

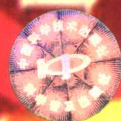
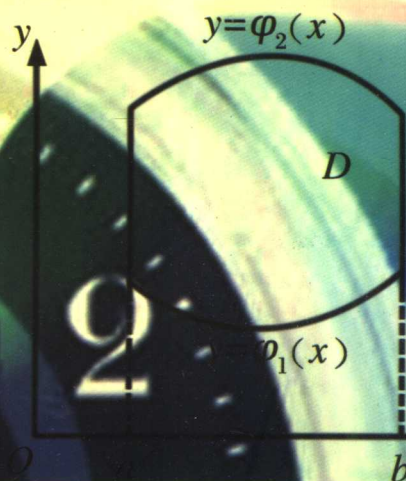


全国高协组织教材研究与编写委员会审定

# 高等数学

经济类（上册）

苏万春 主 编  
姚党辉 陈燕龙 雷泽雄 副主编



中国科学技术出版社

全国高协组织教材研究与编写委员会审定

# 高等数学

经济类(上册)

苏万春 主 编

姚尧辉 陈燕龙 雷泽雄 副主编

中国科学技术出版社

·北 京·

**图书在版编目 (CIP) 数据**

高等数学/苏万春等编. —北京: 中国科学技术出版社, 2006.7

ISBN 7-5046-4388-2

I. 高... II. 苏... III. 经济数学-高等学校: 技术学校-教材 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 063165 号

自 2006 年 4 月起本社图书封面均贴有防伪标志, 未贴防伪标志的为盗版图书。

中国科学技术出版社出版

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮政编码: 100081

电话: 010-62103210 传真: 010-62183872

科学普及出版社发行部发行

临沂市第二印刷厂印刷

\*

开本: 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张: 28.625 字数: 678 千字

2006 年 7 月第 1 版 2006 年 7 月第 1 次印刷

定价: 46.00 元 (上、下册)

---

(凡购买本社的图书, 如有缺页、倒页、  
脱页者, 本社发行部负责调换)

# 前 言

随着知识经济时代的到来,我国的高等教育正面临新的发展契机,高职高专教育作为高等教育的重要组成部分,必须关注市场的变化,树立以就业为导向的教育理念,以便更好地适应 21 世纪社会对应用型人才的需求。

本套教材为培养高职高专经济类与管理类专业应用型人才而编写,其中包括《高等数学》经济类(上册)与《高等数学》经济类(下册)。在编写过程中,参考了国内外许多优秀教材,突出以应用为目的,以专业够用为尺度,对一些概念、定理尽可能用简单的语言来描述,使老师易于讲授,学生易于理解。本教材具有以下几个特点:

