本书与高等院校主流教材相配套

高等数学学习与提高指南

(第二版)

陈鼎兴　姚　奎　编著

- 作者20余年本科数学教学之结晶
- 例题和练习题涵盖面宽且代表性强
- 对问题的求解力求方法新颖和简洁
- 注重科学思想方法和知识融会贯通

东南大学出版社

高等数学学习与提高指南

（第二版）

陈鼎兴　姚　奎　编　著

东　南　大　学　出　版　社
·南　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与提高指南/陈鼎兴，姚奎编著. —2 版.
南京:东南大学出版社,2008.2
ISBN 978-7-5641-1102-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈…②姚… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004939 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人:江 汉
全国各地新华书店经销 江苏省通州市印刷总厂印刷
开本:850mm×1168mm 1/32 印张:18.5 字数:515 千字
2008 年 3 月第 2 版 2008 年 3 月第 2 次印刷
ISBN 978-7-5641-1102-1/O·67
定价:26.00 元

前　言

作者从事高校本科数学教学有20余年，编写一本集知识、素质与能力于一体的有助于高等数学学习和提高的教学参考书是我们长期的夙愿。在多方鼓励和帮助下，我们终于实现了这个愿望。本书在2006年出版后得到了读者的好评，并提出了许多宝贵意见。在吸收了广大读者的宝贵意见并结合现在的高等数学教学实际，我们对本书进行了修订。修订后的本书与高等院校最流行的高等数学教材相配套，且具有如下特点：

* 精选了556道例题及410道练习题，这些例、习题有历年的研究生入学试题，有各地的竞赛题，涵盖面宽，代表性强。

* 有近一半的例题作了评注：或对问题进行分析、或指出问题的源、或揭示问题的实质、或提出问题进一步推广和研究的方向、或阐明问题的意义、或就容易产生的错误提出忠告等等。这些评注都是作者几十年教学的经验和体会，以飨读者。

* 对问题的求解力求新颖和简洁。将某些现代分析方法，如压缩映像原理、积分因子等深入浅出地引入本书中，既简化了问题的求解，又拓宽了视野。

* 在求解例题的同时，力图将科学思想方法的陶冶贯彻其中：如一般特殊的思维模式，联想、类比、分析、归纳、逆向思维等发散性思维，多角度观察问题的思考方法及直觉判断力和科学美的培养等。

* 注重知识的融会贯通，十分强调编织知识的网络，强调各学科之间的渗透与合作，对许多问题作了“一题多解”。

* 提倡数学与实际的结合，将数学建模的思想融入高等数学教学中，多处展示了研究和解决实际问题的全过程，以期对初学者有所

借鉴。

本书在编写过程中得到我们的老同事张学仁副教授、岳振军博士热情的鼓励和支持，金逸芬女士花了大量的时间为本书的版式作了精心的设计和校阅，唐燕贞小姐为本书的参考答案做了仔细的核对，承东南大学管平教授精心审阅，并提出了许多宝贵意见，在此向他们表示由衷的谢意。

本书经吉雄飞编辑细心校阅，改正了许多错误，在此特别向吉编辑道一声“谢谢”！

由于作者的水平所限，本书必有某些错误和疏漏之处，敬请专家和读者不吝批评和赐教，我们将万分感激。

陈鼎兴　姚奎

2008年1月10日

目 录

1　函数、极限与连续

内容提要

一、函数

1. 函数的概念

定义 1 （映射）

设 A,B 为任意两个非空集合，$\forall x \in A$，按照某种法则 f，存在唯一的 $y \in B$ 与之对应，则称 f 为集合 A 到集合 B 的映射，记为

$$f:A \to B$$

> 注：在映射的概念中，还有两个模糊的地方：①法则，②对应，它们的含义是不明确的. 为了消除这个模糊性，需要引入两个新概念“直积”和“关系”. 请参阅本章末的附录 4.

