21 世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

实变函数与泛函分析基础

第二版

全程导学及习题全解

主编　齐霄霏　闫晓红　石瑞青

◆知识归纳　梳理主线重点难点
◆习题详解　精确解答教材习题
◆提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

21 世纪高等 辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGY GBUFUDAO

实变函数与泛函分析基础

第二版

全程导学及习题全解

主编　齐霄霏　闫晓红　石瑞青

- 知识归纳　梳理主线重点难点
- 习题详解　精确解答教材习题
- 提高练习　巩固知识迈向更高

中国时代经济出版社
China Modern Economic Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

实变函数与泛函分析基础全程导学及习题全解／齐霄霏，
闫晓红，石瑞青主编．—北京：中国时代经济出版社，2007.9
(21 世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-80221-388-3

Ⅰ.实... Ⅱ.①齐...②闫...③石... Ⅲ.①实变函数—高等学校—教学参考资料②泛函分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 104014 号

实变函数与泛函分析基础全程导学及习题全解

齐霄霏 闫晓红 石瑞青 主编

出版者	**中国时代经济出版社**
地　址	北京东城区东四十条 24 号 青蓝大厦 11 层东办公区
邮　编	100007
电　话	(010)68320825（发行部） (010)88361317（邮购）
传　真	(010)68320634
发　行	各地新华书店
印　刷	北京鑫海达印刷有限公司
开　本	880 × 1230　1/32
版　次	2007 年 9 月第 1 版
印　次	2007 年 9 月第 1 次印刷
印　张	8.75
字　数	160 千字
印　数	1 ~ 5000 册
定　价	11.00 元
书　号	ISBN 978-7-80221-388-3

前　言

实变函数和泛函分析理论是为克服黎曼积分理论的缺陷而创立的新积分理论，其基础是集合与测度理论，所以也可以称为测度与积分理论。它是数学专业特别是将来从事与分析数学有关系的科技工作者的必备工具。

实变函数和泛函分析的一个重要特点就是比较抽象，是数学专业学生普遍反应学习比较困难的课程，特别是课后习题更是检验学生动手能力的标尺，有些比较难的题目学生甚至感到无从下手。为了配合课程的学习，帮助提高学生分析和解决问题的能力，我们编写了这本辅导教材。

本书是高等教育出版社出版，程其襄、张奠宙等编著的《实变函数与泛函分析基础》(第二版)的配套辅导用书，全书的编排严格与教材保持一致，包括了教材中所有习题的解答，并且对每一道习题都给出了详细的解题步骤。

全书由齐霄霏博士(山西大学)，闫晓红(天津城市建设学院)，石瑞青博士(山西师范大学)编写。本书在编写与出版过程中，得到了王贵鹏博士(南开大学)及中国时代经济出版社的大力支持，在此表示感谢。同时，对《实变函数与泛函分析基础》(第二版)一书的作者程其襄、张奠宙等老师表示衷心的感谢。

当然，任何参考书都只是启发思维的辅助工具，只有在经过独立思考之后再对照相应的参考教材，才能有所收获。由于作者水平有限，本书一定有不少缺点和错误，倘有纰漏，热忱欢迎读者批评指正。

编　者

2007.5

目　　录

第一章　集　合 …………………………………………… (1)

本章内容概述 ………………………………………… (1)

本章知识重点与难点 ………………………………… (8)

典型例题讲解 ………………………………………… (9)

习题全解 ……………………………………………… (12)

第二章　点　集 …………………………………………… (22)

本章内容概述 ………………………………………… (22)

本章知识重点与难点 ………………………………… (29)

典型例题讲解 ………………………………………… (30)

习题全解 ……………………………………………… (34)

第三章　测度论 …………………………………………… (40)

本章内容概述 ………………………………………… (40)

本章知识重点与难点 ………………………………… (45)

典型例题讲解 ………………………………………… (46)

习题全解 ……………………………………………… (50)

第四章　可测函数 ………………………………………… (55)

本章内容概述 ………………………………………… (55)