第一,强调数学基本理论在经济管理中的应用,把数学与经济管理紧密结合,介绍数学理论在经济管理中的应用,指明经济管理模型的数学依据,突出经济数学教材的特色。

第二,本教材在每节后编写了习题,每章后有小结与复习题,使学生能够由浅入深、先易后难,达到综合运用的目的。

第三,本教材注重对概念、定理的应用,省略了某些定理的未证过程,注重与相关专业课程的接轨,为专业课的学习打下基础。

本教材编写组成员:苏万春、祝成虎、郑镇汉、姚党辉、谢日新、陈燕龙、雷泽雄。

限于编写组的学识和经验,书中难免有不妥之处,恳请同行和读者批评指正。

编 者

2006 年 5 月于广州

# 目 录

|                         |         |
|-------------------------|---------|
| <b>第一章 函数及其图形</b> ..... | ( 1 )   |
| 第一节 函数.....             | ( 1 )   |
| 第二节 经济学中的常用函数.....      | ( 10 )  |
| 本章小结.....               | ( 14 )  |
| 复习题.....                | ( 14 )  |
| <b>第二章 极限与连续</b> .....  | ( 18 )  |
| 第一节 函数的极限.....          | ( 18 )  |
| 第二节 无穷小量与无穷大量.....      | ( 22 )  |
| 第三节 极限的性质与运算法则.....     | ( 26 )  |
| 第四节 两个重要的极限.....        | ( 30 )  |
| 第五节 函数的连续性与间断点.....     | ( 34 )  |
| 本章小结.....               | ( 40 )  |
| 复习题.....                | ( 43 )  |
| <b>第三章 导数与微分</b> .....  | ( 47 )  |
| 第一节 导数的概念.....          | ( 47 )  |
| 第二节 导数的基本公式与运算法则.....   | ( 53 )  |
| 第三节 函数的微分.....          | ( 62 )  |
| 第四节 经济学中的边际问题与弹性问题..... | ( 67 )  |
| 本章小结.....               | ( 71 )  |
| 复习题.....                | ( 73 )  |
| <b>第四章 导数的应用</b> .....  | ( 77 )  |
| 第一节 中值定理与洛必达法则.....     | ( 77 )  |
| 第二节 函数的单调性与函数的极值.....   | ( 87 )  |
| 第三节 曲线的凸性、拐点与渐近线.....   | ( 97 )  |
| 第四节 导数在经济管理中的应用.....    | ( 102 ) |
| 本章小结.....               | ( 108 ) |
| 复习题.....                | ( 111 ) |
| <b>第五章 不定积分</b> .....   | ( 115 ) |
| 第一节 不定积分的概念与性质.....     | ( 115 ) |
| 第二节 换元积分法.....          | ( 122 ) |

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 第三节 分部积分法 .....           | (135) |
| 第四节 微分方程初步 .....          | (139) |
| 本章小结 .....                | (148) |
| 复习题 .....                 | (152) |
| <b>第六章 定积分</b> .....      | (157) |
| 第一节 定积分的概念与性质 .....       | (157) |
| 第二节 微积分基本定理 .....         | (164) |
| 第三节 定积分的换元积分法和分部积分法 ..... | (169) |
| 第四节 广义积分 .....            | (175) |
| 第五节 定积分的应用 .....          | (179) |
| 本章小结 .....                | (186) |
| 复习题 .....                 | (188) |
| <b>第七章 多元函数微积分</b> .....  | (193) |
| 第一节 多元函数 .....            | (193) |
| 第二节 偏导数与全微分 .....         | (200) |
| 第三节 多元复合函数和隐函数的微分法 .....  | (207) |
| 第四节 多元函数的极值及在经济中的应用 ..... | (213) |
| 第五节 二重积分 .....            | (218) |
| 本章小结 .....                | (226) |
| 复习题 .....                 | (229) |
| <b>习题及复习题参考答案</b> .....   | (233) |
| <b>参考文献</b> .....         | (249) |

# 第一章 函数及其图形

函数是微积分学中最基本的研究对象. 在中学里我们已经学习过函数概念, 这一章我们将对函数概念进行复习和补充.

## 第一节 函数

### 1.1 变量与区间

在日常生活、生产活动和经济活动中, 遇到的各种不同量可以分为两类, 一类量在考察的过程中不发生变化, 只取一个固定的值, 称作常量, 例如, 圆周率 $\pi$ 是个永远不变的量, 某种商品的价格, 某个班的学生人数在某一段时间内保持不变, 这些量都是常量; 另一类量在所考察的过程中是变化的, 可以取不同的数值, 称作变量, 例如, 一天中的气温, 生产过程中的产量都是在不断变化的, 它们都是变量.

变量在某一特定的过程中总是在一定的范围内取值, 这个取值范围可以用区间来表示. 本教材中涉及的数基本上都是实数, 所以, 今后如不特别说明, 提到的数均为实数, 数集则均为实数集, 我们用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数之集.