映射概念的图示如下：

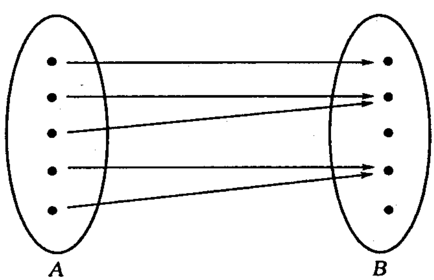


图 1.1　映射

映射是一个重要的概念，它有许多别名、雅号，举例如下：

① 若 A,B 是两个任意集合，则映射 $f:A \to B$ 称为映射；

② 若 $B \subset \mathbf{R}$，则映射 $f:A \to B$ 称为泛函；

③ 若 $A, B \subset \mathbf{R}$,则映射 $f: A \to B$ 称为一元函数,即函数是数集到数集的映射;

④ 若 $A \subset \mathbf{R}^n, B \subset \mathbf{R}$,则映射 $f: A \to B$ 称为 n 元函数;

⑤ 若 $A \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}^m$,则映射 $f: A \to B$ 称为 m 维向量函数,又称为参数方程($m = 2,3$ 是高等数学的研究重点);

⑥ 若 $A \subset \mathbf{R}^n, B \subset \mathbf{R}^m$,则映射 $f: A \to B$ 称为 n 元 m 维向量函数,又称为变换,它将 n 维空间的点变换成 m 维空间的点;

⑦ 若 A, B 是两个函数空间,则映射 $f: A \to B$ 称为算子;等等.

2. 函数的构成

(1) 四则运算

设函数 $f(x), x \in A$; $g(x), x \in B$. 则函数

$$f(x) \pm g(x),\ x \in A \cap B;$$
$$f(x) \cdot g(x),\ x \in A \cap B;$$
$$f(x)/g(x),\ x \in A \cap B - B',$$

其中 $B' = \{x \mid g(x) = 0,\ x \in B\}$.

(2) 函数复合

设函数 $f: A \to B$; $g: C \to D$. 则函数

$$g(f(x)),\ x \in A' = \{x \mid f(x) \in C,\ x \in A\}$$

称为复合函数.

两个函数的复合必须满足:内层函数的函数值属于外层函数的定义域. 如果不满足这个条件,就要缩小内层函数的定义域(如上),从而缩小了内层函数的函数值域,使得该条件满足.

注:函数的复合满足结合律,但不满足交换律.

(3) 反函数

定义 2 (单射、满射、双射)

若映射 $f: A \to B$ 满足

① $\forall x_1, x_2 \in A$,如果 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,则 f 称为单射;

② $\forall y \in B$，都有 $x \in A$，使得 $f(x) = y$，则 f 称为满射；

③ 一个既单又满的映射称为双射，又称为一一对应.

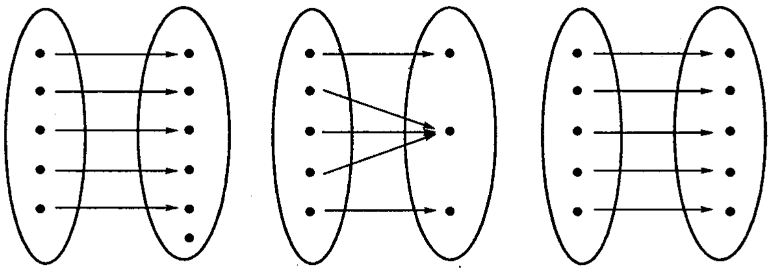


图 1.2　单射、满射和双射

若 $f:A \to B$ 是一个双射，则有逆映射 $f^{-1}:B \to A$，使得

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ x \in A;\ f(f^{-1}(x)) = x,\ x \in B. \tag{1.1}$$

注：式(1.1) 的两个等式的含义是不一样的，前者是集合 A 上的恒等式，后者是集合 B 上的恒等式.

如果 $f:A \to B$ 不是一个双射，有没有逆映射呢？从严格意义上讲，它没有逆映射，但是，我们可以变通. 首先，可以缩小集合 B，使 f 是一个满射；然后，取 $A_1 \subset A$，使得映射 $f:A_1 \to B$ 是一个双射. 经过这样的处理可以得到逆映射 $f^{-1}:B \to A_1$. 由于 A_1 的选取不唯一，所以，一个不是双射的映射可能存在多个逆映射，称它们为逆映射分支. 以后，我们都在这个变通的意义上讨论逆映射.

