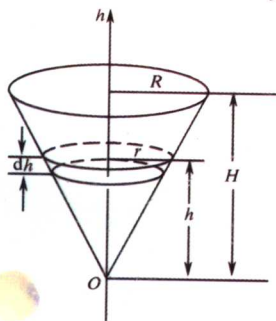
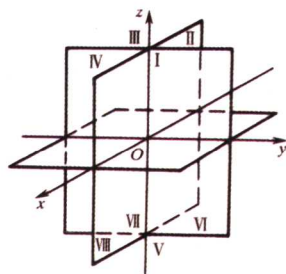
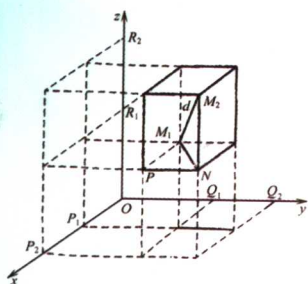


高等数学 (第2版)

(上册)

邱忠文 李君湘 主编



国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学

(第2版)

上册

邱忠文 李君湘 主编

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本版《高等数学》上、下册系高等院校“新高职”或“一般本科”高等数学课程使用的教材,本教材基本保留了“高等数学”课程内容的传统风格,编写时参照了《高等数学课程教学基本要求》。本书上册包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及向量代数与空间解析几何等7章;下册包括多元函数微分学、重积分、级数、微分方程及附录中的曲线积分与曲面积分等5章。全书基本上覆盖了现行理工科类院校《高等数学》课程(本科生)的全部教学内容。

本书既适用于全日制普通高等理工科院校及经济、管理类院校的本科生作为高等数学课程的教材,又可以作为网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育的大专生作高等数学课程的教科书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/邱忠文,李君湘主编. —2版.
北京:国防工业出版社,2007.9重印
ISBN 978-7-118-04006-7

I. 高… II. ①邱… ②李… III. 高等数学-高等
学校:技术学校-教材 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 071983 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 19 字数 344 千字

2007 年 9 月第 2 次印刷 印数 4001—7000 册 定价 25.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422
发行传真:(010)68411535

发行邮购:(010)68414474
发行业务:(010)68472764

前 言

我们编写的《高等数学》(上、下册)教材,自 2001 年 9 月由国防工业出版社出版以来,经过了 4 年的教学实践,深感尚有多处不尽如意之处,为了进一步提高《高等数学》课程的教学质量,本书的主编对第 1 版的教材进行了适当的修改,吸收了使用本书师生的意见,编写了与本书配套的《高等数学习题解答与自我测试》教学辅导参考书。

第 2 版的教材在内容的编排上做了一些变动:“微分方程”的内容从上册的第 7 章,移到了下册的第 11 章;下册中“曲线积分与曲面积分”的内容,由正文部分移到了附录之中。

本书仍分上、下两册,上册的内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及向量代数与空间解析几何等 7 章;下册的内容包括多元函数微分学、重积分、级数、微分方程及附录中的曲线积分与曲面积分等 5 章的内容.全书基本上覆盖了现行理工科类院校《高等数学》课程(本科生)的全部教学内容.因此,本书既适用于全日制普通高等理工科院校及经济、管理类院校的本科生作高等数学课程的教材,又可以作为网络高等教育、函授、高等职业技术教育或成人继续教育的大专生(书中有 * 的内容不学)作高等数学课程的教科书。

与本书配套的《高等数学习题解答与自我测试》一书,是应学生们的要求编写的,它可以辅导和帮助同学们更好地学习高等数学,进一步提高解题的能力.书中的自我测试题基本上是为本科生准备的。

本书的编写得到了天津大学网络教育学院、天津大学仁爱学院、天津大学职业教育学院和天津大学继续教育学院的大力支持和帮助,编者在此深表感谢.天津大学精仪学院的部分同学在 2005 年研究生入学考试(数学 I)的准备中试用了本书,他们取得的成绩令我们高兴。