设 $a, b \in \mathbf{R}$ 且 $a < b$ , 称数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 为闭区间, 记作 $[a, b]$ . 称数集

$\{x | a < x < b\}$ 为开区间, 记作 $(a, b)$ . 类似地, 我们可定义下面的两个半开半闭区间:

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

因 $a, b$ 代表有限数, 所以这些区间都称为有限区间.  $a$ 和 $b$ 称为区间的端点, 数 $b - a$ 称为区间的长度. 此外, 还有无限区间, 我们引进记号 $+\infty$  (读作正无穷大) 与 $-\infty$  (读作负无穷大). 无限区间的定义与记号如下:

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\} = \{x | a < x < +\infty\}, \quad [a, +\infty) = \{x | x \geq a\} = \{x | a \leq x < +\infty\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\} = \{x | -\infty < x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x | x \leq b\} = \{x | -\infty < x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbf{R}\} = \{x | -\infty < x < +\infty\}$$

有一种称为邻域的数集是今后常要用到的, 现给出其定义:

**定义 1** 设 $a, \delta \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$ , 称开区间 $(a - \delta, a + \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}$ 为点 $a$ 的 $\delta$

邻域, 记作 $U(a, \delta)$ . 其中点 $a$ 称为邻域的中心,  $\delta$ 称为邻域的半径.

在数轴上,  $|x-a|$  表示点  $x$  与  $a$  之间的距离, 因此,  $U(a, \delta)$  表示数轴上与点  $a$  的距离小于  $\delta$  的一切点  $x$  的全体, 如图 1-1 所示.

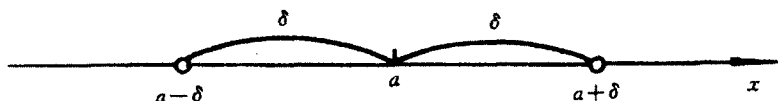


图 1-1

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉, 称集合  $\{x | 0 < |x-a| < \delta\}$  为点  $a$  的  $\delta$  去心邻域, 记作  $\dot{U}(a, \delta)$ .

当不需要指明邻域半径时, 一般用  $U(a)(\dot{U}(a))$  表示  $a$  的邻域 (去心邻域).

## 1.2 函数的概念

**定义 2** 设  $x$  与  $y$  是两个变量, 当变量  $x$  在非空实数集  $D$  内任取一数值时, 变量  $y$  按照某一对应规则  $f$  总有一个确定的数值与之对应, 则称变量  $y$  为变量  $x$  的函数, 记作  $y = f(x)$ . 这里,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量或函数.  $f$  是函数符号, 它表示  $y$  与  $x$  的对应规则. 有时函数符号也可以用其他字母来表示, 如  $y = g(x)$  或  $y = \varphi(x)$  等. 集合  $D$  称为函数的定义域, 相应的  $y$  值的集合则称为函数的值域.

当自变量  $x$  在其定义域内取定某确定值  $x_0$  时, 因变量  $y$  按照所给函数关系

$y = f(x)$  求出的对应值  $y_0$  叫作当  $x = x_0$  时的函数值, 记作  $y|_{x=x_0}$  或  $f(x_0)$ .

如果对于  $D$  中每一个  $x$ , 与之对应的  $y$  值是唯一的, 称这样的函数为单值函数, 否则称为多值函数.

定义域与对应法则是确定一个函数的两要素. 当两个函数的两要素分别相同时, 称这两个函数是相同的, 而不管它们的自变量和因变量选用什么字母表示. 例如, 函数

$f(x) = x + 2$  与  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$  是不同的函数, 因为它们的定义域不同; 而函数



$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$  与  $g(x) = 1$  是相同的函数, 因为它们的定义域和对应法则完全相同.

例 1 绝对值函数  $y = |x| = \begin{cases} x, & (x \geq 0) \\ -x, & (x < 0) \end{cases}$

解 它的定义域  $D = \{x | x \in R\}$ , 值域  $R = [0, +\infty)$ , 如图 1-2 所示.

例 2 符号函数  $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

解 它的定义域  $D = \{x | x \in R\}$ , 值域  $R = \{-1, 0, 1\}$ , 如图 1-3 所示.