(4) 隐函数

设二元函数方程

$$F(x,\ y) = 0. \tag{1.2}$$

集合 $A = \{x \mid \exists y,\ 使得\ F(x,\ y) = 0\}$，$B = \{y \mid \exists x,\ 使得\ F(x,\ y) = 0\}$，分别称为方程(1.2) 在 x，y 轴上的投影.

如果存在函数 $\varphi:A \to B$ (或 $\psi:B \to A$)，使得

$F(x,\ \varphi(x)) \equiv 0,\ x \in A$ (或 $F(\psi(y),\ y) \equiv 0,\ y \in B$)，

则函数 $y=\varphi(x)$，$x\in A$（或 $x=\psi(y)$，$y\in B$）称为由方程(1.2)决定的隐函数.

(5) 极限函数

设函数序列 $f_n(x)$，$x\in A$(公共定义域)，则函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x),\ x\in A_1=\{x\mid \lim_{n\to\infty}f_n(x)\text{ 存在},\ x\in A\}$$

称为极限函数.

(6) 导函数(见本书第 2 章)

(7) 不定积分(见本书第 4 章)

(8) 函数项级数(见本书第 10 章)

> 注：(5)，(7)，(8) 都可能产生非初等函数.

3. 初等函数

初等函数是高等数学的主要研究对象.

(1) 基本初等函数

下列五类函数称为基本初等函数：

$$\left.\begin{array}{l}\text{① 幂函数(含常数函数)}x^a,\ a\in\mathbf{R};\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{② 指数函数 } a^x,\ a>0, a\neq 1;\\ \text{③ 三角函数 } \sin x, \cos x, \tan x, \cot x;\end{array}\right\}\text{指数型函数}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{④ 对数函数 } \log_a x,\ a>0, a\neq 1;\\ \text{⑤ 反三角函数 } \arcsin x,\ \arccos x,\\ \qquad\qquad \arctan x,\ \operatorname{arccot} x.\end{array}\right\}\text{对数型函数}$$

> 注：指数型函数及对数型函数的分类是由作者提出的，在导数与不定积分的学习和研究中有用.

(2) 初等函数

由基本初等函数(含常数函数)经过有限次四则运算，复合，并在它的定义域上，有一个统一的分析表达式，这样形成的一个函数大类，称为初等函数类.

(3) 其他常见的函数

① 绝对值函数(见图 1.3)

$$\mathrm{abs}(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

② 符号函数(见图 1.4)

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

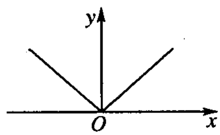


图 1.3　绝对值函数

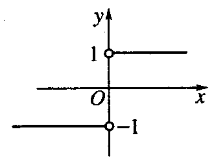


图 1.4　符号函数

> 注:有些教材中定义 sgn(0) = 0,本书中不用此定义.

③ 取整函数(见图 1.5)

$$\mathrm{int}(x)=[x].$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数($[x]\leqslant x<[x]+1$).

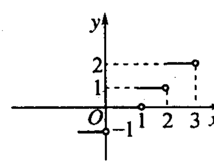


图 1.5　取整函数

④ 小数函数

$$\{x\}=x-[x].$$

⑤ Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

⑥ Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{ 是互质的整数},p>0),\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

> 注：① 和 ② 中的函数称为分段函数，即函数的定义域分成有限段，在每一段上有各自的表达式；② 和 ③ 中的函数称为阶梯函数，它的图形像一个梯子.

4. 函数的一般性质

(1) 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 A 关于原点对称($\forall x \in A \Rightarrow -x \in A$)，且

① 若 $\forall x \in A$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则 $f(x)$ 称为奇函数；

② 若 $\forall x \in A$，都有 $f(-x) = f(x)$，则 $f(x)$ 称为偶函数.

(2) 有界性

设函数 $f(x)$，$x \in A$，满足 $\exists M_0 > 0$，使得 $\forall x \in A$，都有 $|f(x)| \leqslant M_0$，则称函数 $f(x)$ 在 A 有界.