参加本书编写工作的有邱忠文、李君湘、于桂贞、李彩英、严丽、韩健、孙秀萍、韩月丽等.限于编者的水平,书中不免仍有疏误,恳请读者指正。

编 者

2005 年 6 月于天津大学

目 录

第1章 函数	1
1.1 函数的概念	1
习题 1-1	7
1.2 初等函数	8
习题 1-2	15
第1章 基本要求	15
复习题 1	16
第2章 极限与连续	18
2.1 数列的极限	18
习题 2-1	21
2.2 函数的极限	22
习题 2-2	28
2.3 极限的运算法则	29
习题 2-3	33
2.4 极限的存在准则 两个重要的极限	34
习题 2-4	38
2.5 无穷小的比较	39
习题 2-5	42
2.6 函数的连续性	42
习题 2-6	49
第2章 基本要求	50
复习题 2	50
第3章 导数与微分	53
3.1 导数的概念	53
习题 3-1	59
3.2 函数的微分法	60
习题 3-2	68

3.3 高阶导数	69
习题 3-3	74
3.4 隐函数及参量函数的微分法	74
习题 3-4	79
3.5 函数的微分	80
习题 3-5	87
第 3 章 基本要求	88
复习题 3	88
第 4 章 微分中值定理及导数的应用	91
4.1 微分中值定理	91
习题 4-1	99
4.2 罗必塔法则	100
习题 4-2	106
4.3 函数的单调增减性与极值	107
习题 4-3	114
4.4 函数的最大值与最小值	115
习题 4-4	120
4.5 曲线的凹凸性与拐点	121
习题 4-5	125
4.6 函数图形的描绘	126
习题 4-6	131
4.7 曲率	131
习题 4-7	136
第 4 章 基本要求	136
复习题 4	137
第 5 章 不定积分	139
5.1 不定积分的概念	139
习题 5-1	145
5.2 换元积分法	146
习题 5-2	153
5.3 分部积分法	154
习题 5-3	157
5.4 几类函数的积分法	158
习题 5-4	170

第5章 基本要求	170
复习题5	171
第6章 定积分	173
6.1 定积分的概念	173
习题6-1	179
6.2 定积分的性质	179
习题6-2	183
6.3 牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式	184
习题6-3	188
6.4 定积分的计算	189
习题6-4	199
6.5 广义积分初步与 Γ 函数	200
习题6-5	207
6.6 定积分在几何上的应用	207
习题6-6	224
6.7 定积分在物理及经济上的应用	225
习题6-7	231
第6章 基本要求	232
复习题6	232
第7章 向量代数与空间解析几何	235
7.1 空间直角坐标系	235
习题7-1	239
7.2 向量代数	240
习题7-2	255
7.3 平面的方程	256
习题7-3	263
7.4 空间的直线方程	264
习题7-4	272
7.5 常见的二次曲面	273
习题7-5	282
第7章 基本要求	283
复习题7	283
附录 初等数学常用公式、曲线汇编	286

第 1 章 函 数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映,是高等数学研究的主要对象.在本章中,我们主要对初等函数的概念和性质作简略的介绍.

1.1 函数的概念

在高等数学课程中,研究问题所涉及到的数,绝大多数都是在实数范围内进行的.今后如果没有声明,本书中所提到的数,都是实数;所提到的数集,都是实数集.按照习惯,全体正自然数的集合记为 $\mathbf{N}^+$;全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$;全体有理数的集合记为 $\mathbf{Q}$;全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$.

1.1.1 区间与邻域

定义 1.1 设数 a 与 b 满足 $a < b$, 则数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

这里 a 和 b 分别称为开区间 (a, b) 的左端点和右端点.

对开区间 (a, b) 而言, 显然有 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$.

类似地, $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, 称为闭区间. a 和 b 仍然称为闭区间 $[a, b]$ 的左端点和右端点. 显然 $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$.

而把数集

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

都称为半开区间.

上面介绍的区间都是有限区间, 数“ $b - a$ ”称为这些有限区间的长度. 除了有限区间之外, 还有无限区间. 引进记号“ $+\infty$ ”(读为“正无穷大”)及“ $-\infty$ ”(读为“负无穷大”), 则

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}; [a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}; (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

都是无限区间.

而全体实数的集合 $\mathbf{R}$, 可以记为 $(-\infty, +\infty) = \{x | -\infty < x < +\infty\}$, 当然也是无限区间.

今后, 在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 就简称为“区间”并常用字母“ I ”表示.

邻域也是一个经常用到的数学概念, 它实际上是微观条件下的区间.

定义 1.2 设 a 与 $\delta (\delta > 0)$ 是两个数, 称数集 $\{x | a - \delta < x < a + \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记为 $N(a, \delta)$, 即

$$N(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 叫做这个邻域的中心, δ 叫做这个邻域的半径.