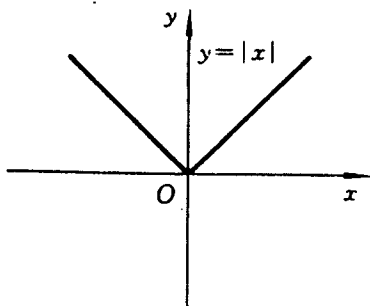


图 1-2

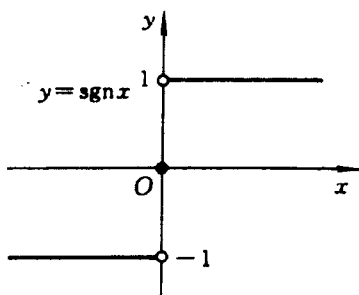


图 1-3

例 3 取整函数  $y = [x]$

解 这里的记号  $[x]$  表示: 当我们把  $x$  看作一个整数和一个非负小数之和时, 其函数值取整数部分. 例如  $[3.1] = 3$ ,  $[-3.1] = -4$ ,  $[3] = 3$  等. 这个函数的定义域

$D = \{x | x \in R\}$ , 值域  $R = Z$  (全体整数集), 如图 1-4 所示.

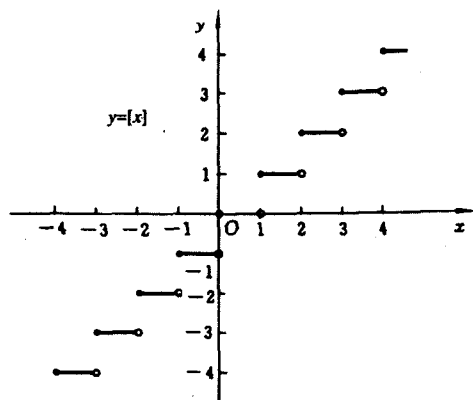


图 1-4

上述三个例子中的函数有一个共同的特点: 函数的表达式随自变量在不同的范围内取值而不相同, 即由若干个表达式来表示的一个函数, 通常称这种函数为分段函数, 下面再给出一个生活中常见的分段函数.

**例 4** 某城市的出租车计价方法为: 3 公里以内收 7 元; 超过 3 公里后, 超过部分每公里为 2.60 元. 求车费与里程之间的函数关系.

**解** 车费与里程分别用  $F$  和  $s$  表示. 则由题意可列出如下的函数关系式

$$F(s) = \begin{cases} 7 & 0 < s \leq 3 \\ 7 + 2.6(s - 3) & s > 3 \end{cases}$$

分段函数虽然表达式分几段, 但它表示的是一个函数. 对于自变量  $x$  在定义域内的某个值, 分段函数  $y$  只能确定唯一的值. 分段函数的定义域是所有段中自变量取值的全体.

函数的定义域指明了函数关系的适用范围, 只有当自变量在定义域中取值时, 因变量才有唯一确定的对应值. 因此研究函数关系时, 必须会确定其定义域. 一般来说, 如果函数是由解析式给出, 函数的定义域就是使该式子有意义的自变量的全体; 如果函数关系描述的是实际问题, 则其定义域的确定需要符合实际意义.

**例 5** 求函数  $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{5} + \sqrt{25-x^2}$  的定义域, 并求函数值  $f(0)$  与  $f(1)$ .

**解** 要使函数有意义, 必须有  $\left| \frac{x-1}{5} \right| \leq 1$  且  $25-x^2 \geq 0$ , 即有  $|x-1| \leq 5$  且  $|x| \leq 5$ .

因此有  $-4 \leq x \leq 5$ , 于是函数定义域为  $[-4, 5]$ . 因为  $x=0 \in [-4, 5]$ ,  $x=1 \in [-4, 5]$ ,

所以  $f(0) = -\arcsin \frac{1}{5} + 5$ ,  $f(1) = 2\sqrt{6}$ .