> 注：1. 函数 $f(x)$ 在 A 无界：$\forall M > 0$，$\exists x_0 \in A$，使得 $|f(x_0)| > M$.
>
> 2. 你会讲反话吗？在数学中常常需要讲"反话"(如反证法). 什么是反话？设 I 为问题的论域，$A, B \subset I$，若有
>
> $$(1)\ A \cap B = \varnothing,\ (2)\ A \cup B = I,$$
>
> 则称 A, B 互为反话.
>
> 如果仅满足(1)，这样的 A, B 称为对立话，而不是反话. 在我们的日常生活中，常常将对立话误认为反话，必须引起重视.
>
> 如何正确而熟练地讲出一句话的反话呢？注 1 给了一个讲反话的范例. 除去通常的"$\geqslant$ 与 $<$，$>$ 与 $\leqslant$，$=$ 与 $\neq$，$\in$ 与 $\notin$"等等互易外，"$\forall$ 与 $\exists$"的互易是讲反话的关键，请仔细体会之.

(3) 单调性

设 $f(x)$，$x \in A$，满足 $\forall x_1, x_2 \in A$，且 $x_1 < x_2$，都有

$$f(x_1) \leqslant (\text{或} \geqslant) f(x_2), \tag{1.3}$$

则称 $f(x)$ 为 A 上的单调递增(或单调递减)函数. 如果把式(1.3)的 $\leqslant$(或 $\geqslant$)改成 $<$(或 $>$)，则称 $f(x)$ 为 A 上的严格单调递增(或严格单调递减)函数. 单调递增(或单调递减)函数统称为单调函数.

(4) 周期性

设函数 $f(x)$，$x \in A$ 及 $T \neq 0$(其中 A 具有 T 周期，即 $\forall\ x \in A$

$\Rightarrow x \pm T \in A$)，且有 $\forall\ x \in A \Rightarrow f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的一个周期.

> 注：(以 T 为周期的反话) 函数 $f(x)$ 不以 T 为周期
>
> $\Leftrightarrow \exists\ x_0 \in A \Rightarrow f(x_0+T) \neq f(x_0)$.

二、极限

1. 极限的概念

《高等数学》的重要概念，如连续、导数、微分、积分、级数等等，都是由极限定义的. 因此，极限是一个重要的基本概念. 然而，极限又是一个难学、难懂、难用的概念. 究其原因在于：极限集现代数学的两大主要矛盾于一身.

(1) 动与静的矛盾

极限描述的是一个动态过程，而人的认识能力本质上具有静态的特征.

(2) 无穷与有穷的矛盾

极限是一个无穷运算，而人的运算能力本质上具有有穷的特征.

极限就是在这两大矛盾的运动中产生的，这也正是极限难学、难懂、难用之所在.

如何解决这些矛盾呢?人们从电影艺术中获得了启发. 电影的胶片是静态的画面，然而，一系列的静态的胶片的画面，得到了动态的感受. 所以

动态由一系列的静态而实现；

无穷由一系列的有穷而达到.

这就是理解极限概念的总纲. 详细的讨论这里就省略了.

极限概念由四种极限语言〈ε-N〉，〈ε-δ〉，〈M-N〉，〈M-δ〉所阐述. 根据不同的自变量趋向(有穷或无穷、双侧或单侧) 及函数趋向(有穷或无穷、双侧或单侧) 产生了 24 种不同的极限，列表如下(见下一页).

每个极限都由四句话组成：

(1) 由函数 $f(x)$ 的趋向决定：若 $f(x)$ 趋于有穷值 A，则为"$\forall\varepsilon>0$"；若 $f(x)$ 趋于无穷，则为"$\forall M>0$"(见表的第一行).

(2) 由自变量 x 的趋向决定：若 x 趋于有穷值 x_0(或 $x_0\pm0$)，则为"$\exists\delta>0$"；若 x 趋于无穷，则为"$\exists N>0$"(见表的第一列).

(3) 是自变量的不等式，它的基本形式是：

有穷："当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时"； 无穷："当 $|x|>N$ 时".