本章知识重点与难点 ………………………………………… (60)
典型例题讲解 ………………………………………… (62)
习题全解 ………………………………………… (69)
第五章 积分论 ………………………………………… (78)
本章内容概述 ………………………………………… (78)
本章知识重点与难点 ………………………………………… (89)
典型例题讲解 ………………………………………… (90)
习题全解 ………………………………………… (94)
第六章 微分与不定积分 ………………………………………… (108)
本章内容概述 ………………………………………… (108)
本章知识重点与难点 ………………………………………… (116)
典型例题讲解 ………………………………………… (117)
习题全解 ………………………………………… (121)
第七章 度量空间和赋范线性空间 ………………………………………… (128)
本章内容概述 ………………………………………… (128)
本章知识重点与难点 ………………………………………… (138)
典型例题讲解 ………………………………………… (140)
习题全解 ………………………………………… (146)
第八章 有界线性算子和连续线性泛函 ………………………………………… (164)
本章内容概述 ………………………………………… (164)
本章知识重点与难点 ………………………………………… (168)
典型例题讲解 ………………………………………… (169)
习题全解 ………………………………………… (173)
第九章 内积空间和希尔伯特(Hilbert)空间 ………………………………………… (181)
本章内容概述 ………………………………………… (181)

本章知识重点与难点 …………………………………………… (191)
典型例题讲解 …………………………………………………… (192)
习题全解 ………………………………………………………… (197)
第十章　巴拿赫(Banach)空间中的基本定理 ……………… (212)
本章内容概述 …………………………………………………… (212)
本章知识重点与难点 …………………………………………… (218)
典型例题讲解 …………………………………………………… (220)
习题全解 ………………………………………………………… (223)
第十一章　线性算子的谱 ………………………………………… (244)
本章内容概述 …………………………………………………… (244)
本章知识重点与难点 …………………………………………… (249)
典型例题讲解 …………………………………………………… (250)
习题全解 ………………………………………………………… (254)
参考文献 ……………………………………………………………… (272)

第一章 集 合

集合论不仅是实变函数和泛函分析的基础，同时也是其他数学分支的基本工具. 中学里接触到的集合的运算只限于有限多个的情形，本章我们把集合的并与交运算推广到了无限多个的情形，并引入了集合列的上限集与下限集的运算.

本章内容概述

§1. 集合概念

1. 集合的定义

在一定范围内的个体事物的全体，当将它们看作一个整体时，我们把这个整体称为一个集合，其中每个个体事物叫做该集合的元素. 我们用符号属于“$\in$”和不属于“$\overline{\in}$”表示集合和它的元素间的关系.

2. 集合的表示

(1)一个集合 A 可以通过列举其元素 $a,b,c,\cdots$ 来定义，记为 $A=$

$\{a,b,c,\cdots\}$.

(2)集合 A 也可以通过该集合中的各元素必须且只须满足的条件 p 来定义,记为$A=\{x|x$ 满足条件 $p\}$.

3. 集合间的关系

(1)集合的相等

两个集合 A 与 B 当且只当它们有完全一致的元素时称为相等,记为 $A=B$.

(2)集合的包含

两个集合 A 与 B 如果具有关系:A 的每一个元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$;或称 B 包含 A,记为 $B\supset A$. 空集可以看成任何集合的子集. 此外,若 A 是 B 的子集,但不等于 B,则称 A 为 B 的真子集.

4. 集合的包含关系所具有的性质

对任何集合 A、B、C,均有

(1)$A\subset A$;

(2)$A\subset B$,$B\subset A$,则 $A=B$;

(3)$A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.

通常证明两个集合相等,总是利用(2).

§2. 集合的运算

1. 集合的并和交运算

在已有知识的基础上,我们把并和交的概念推广到任意多个的情形.

(1)并和交的定义

设有一族集合$\{A_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$，其中$\alpha$是在固定指标集$\Lambda$中变化的指标. 则由一切$A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$的所有元素所组成的集称为这族集合的和集或并集，记为$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，并表示为$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x \mid 存在某个\alpha\in\Lambda使x\in A_\alpha\}$；由一切同时属于$A_\alpha(\alpha\in\Lambda)$的元素所组成的集，称为这集族的积或交，记为$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，并可表示为$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha=\{x \mid 对一切\alpha\in\Lambda有x\in A_\alpha\}$.