### 1.3 函数的几种特性

#### 1.3.1 函数的有界性

**定义 3** 设  $y = f(x)$  是定义在集合  $D$  上的函数, 如果存在一个正数  $M$  对于所有的  $x \in D$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称  $f(x)$  在  $D$  上是有界的. 如果不存在这样的正数  $M$ , 则称  $f(x)$  在  $D$  上无界的.

如图 1-5, 函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有界的几何意义是, 曲线  $y = f(x)$  在区间  $(a, b)$  内被限制在  $y = -M$  和  $y = M$  两条直线之间.

对于函数的有界性, 要注意以下两点:

第一, 当一个函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有界时,

正数  $M$  的取法不是唯一的. 例如  $y = \sin x$  在

$(-\infty, +\infty)$  内是有界的, 有  $|\sin x| \leq 1$ , 但我们也

可以取  $M = 2$ , 即  $|\sin x| < 2$  总是成立的,

实际上  $M$  可以取任何大于 1 的数.

第二, 有界性是依赖于区间的. 例如  $y = \frac{1}{x}$  在区间  $(1, 2)$  内是有界的, 但在区间  $(0, 1)$  内则无界.

#### 1.3.2 函数的奇偶性

**定义 4** 设  $y = f(x)$  是定义在集合  $D$  上的函数, 如果对任意的  $x \in D$ , 恒有

$f(-x) = f(x)$ , 则称  $f(x)$  为偶函数; 如果对任意的  $x \in D$ , 恒有  $f(-x) = -f(x)$ ,

则称  $f(x)$  为奇函数.

由定义 4 可知, 对任意的  $x \in D$ , 必有  $-x \in D$ , 否则,  $f(-x)$  没有意义. 因此函数具有奇偶性时, 其定义域必定是关于原点成中心对称的. 奇函数的图形关于原点对称, 偶函数的图形关于  $y$  轴对称.

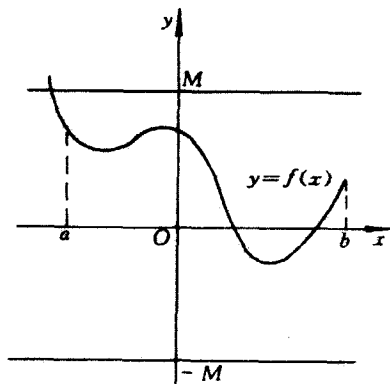


图 1-5

**例 6** 判断下列函数的奇偶性

$$(1) f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7 \quad (2) f(x) = 2x^2 + \sin x$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) \quad (a > 0, a \neq 1)$$

**解** (1) 因为  $f(-x) = 3(-x)^4 - 5(-x)^2 + 7 = 3x^4 - 5x^2 + 7 = f(x)$ , 所以

$f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7$  是偶函数.

(2) 因为  $f(-x) = 2(-x)^2 + \sin(-x) = 2x^2 - \sin x \neq f(x)$ , 同样可以得到

$f(-x) \neq -f(x)$ , 所以  $f(x) = 2x^2 + \sin x$  不是奇函数, 也不是偶函数.

$$(3) \text{ 因为 } f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-(-x)} - a^{-x}) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x}) = -\frac{1}{2}(a^{-x} - a^x) = -f(x),$$

所以  $f(x) = \frac{1}{2}(a^{-x} - a^x)$  是奇函数.

### 1.3.3 函数的单调性

**定义 5** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有定义, 如果对于  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1$

与  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在  $(a, b)$  内是单调增加的; 如

果对于  $(a, b)$  内的任意两点  $x_1$  与  $x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $f(x)$  在

$(a, b)$  内是单调减少的.

我们知道, 函数  $y = x^2$ , 在区间  $(0, +\infty)$  内单调增加; 在区间  $(-\infty, 0)$  内单调减少;

在定义区间  $(-\infty, +\infty)$  内则不具有单调性.