从定义 1.2 可知, 邻域 $N(a, \delta)$ 实际上就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$. 为了体现微观性, 尽管定义 1.2 中对 δ 没有什么限制, 一般总认为 δ 是很小的正数.

因为 $a - \delta < x < a + \delta$ 相当于 $|x - a| < \delta$, 所以邻域 $N(a, \delta)$ 又可以表示为

$$N(a, \delta) = \{x | |x - a| < \delta\}.$$

有时候我们用到邻域的概念时, 需要把邻域的中心去掉. 去掉中心 a 的邻域 $N(a, \delta)$, 称为点 a 的去心邻域, 记为 $N(\hat{a}, \delta)$, 即

$$N(\hat{a}, \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\},$$

或 $N(\hat{a}, \delta) = N(a, \delta) \setminus \{a\}$.

今后把点 a 的某一邻域也记为 $N(a, \delta)$.

1.1.2 函数的定义

定义 1.3 设有两个数集 X, Y , f 是一个确定的对应规律, 若对于每一个 $x \in X$, 通过 f 都有惟一的 $y \in Y$ 和它对应. 记为

$$f(x) = y,$$

则称 f 为定义在 X 上的一元函数, 简称为函数.

在定义 1.3 中, X 为 f 的定义域, 通常用记号 D_f 来表示. 当 x 取遍 X 中的一切数时, 与之对应的数 y 组成的数集 $V_f = \{y | y = f(x), x \in X\}$, 称为函数 f 的值域.

一个函数是由对应规律和函数的定义域确定的, 而值域则是随着对应规律和定义域的给定而确定的. 习惯上把函数 f 说成“变量 y 是变量 x 的函数”, 并用记号 $y = f(x)$ 来表示. 通常称 y 为因变量或函数, 而把 x 称为自变量.

函数中表示对应关系的记号“ f ”也可以用其它的字母表示, 例如“ g ”、“ φ ”、“ F ”、“ G ”等. 这时函数的记号相应地表示为 $y = g(x)$ 、 $y = \varphi(x)$ 、 $y = F(x)$ 和 $y = G(x)$ 等.

在不考虑函数的实际意义的时候, 函数的定义域就是自变量所能取的使函数关系成立的一切实数的集合, 而函数的定义域 D_f 和值域 V_f 通常都是由区间

或数集来表示的.

我们在平面上建立直角坐标系 xOy , 把满足对应关系 $y=f(x) (x \in D_f)$ 的数组 (x, y) , 看作 xOy 平面上的一个点, 当 x 取遍 D_f 上的每一个数值时, 就得到点 (x, y) 的一个集合 P

$$P = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D_f\}.$$

点集 P 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

1.1.3 函数值

如果对于自变量 x 的某一个确定的值 $x = x_0$, 函数 f 有一个确定的对应值 $f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为函数 f 在点 $x = x_0$ 处的函数值. 这时也称函数 f 在点 $x = x_0$ 处是有定义的.

例 1.1 求函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域 D_f 及函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

解 函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $D_f = [-1, 1]$; 函数值

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 1.2 求函数 $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0, \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$ 的定义域 D_f 、值域 V_f 及函数值 $f(-1)$.

解 函数 $y = |x|$ 的定义域为 $D_f = (-\infty, +\infty)$; 值域 $V_f = [0, +\infty)$; 函数值 $f(-1) = 1$.

例 1.3 求符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0, \\ 0, & \text{当 } x = 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

的定义域 D_f 及值域 V_f .

解 函数的定义域为 $D_f = (-\infty, +\infty)$; 值域为 $V_f = \{-1, 0, 1\}$, 其图形如图 1-1 所示.

例 1.4 设 $x \in \mathbf{R}$, 不超过 x 的最大整数记为 $[x]$, 则 $\left[\frac{4}{7}\right] = 0$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[-\pi] = -4$, $[-2] = -2$, $[3] = 3$. 求函数 $y = [x]$ 的定义域 D_f 、值域 V_f .

解 函数 $y = [x]$ 的定义域为 $D_f = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $V_f = \mathbf{Z}$ (全体整数). 其图形如图 1-2 所示.

函数 $y = [x]$ 通常称为取整函数或高斯 (Gauss) 函数.