(2)运算性质

1° 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

2° 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

3° 分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C), A\cap\left(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha\right)=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}(A\cap B_\alpha)$；

4° $A\cup A=A, A\cap A=A$；

5° $(A\cap B)\subset A\subset(A\cup B)$；

6° 若$A_\alpha\subset B_\alpha, \alpha\in\Lambda$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$.

2. 集合的差和余运算

(1)差和余的定义

设A、B是任意两个集合，如果C是由一切属于A而不属于B的元素所组成，则称集合C为A减B所得的差集，记为$C=A-B$或$A\backslash B$，可表示为$A-B=\{x|x\in A 但 x\overline{\in} B\}$；

设$S\supset A$，则$S\backslash A$表示A关于S的余集，记为$\complement_S A$. 如果没有必要标出S，也可简单地记为$\complement A$.

(2)运算性质

1° $\complement_S S=\varnothing, \complement_S\varnothing=S$；

2° $A\cup\complement_S A=S, A\cap\complement_S A=\varnothing$；

3° $\complement_S(\complement_S A)=A$;

4° $A\setminus B=A\cap\complement_S B$;

5° 若 $A\subset B$,则 $\complement_S A\supset\complement_S B$;

6° 德摩根公式 $\complement_S(A\cup B)=\complement_S A\cap\complement_S B$, $\complement_S(A\cap B)=\complement_S A\cup\complement_S B$,

$$\complement_S\Big(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha,\ \complement_S\Big(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\complement_S A_\alpha.$$

3. 集合列的上极限和下极限

(1)定义

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是任意一列集.由属于上述集列中无限多个集的那种元素的全体所组成的集称为这一集列的上限集或上极限,记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$;对集列 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$那种除有限个下标外,属于集列中每个集的元素全体所组成的集称为这一集列的下限集或下极限,记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$ 或 $\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$.

(2)表示方法

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid 存在无穷多个 A_n,使 x\in A_n\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m;$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\{x\mid 当 n 充分大以后都有 x\in A_n\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m.$$

(3)二者的关系

一般地,$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$;如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}A_n$,则称集列$\{A_n\}$收敛,将这一集称为$\{A_n\}$的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

4. 单调集列

如果集列$\{A_n\}$满足 $A_n\subset A_{n+1}$($A_n\supset A_{n+1}$),$n=1,2,3,\cdots$,则称$\{A_n\}$为增加(减小)集列.增加与减少的集列统称为单调集列.

易知,单调集列是收敛的.

§3. 对等与基数

1. 映射的定义

设A、B为两个非空集合，如果有某一法则φ，使每个$x\in A$有唯一确定的$y\in B$和它对应，则称φ为A到B内的映射，记为$\varphi:A\to B$. 当映射φ使y和x对应时，y称为x在映射φ下的像，记作$y=\varphi(x)$. 对于任一固定的y，称适合关系$y=\varphi(x)$的x的全体是元素y在φ之下的原像. 集合A称为映射φ的定义域，记为$\mathscr{D}(\varphi)$. $\varphi(A)$称为映射φ的值域，记为$\mathscr{R}(\varphi)$.

如果$\varphi(A)=B$，则称φ是A到B上的映射，也称映射φ是到上的.

2. 一一对应的定义

设φ为A到B上的一个映射. 如果对每个$y\in B$，只有唯一的x满足$\varphi(x)=y$，则称φ为A到B上的一一映射，也称一一对应，有时写作1—1对应，也记为$A\xrightarrow[\varphi]{1-1}B$.

3. 逆映射

设φ为A到B上的一一映射，作B到A的映射如下：如果$\varphi:x\longmapsto y$，令$\psi:y\longmapsto x$. 由于φ是一一映射，因此ψ确实使唯一x与y相对应，即ψ是映射. 我们称ψ是φ的逆映射，记ψ为φ^{-1}，并且$\varphi^{-1}:B\xrightarrow{1-1}A$.

