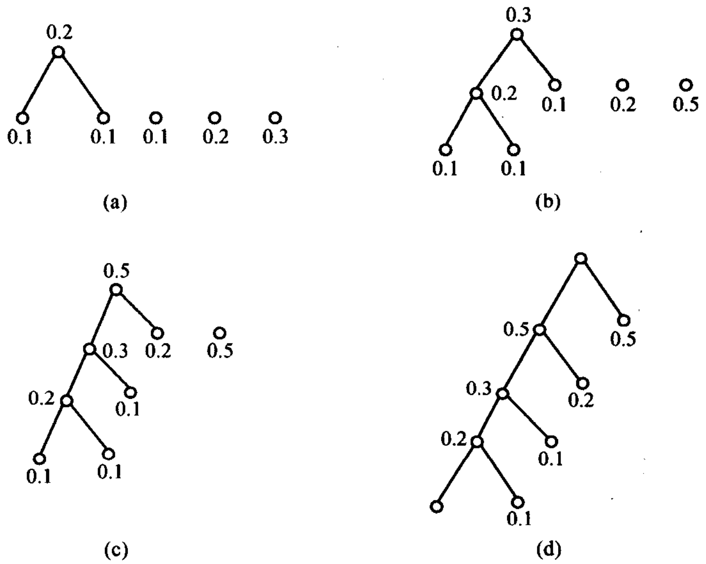

图 1-4

1.5　可靠通信网络的设计

欲构造一有线通信网，使得敌机炸坏我几个通信站之后，其余的通信站仍可彼此通话.显然，有两个要求是必要的：一是不怕被敌人炸坏的站的数目不要太少，二是整个网络造价要小.这个实际问题的数学模型如下.

G 是加权连通图，k 是给定自然数，求 G 的有最小权(造价)的 k 连通生成子图.当 $k=1$ 时，就是可由 Kruskal 算法求得的生成树，当 $k>1$ 时，尚未解决！当权皆为 1，G 是完全图时，1962 年 Harary 给出如下解法.

设 $f(m,n)$ 表示 n 个顶的 m 连通图当中的边数的最小值，$m<n$.所谓 m 连通图，指图中任二顶之间至少有 m 条两两不内交的轨.Harary 构作了图 $H_{m,n}$：

(1) m 是偶数，$m=2r$，$H_{2r,n}$ 以 $\{0,1,2,\cdots,n-1\}$ 为顶集合，当 $i-r\leqslant j\leqslant i+r$ 时，在顶 i 与 j 之间连一边，这里加法是在 mod n 意义下进行的.

(2) m 是奇数，$m=2r+1$，n 是偶数，先构作 $H_{2r,n}$，然后对 $1\leqslant i\leqslant\frac{n}{2}$ 的 i 与 $i+\frac{n}{2}$ 之间加一边得 $H_{2r+1,n}$.

(3) m 是奇数，$m=2r+1$，n 是奇数，先构作 $H_{2r,n}$，然后在顶点 0 与 $\frac{n-1}{2}$，0 与 $\frac{n+1}{2}$ 之间加上边，在顶 i 与 $i+\frac{n+1}{2}$ 之间加上边，其中 $1\leqslant i\leqslant\frac{n-1}{2}$，则得 $H_{2r+1,n}$.图

1-5(a)是 $H_{4,8}$,图 1-5(b)是 $H_{5,8}$,图 1-5(c)是 $H_{5,9}$.

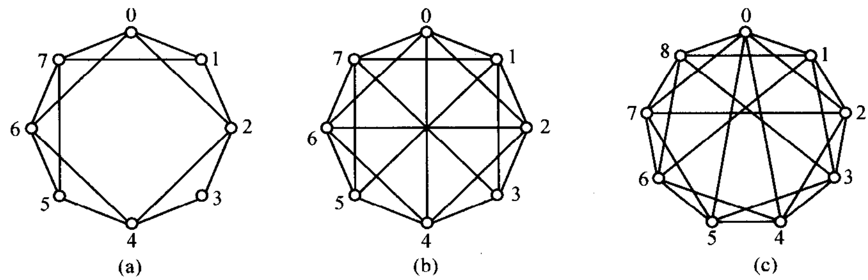

图 1-5

可以证明,$H_{m,n}$是边数最少的 m 连通图,即$|E(H_{m,n})|=f(m,n)$,而且可以算出$|E(H_{m,n})|=\left\{\dfrac{mn}{2}\right\}$.

1.6　中国邮路问题

一位邮递员从邮局选好邮件去投递,然后回到邮局,当然他必须经过他所管辖的每条街道至少一次.请为他选择一条投递路线,使其所行路程尽可能的少.

中国邮路的数学模型是在连通加权图上求含其一切边的权最小的回路,我们称这种回路为理想回路.若此图是 Euler 图,则每个 Euler 回路都是理想回路.

下面介绍求 Euler 回路的 Fleury 算法.

Fleury 算法

(1) $\forall v_0\in V(G)$,令 $W_0=v_0$.

(2) 设行迹 $W_i=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_iv_i$ 已选定,则从 $E-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$中选一边 e_{i+1},使其

① e_{i+1}与 e_i 相邻,

② 除非已无选择余地,e_{i+1}不要选 $G_i=G-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$的桥.

(3) 直到(2)不能进行为止.

定理　G 是 Euler 图,Fleury 算法终止时得到的是 Euler 回路.

证　G 是 Euler 图,$W_n=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_nv_n$ 是 Fleury 算法终止时得到的行迹,则 v_n 在 G 中的次数为 0,故 $v_0=v_n$,W_n 是闭行迹.

若 W_n 不是 Euler 回路,令 S 是 G_n 中正次数的顶集,则 $S\neq\varnothing$.但 $v_n\notin S$,令 $\overline{S}=V-S$,则 $v_n\in\overline{S}$.令 m 是 $v_m\in S$ 而 $v_{m+1}\in\overline{S}$ 的 v 的脚标的最大值,因 W_n 终止于$\overline{S}$,e_{m+1}是 G_m 的桥,见图 1-6.令 e 是 G_m 中与 v_m 并联的一边,且 $e\neq e_{m+1}$,由算法第二步,e 必为 G_m 的桥,因此 e 也是 $G_m[S]$的桥.又 $G_m[S]=G_n[S]$,故 $G_m[S]$中每