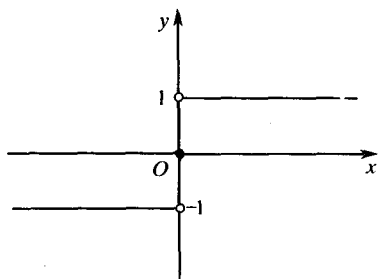


图 1-1

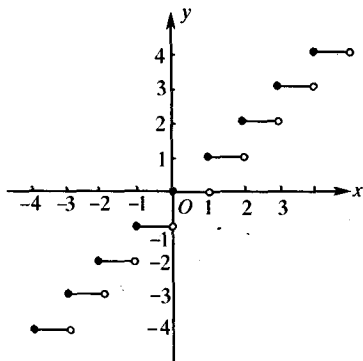


图 1-2

例 1.5 求函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ x + 1, & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

的定义域 D_f 、值域 V_f .

解 函数的定义域为 $D_f = [0, +\infty)$, 值域是 $V_f = [0, +\infty)$. 在例 1.5 中

当 $x \in [0, 1]$ 时, 对应的函数值为 $f(x) = 2\sqrt{x}$, 如 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, 对应的函数值为 $f(x) = x + 1$, 如 $f(3) = 3 + 1 = 4$.

1.1.4 函数的性质

1. 有界性

若有正数 M 存在, 使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数; 否则, $f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

如果存在常数 M (不一定局限于正数), 使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x) \leq M$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有上界, 并且任意一个 $N \geq M$ 的数 N 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个上界; 如果存在常数 m , 使 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $f(x) \geq m$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上有下界, 并且任意一个 $l \leq m$ 的数 l 都是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个下界.

显然, 函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是 $f(x)$ 在区间 I 上既有上界又有下界.

例 1.6 函数 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数.

解 因为无论 x 取任何实数, 都有 $|\sin x| \leq 1$, 所以 $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界函数.

从例 1.6 中可以看到,任何大于 1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的上界;而任何小于 -1 的常数都可以作为 $\sin x$ 的下界.

例 1.7 验证函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1, 2]$ 上是有界的,在区间 $(0, 1)$ 内是无界的.

解 由于 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x \in [1, 2]$ 上满足 $|f(x)| \leq 1$, 显然 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是有界的.

而 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内, 无论给定多么大的正数 M (当然会有 $M > 1$), 必有 $x_1 = \frac{1}{2M} \in (0, 1)$, 使 $|f(x_1)| = 2M > M$. 也就是说, $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内的某一点处, 对应的函数值的绝对值, 必定大于预先给定的任何正数, 故 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内是无界的.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上为严格单调增加 (或严格单调减少) 的函数. 在讨论函数的单调性时, “严格”两字通常也可以略去.

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ (或 $f(x_1) \geq f(x_2)$), 则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上为广义单调增加 (或广义单调减少) 的函数. 广义单调增加的函数, 通常称为非减函数; 广义单调减少的函数则称为非增函数.

显然函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的; 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的.

而函数 $y = x, y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内都是单调增加的.

3. 奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上满足 $f(-x) = f(x)$ (或 $f(-x) = -f(x)$), 则称 $f(x)$ 为偶函数 (或奇函数).

偶函数的图形是关于 Oy 轴对称的; 奇函数的图形是关于原点对称的.

例如, $f(x) = x^2, g(x) = x \sin x$ 在定义区间上都是偶函数, 而 $F(x) = x, G(x) = x \cos x$ 在定义区间上都是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个非零常数 T , 对一切的 x 均有 $f(x + T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 并把 $|T|$ 称为 $f(x)$ 的周期. 应当指出的是, 通常讲的周期函数的周期是指最小的正周期.

对三角函数而言, $y = \sin x$ 、 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, 而 $y = \tan x$ 、 $y = \cot x$ 则是以 π 为周期的周期函数.

关于函数的性质, 除了有界性与无界性之外, 单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质, 而不是每一个函数都一定具备的.

1.1.5 复合函数与反函数

1. 复合函数

设 $y = f(u)$ 是数集 Y 上的函数, $u = \varphi(x)$ 是由数集 X 到数集 Y 的一个非空子集 Y_φ 的函数. 因此, 对每一个 $x \in X$, 通过 u 都有惟一的 y 与它对应, 这时在 X 上产生了一个新的函数, 用 $f \circ \varphi$ 表示, 并称 $f \circ \varphi$ 为 X 上的复合函数, 记为

$$(f \circ \varphi)(x) = y \text{ 或 } y = f[\varphi(x)], x \in X.$$

式中, u 叫做中间变量; X 是复合函数 $f \circ \varphi$ 的定义域; $f \circ \varphi$ 表示由 x 产生 y 的对应规律.