### 1.3.4 函数的周期性

**定义 6** 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在非零常数  $T$ , 使得对任意  $x \in D$ ,

有  $f(x+T) = f(x)$  ( $x+T \in D$ ), 则称函数  $y = f(x)$  为周期函数.  $T$  称为  $f(x)$  的周

期, 其中的最小正周期称为  $f(x)$  的基本周期. 通常所说的周期函数的周期均指的是基

本周期, 简称周期.

我们知道,  $y = |\sin x|$ ,  $y = \tan x$ ,  $y = \cos^2 x$  等都是周期函数, 其周期都为  $\pi$ .

对于正弦型曲线  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ , 其周期为  $\frac{2\pi}{|\omega|}$ .

#### 1.4 反函数

函数与反函数是相对的概念. 例如在函数  $y = 0.5x$  中, 用  $y$  来表达  $x$ , 即把  $x$  解出, 得  $x = 2y$ , 而把  $y$  看成自变量, 把  $x$  看成因变量, 于是, 函数  $x = 2y$  称为函数  $y = 0.5x$  的反函数. 一般地有如下定义:

**定义 7** 设  $y = f(x)$  是  $x$  的函数, 其值域为  $R$ , 如果对于  $R$  中的每一个  $y$  值, 都有一个确定的且满足  $y = f(x)$  的  $x$  值与之对应, 则得到一个定义在  $R$  上的以  $y$  为自变量,  $x$  为因变量的新函数, 记作  $x = f^{-1}(y)$ , 我们称它为  $y = f(x)$  的反函数, 并称  $y = f(x)$  为直接函数.

当然我们也可以说  $y = f(x)$  是  $x = f^{-1}(y)$  的反函数, 就是说, 它们互为反函数. 显然, 由定义可知, 单调函数一定有反函数. 习惯上, 我们总是用  $x$  表示自变量, 用  $y$  表示因变量, 所以通常把  $x = f^{-1}(y)$  改写为  $y = f^{-1}(x)$ .

从上面的定义容易得出, 求反函数的过程可以分为两步: 第一步, 从  $y = f(x)$  解出  $x = f^{-1}(y)$ ; 第二步, 交换字母  $x$  和  $y$ .

**例 7** 求  $y = 4x - 1$  的反函数.

**解** 由  $y = 4x - 1$  得到  $x = \frac{y+1}{4}$ , 然后交换  $x$  和  $y$ , 得  $y = \frac{x+1}{4}$ . 即  $y = \frac{x+1}{4}$  是  $y = 4x - 1$  的反函数.

可以证明: 函数  $y = f(x)$  与其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的图形关于直线  $y = x$  对称; 函数  $y = f(x)$  的定义域是其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的值域; 函数  $y = f(x)$  的值域是其反函数  $y = f^{-1}(x)$  的定义域.

## 1.5 复合函数

**定义 8** 设  $y$  是  $u$  的函数  $y = f(u)$ ,  $u \in D$ ,  $u$  又是  $x$  的函数  $u = \varphi(x)$ , 当  $x$  在某一区域  $I$  上取值时, 有  $\varphi(I) \subset D$ , 则称  $y$  是  $I$  上关于  $x$  的复合函数. 记作  $y = f[\varphi(x)]$ ,  $x \in I$ , 也称  $y = f[\varphi(x)]$  是由函数  $y = f(u)$  及  $u = \varphi(x)$  复合而成的,  $x$  称为自变量,  $u$  称为中间变量.

必须注意, 不是任何两个函数都是可以复合成一个复合函数的. 例如  $y = \lg u$  和  $u = -x^2$  就不能复合成一个复合函数. 因为  $y = \lg u$  的定义域  $D = (0, +\infty)$ , 而  $u = -x^2$  的值域  $R = (-\infty, 0]$ , 无论  $x$  取何值, 对应的  $u$  值都不在  $D$  内.