4. 集合的对等

(1)定义

设A、B是两上非空集合. 如果存在某$\varphi:A\xrightarrow{1-1}B$，则称$A$和$B$对等，记为$A\sim B$. 此外约定$\varnothing\sim\varnothing$.

(2)对等关系的性质

对任何集合 A、B、C,均有

1° (反射性)$A\sim A$;

2° (对称性)$A\sim B$,则 $B\sim A$;

3° (传递性)$A\sim B$,$B\sim C$,则 $A\sim C$.

设$\{A_n\}$和$\{B_n\}$为两集列.集列$\{A_n\}$中任何两个集不相交,集列$\{B_n\}$中的集亦两两不相交,即 $A_{n'}\cap A_{n''}=\varnothing$,$B_{n'}\cap B_{n''}=\varnothing$(当 $n'\neq n''$),如果 $A_n\sim B_n(n=1,2,3,\cdots)$,则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

(3)两个集合对等的判定方法

(伯恩斯坦定理)设 A、B 是两个非空集合.如果 A 对等于 B 的一个子集,B 又对等于 A 的一个子集,那么 A 对等于 B.

5. 集合的基数

我们把两个彼此对等的集合称为具有相同的基数,并用 $\overline{\overline{A}}$ 表示集合 A 的基数.对于集合 A、B,如果 A 不和 B 对等,但存在 B 的真子集 B^*,有 $A\sim B^*$,则称 A 比 B 有较小的基数(或 B 比 A 有较大的基数),并记为 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$(或 $\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$).

§4. 可数集合

1. 可数集合的定义

凡和全体正整数所成之集合 **N** 对等的集合都称为可数集合或可列集合.

从定义出发,可得到一个集合 A 是可数集合的充要条件为:A 可以排成一个无穷序列:$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$.

2. 可数集合的性质

任何无限集合都至少包含一个可数子集，即可数集在所有无限集中有最小的基数.

3. 判定集合可数性的方法

(1)可数集合的任何无限子集必为可数集合，从而可数集合的任何子集或者是有限集或者是可数集.

(2)设 A 为可数集，B 为有限或可数集，则 $A\cup B$ 为可数集.

(3)设 $A_i(i=1,2,3,\cdots)$都是可数集，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 也是可数集.

(4)若 A 中每个元素可由 n 个互相独立的记号一对一地加以决定，各记号跑遍一个可数集 $A=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\}(x_k=x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots;k=1,2,\cdots,n)$，则 A 为可数集.

(5)有理数全体和代数数的全体各成一可数集.

§5. 不可数集合

1. 不可数集合的定义

不是可数集合的无限集合称为不可数集合. 如全体实数所成集合 $\mathbf{R}$.

2. 连续基数与可数基数

(1)二者定义

连续基数指全体实数所成集合 $\mathbf{R}$ 的基数，用 c 表示；

可数基数指全体正整数所成集合 $\mathbf{N}$ 的基数，用 a 表示.

(2)二者关系 $a<c$

3. 关于连续基数的基本结论

(1)任意区间(a,b),$[a,b)$,$(a,b]$,$(0,\infty)$,$[0,\infty)$均具有连续基数c(这里$a<b$).实数列全体E_∞和n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$的基数也是c.

(2)设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是一列互不相交的集合,它们的基数都是$c$,则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$的基数也是$c$.

(3)设有c个(c表示连续基数)集的并集,若每个集的基数都是c,则其和集的基数也是c.

(4)存在基数大于c的集合.确切地讲,任意一个集合的所有子集作成新的集合的基数一定大于原集合的基数,从而得到没有最大的基数.

本章知识重点与难点

1. 集合的运算是本章的重点之一,必须准确熟练地掌握集合的各种运算法则,特别是德摩根公式.值得注意的是,集合的运算并不完全与代数运算相同,不能把代数恒等式不加证明地搬到集合运算中来.可参见相关习题.

2. 集合列的上极限与下极限及极限的运算是本章的又一重点,也是难点.在集论的应用中,集运算的作用是可通过集运算将一给定的集表示为(通常是可数个)较简单、或具有给定性质的集的分解式.在实变函数与泛函分析中,得出这种集分解式的技巧,具有基本的意义.而集合列的上(下)极限恰是集分解式技巧的基础,因此必须很好地掌握,并灵活地运用,适当地把一些分析问题转化为用上极限或下极限来表述.