(4) 是函数的不等式，它的基本形式是：

有穷："都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$"； 无穷："都有 $|f(x)|>M$".

依据不同的极限的需要，决定以上不等式的绝对值号的取舍. 在表中已经填了一格，其余的留给读者.

24 种极限概念表

函数 $f(x)$ / 自变量 x		$\forall\varepsilon>0$	$\forall M>0$		
		$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$\exists\delta>0$	$x\to x_0$				
	$x\to x_0+0$				
	$x\to x_0-0$			当 $0<x_0-x<\delta$ 时 都有 $f(x)>M$	
$\exists N>0$	$x\to\infty$				
	$x\to-\infty$				
	$x\to+\infty$				

2. 极限的性质

提出一个新概念后，首先讨论的问题常常是它应该有哪些简单而又重要的性质，这是研究问题的一般步调.

极限有下述三条性质.

(1) 唯一性

若函数有极限，则极限值唯一.

(2) 局部有界性

若函数有极限,则函数局部有界.

(3) 局部保号性

若函数的极限为正(或负),则函数局部为正(或负).

> 注:所谓函数局部具有性质 A,就是在极限趋向的某个去心邻域里具有性质 A.

3. 极限的运算

(1) 代数和 $\lim(f \pm g) = \lim f \pm \lim g$;

(2) 积 $\lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$;

推论:$\lim kf(x) = k\lim f(x)$, 其中 k 为常数,
$\lim f^n(x) = (\lim f(x))^n$, 其中 n 为自然数;

(3) 商 $\lim \dfrac{f}{g} = \dfrac{\lim f}{\lim g}$,其中 $\lim g \neq 0$;　　(1.4)

(4) 不等式 若 $f \leqslant g$, 则 $\lim f \leqslant \lim g$;

(5) 幂指函数 $\lim f^g = \lim f^{\lim g}$,其中 $\lim f > 0$;

(6) 连续函数 $\lim f(g) = f(\lim g)$, 其中 f 是连续函数.

以上公式只要其中的极限存在,以及函数有意义即成立.

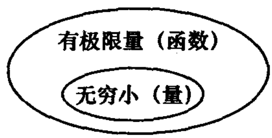
> 注:1. 极限运算的本质是什么?它实际上告诉我们:极限与四则运算、不等式运算及连续函数运算可以交换次序.迄今为止,还没有一个运算有如此优良的品格.从这个意义上讲,极限是一个非常简单的运算.
>
> 2. 能够与加减及数乘交换次序的运算称为线性运算.极限是线性运算,在高等数学中的绝大多数运算都是线性运算.线性运算是比较简单的运算,也是人类研究得比较深入的运算.

4. 其他主要理论

定理 1(极限与无穷小)　$\lim f = A \Leftrightarrow f = A + o(1)$.

注：$o(1)$ 表示同一极限过程的无穷小，也即在这个极限过程中极限为零的函数($\lim o(1)=0$).

无穷小的引入包含一个非常重要的科学思想方法：从我们研究的论域(即全体研究对象)中划分出一个重要的特殊类(如在全体有极限的量中，划分出一个无穷小的特殊类)，通过对特殊类的研究，进而把握全体研究对象的特性.



定理 2 有限个无穷小的和或积仍是无穷小.

定理 3(无穷小与有界) 无穷小 × 有界量仍为无穷小(可简记为 $o(1)\times O(1)=o(1)$，这里的 $O(1)$ 表示有界量).

定理 4(无穷小与无穷大) f 是无穷小(f 局部不等于零) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{f}$ 是无穷大.

定理 5(夹逼定理) 若 $f\leqslant g\leqslant h$，且 $\lim f=\lim h=A$，则

$$\lim g=A.$$

定理 6(两个重要极限)

(1) 原型

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e};$$

(2) 变型

若 $\lim\varphi(x)=0$，且局部 $\varphi(x)\neq 0$，则

$$\lim\frac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1,\qquad \lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}. \tag{1.5}$$

注：若 $\lim\varphi(x)\neq 0$ 时，公式(1.5)不可用，切记！要神似不要形似.