函数的复合可以是多重的, 也就是说, 一个复合函数其中间变量可以是有限多个. 例如, 函数  $y = 5^{\cot \frac{1}{x}}$  可以看作是由  $y = 5^u$ ,  $u = \cot v$ ,  $v = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) 三个函数复合而成的,

其中  $u$ 、 $v$  为中间变量,  $x$  为自变量,  $y$  为因变量.

**例 8** 已知  $f(a^x + 1) = a^{2x} + a^x + 1$ , 求  $f(x)$ .

**解** 令  $u = a^x + 1$ , 将  $a^x = u - 1$  代入原式, 得

$$f(u) = (u-1)^2 + (u-1) + 1 = u^2 - u + 1$$

即  $f(x) = x^2 - x + 1$

**例 9** 设  $f(x) = \begin{cases} 4, & |x| \leq 4 \\ 0, & |x| > 4 \end{cases}$ , 求  $f[f(x)]$ .

**解**  $f[f(x)] = \begin{cases} 4, & |f(x)| \leq 4 \\ 0, & |f(x)| > 4 \end{cases}$

因为  $|f(x)| \leq 4$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 所以  $f[f(x)] = 4$ ,  $x \in (-\infty, +\infty)$ .

## 1.6 初等函数

我们经常讨论的一些函数都是由几种最简单的函数构成的, 这些最简单的函数就是在中学已学过的基本初等函数. 包括:

常数函数:  $y=c$  ( $c$  为常数). 幂函数:  $y=x^a$  ( $a$  为常数). 指数函数:  $y=a^x$  ( $a$  为常数且  $a>0, a\neq 1$ ), 在科技应用中, 常会用到以常数  $e$  (这是个无理数,  $e\approx 2.71828\cdots$ ) 为底的指数函数  $y=e^x$ . 三角函数:  $y=\sin x$ ,  $y=\cos x$ ,  $y=\tan x$ ,  $y=\cot x$ ,  $y=\sec x$ ,  $y=\csc x$ . 反三角函数:  $y=\arcsin x$ ,  $y=\arccos x$ ,  $y=\arctan x$ ,  $y=\operatorname{arccot} x$ .

**定义 9** 基本初等函数经过有限次加、减、乘、除四则运算和有限次函数的复合运算所得到的并可以用一个解析表达式表示的函数, 称为初等函数. 例如

$$y = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx_n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx_m}, \quad y = \sin^2(x-1), \quad y = \lg(x + \sqrt{1+x^2}) \text{ 等, 都是初等函数.}$$

数. 而  $1+x+x^2+x^3+\cdots$  不满足有限次运算, 因此不是初等函数, 分段函数一般也不是初等函数.

## 习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \sin \sqrt{x-1}$$

$$(2) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$$

$$(3) y = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$$

$$(4) y = e^{\frac{1}{x}}$$

2. 判断下列各题中两个函数是否为相同的函数, 为什么?

$$(1) y = \ln x^2 \text{ 和 } y = 2 \ln x$$

$$(2) y = |x| \text{ 和 } y = \sqrt{x^2}$$

$$(3) y = \frac{x^2-4}{x+2} \text{ 和 } y = x-2$$

$$(4) y = \sqrt[3]{x^4-x^3} \text{ 和 } y = x\sqrt[3]{x-1}$$

3. 讨论下列函数的奇偶性.

$$(1) y = x^2 + \sin x$$

$$(2) y = |x+1|$$

$$(3) y = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$$

$$(4) y = a + b \cos x$$

4. 讨论下列函数在指定区间内的单调性.

$$(1) y = |x+1|, \quad x \in [-5, -1] \quad (2) y = a^x (a > 0, a \neq 1), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

5. 下列函数中, 哪些是周期函数? 对于周期函数, 求出其周期.

$$(1) y = x \cos x \quad (2) y = 1 + \sin \pi x$$

$$(3) y = \sin^2 x \quad (4) y = x - [x]$$

6. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = \sqrt[3]{x^2+1} \quad (x > 0) \quad (2) y = 2 \sin 3x \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(3) y = \frac{1-x}{1+x} \quad (4) y = 1 + \ln(x+2)$$