3. 对等是集与集之间的一种关系，它是函数概念的推广. 关于此部分重点掌握证明集合对等的方法. 除根据对等的定义论证外，伯恩斯坦定理是常用的一种方法，即欲证 $A\sim B$，只要证 A 与 B 各与对方一子集对等即可.

4. 基数是一切彼此对等的集之间的某种共同属性，是有限集合中所含元素个数的推广. 本章介绍了两种基数，即可数基数和连续基数. 可数集是所有无限集中基数最小的无限集. 因此任一无限集并上一可数集后，其基数仍不变. 事实上，没有最大的基数，从而无限集合的不同基数也有无限之多，存在不可数的无限集.

5. 证明一个集合是可数集是本章的难点. 常用的方法有：求得一可数集 B，使得所判定的集合 A 与 B 对等，通常取 B 为有理数集或有理端点区间所构成的集合；分解集合 A 为可数个可数集之并或有限个可数集之并，此时 2 中提到的分解集的技巧是最重要的；利用教材中 §4 定理 6 判断集合是否可数.

典型例题讲解

例 1 设$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数列. 试用点集$\{x\mid f_n(x)\geqslant k\}$，$k=1,2,\cdots$表示点集$\{x\mid f_n(x)\to\infty,(n\to\infty)\}$.

【解】 $\{x\mid f_n(x)\to\infty\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}\{x\mid f_n(x)\geqslant k\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty}\{x\mid f_n(x)\geqslant k\}$

事实上，若 $x_0\in\{x\mid f_n(x)\to\infty\}$，则由极限的定义，对任意自然数 k，存在自然数 m，使得对任意 $n\geqslant m$，成立 $f_n(x_0)\geqslant k$. 因此，对任意 $n\geqslant m$，$x_0\in$

$\{x|f_n(x)\geqslant k\}$,从而

$$x_0\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}.$$

由 k 的任意性,即得

$$x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}.$$

反之,若 $x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}$,则对任意自然数 k,有

$$x_0\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}.$$

因此存在自然数 m,使得 $x_0\in\bigcap_{n=m}^{\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}$. 所以对任意 $n\geqslant m$,均有 $x_0\in\{x|f_n(x)\geqslant k\}$,即 $f_n(x_0)\geqslant k$. 这样,对任意自然数 k,都存在自然数 m,使得对任意 $n\geqslant m$,成立 $f_n(x_0)\geqslant k$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_0)=\infty$,即 $x_0\in\{x|f_n(x)\to\infty\}$.

由集合的包含关系,即得

$$\{x|f_n(x)\to\infty\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\varliminf_{n\to\infty}\{x|f_n(x)\geqslant k\}.$$

例 2 设 f 是定义在实数 $\mathbf{R}$ 上的函数,若 f 在每点 $x\in(-\infty,\infty)$ 取局部极小值,则 f 的值域 A 到多成一可数集.

【证明】 由局部极小值的定义,任给 $x_0\in(-\infty,\infty)$,必存在正数 δ,当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时,有 $f(x_0)\leqslant f(x)$. 因此可找出有理区间 $\Delta_{x_0}=(r_{x_0},R_{x_0})$,使 $x_0\in\Delta_{x_0}$,$\Delta_{x_0}\subset(x_0-\delta,x_0+\delta)$. 从而当 $x\in\Delta_{x_0}$ 时,有 $f(x)\geqslant f(x_0)$. 当 x_0 变动时,记这些有理区间 Δ_{x_0} 的全体为

$$V=\{\Delta_{x_0}|x_0\in(-\infty,\infty)\}.$$

又设 U 为由一切有理数对构成的区间 (r,R) 的全体,即 $U=\{(r,R)|r,R\in\mathbf{Q}\}$.

显然,$V\subset U$,而 $\overline{\overline{U}}=a$,因此 $\overline{\overline{V}}\leqslant a$.