7. 设  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = 2^x$ . 求  $f[f(x)]$ ,  $f[g(x)]$ ,  $g[f(x)]$ ,  $g[g(x)]$

8. (1) 设  $f(x+1) = x^2 + 4x - 3$ , 求  $f(x)$

(2) 设  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$ , 求  $f(x)$

(3) 设  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , 求  $f(x+1)$

## 第二节 经济学中的常用函数

在用数学方法解决实际问题时, 往往需要找出经济变量之间的函数关系, 建立数学模型. 下面介绍几种常用的经济函数.

### 2.1 需求函数与供给函数

#### 2.1.1 需求函数

在经济学中, 消费者对某种商品的需求是指购买者既有购买商品的欲望, 又有购买商品的能力. 影响需求的因素有商品的价格、消费者的收入、消费者的偏好、消费者的预期等, 商品的价格既影响购买能力, 又影响购买欲望. 而消费者的收入更多地是影响购买能力, 其偏好与预期则更多地影响购买欲望. 如果把除该商品价格外的其他因素看成不变的量, 仅考虑该商品本身价格的影响, 那么, 商品的市场需求量  $D$  与该商品的价格  $p$  密切相关, 因此, 需求量  $D$  可以看成是价格  $p$  的函数, 称为需求函数, 记作



$D = D(p)$ . 通常降低商品价格来使需求量增加; 提高商品价格来使需求量减少. 因此, 需求函数  $D = D(p)$  为价格  $p$  的单调减少的函数. 根据市场统计资料, 常见的需求函数有以下几种类型:

$$\text{线性需求函数 } D = a - bp \quad (a > 0, b > 0)$$

$$\text{二次需求函数 } D = a - bp - cp^2 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

$$\text{指数需求函数 } D = ae^{-bp} \quad (a > 0, b > 0)$$

需求函数  $D = D(p)$  的反函数, 就是价格函数, 记作  $p = p(D)$ .

### 2.1.2 供给函数

供给是指生产者在某一特定时期内, 在每一价格水平时愿意而且能够供应的某种商品量. 影响供给的主要因素有价格、生产要素的数量与价格、技术、预期等. 商品的价格既影响供给能力, 又影响供给欲望. 生产要素的数量与价格、技术主要影响供给能力, 预期更多地影响供给欲望. 如果把除该商品价格以外的其他因素看成不变的量, 仅考虑该商品本身价格的影响, 商品的供给量  $S$  与该商品的价格  $p$  密切相关, 因此, 供给量  $S$  可以看成是价格  $p$  的函数, 称为供给函数, 记作  $S = S(p)$ . 在其他条件不变的情况下, 通常一种商品的供给量与价格之间成同方向变动. 因此, 供给函数  $S = S(p)$  为价格  $p$  的单调增加的函数. 当某种商品的价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品, 使供给量增加; 反之, 价格下跌将使供给量减少.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等. 其中, 线性供给函数可表示为  $S = -c + dp (c > 0, d > 0)$ .

### 2.1.3 均衡价格

均衡价格是指一种商品需求量与供给量相等时的价格. 当市场价格  $p$  高于均衡价格  $p_0$  时, 供给量将增加而需求量相应地减少, 这时产生的“供大于求”的现象必然使价格  $p$  下降; 当市场价格  $p$  低于均衡价格  $p_0$  时, 供给量将减少而需求量相应地增加, 这时会产生“物资短缺”现象, 从而又使价格  $p$  上升, 从而也论证了亚当·斯密的“看不见的手”. 市场价格的调节就是这样来实现的.

**例 1** 当鸡蛋收购价为 4.5 元/千克时, 某收购站每月能收购 5000 千克, 若收购价每千克提高 0.1 元, 则收购量可增加 400 千克, 求鸡蛋的线性供给函数.