应当说明的是, 复合函数 $(f \circ \varphi)(x)$ 的定义域 X 是不能等同于函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域的. 数集 X 是由使函数 $u = \varphi(x)$ 的值域 Y_φ 满足 $Y_\varphi \subseteq Y$ 的实数所组成的.

复合函数是经常遇到的一种函数结构. 例如, 由物理学知道, 物体的动能 E 与速度 v 的函数关系是 $E = \frac{1}{2}mv^2$ (这里 m 为物体的质量), 如果将此物体以初速度 v_0 垂直向上抛出, 由于地球引力的关系, 这时速度 v 与时间 t 有下面的函数关系 $v = v_0 - gt$, 于是, 物体的动能成为时间 t 的函数

$$E = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2.$$

这个函数就是复合函数, 其中 v 是中间变量.

又例如 $y = \sin x^2$, 是由 $y = \sin u$ 和 $u = x^2$ 复合而成的复合函数, 其定义域为 $\mathbf{R}$. 而函数 $y = \sqrt{x+4}$ 是由 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = x+4$ 复合而成的复合函数, 其定义域为 $[-4, +\infty)$. 它是中间变量 $u = x+4$ 的定义域 $\mathbf{R}$ 的子集.

例 1.8 设 $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = 2^x$. 求 $f[\varphi(x)]$ 、 $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(x)] = [\varphi(x)]^2 = (2^x)^2 = 2^{2x}$;

$$\varphi[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}.$$

从例 1.8 可以看出 $f \circ \varphi \neq \varphi \circ f$, 也就是说复合函数的复合次序是不能交换的.

2. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f , 值域为 V_f . 对任意的 $y \in V_f$, 在 D_f 上确定了一个 x 与 y 的对应, 且满足 $y=f(x)$. 如果把 y 看作自变量, x 看作因变量, 就可以得到一个新的函数: $x=f^{-1}(y)$. 我们称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数, 而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 一般地说, 直接函数 f 与反函数 f^{-1} 是不相同的两个函数, 这是因为定义域和对应规律不相同的缘故.

由于习惯上 x 表示自变量, y 表示因变量, 我们约定 $y=f^{-1}(x)$ 也是直接函数 $y=f(x)$ 的反函数, 通常称它为习惯反函数. 今后如不特别声明, 求某一个直接函数 $y=f(x)$ 的反函数, 均指求它的习惯反函数.

例 1.9 求函数 $y=2x+3$ 的反函数.

解 由 $y=2x+3$, 有 $x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$, 于是得到反函数

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

类似地, 不难求出函数 $y=x^3$ 的反函数为 $y=x^{\frac{1}{3}}$.

应当说明的是, 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的, 并且单调的直接函数的反函数也是单调的.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y=\frac{x+2}{x^2-4}; \quad (2) y=\arcsin \frac{2x-1}{7};$$

$$(3) y=\sqrt{\lg(x^2-3)}; \quad (4) y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\lg(1-x)}.$$

2. 设 $f(\sin \frac{x}{2})=1+\cos x$, 求 $f(x)$ 、 $f(\cos \frac{x}{2})$.

3. 设 $f(u)$ 满足 $f^2(\lg u)-2uf(\lg u)+u^2\lg u=0$, $u \in [1, 10]$, 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} 1+x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0, \\ 2^x, & \text{当 } 0 < x < +\infty \end{cases}$ 求 $f(-2)$, $f(0)$, $f(5)$ 及 $f(x-1)$.

5. 设 $f(x-1)=x^2$, 求 $f(2x+1)$.

6. 设 $y=\frac{x}{2}f(t-x)$, 且当 $x=1$ 时, $y=\frac{1}{2}t^2-t+\frac{1}{2}$, 求 $f(x)$.

7. 判定函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$ 的奇偶性.

8. 求函数 $f(x)=\sin^2 2x$ 的周期.

9. 求由函数 $f(x) = \frac{1}{1+x}$ 所确定的复合函数 $f[f(x)]$ 及其定义域.

* 10. 求函数 $y = \lg\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ 的定义域.

1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数这 6 类函数. 这些函数在中学的数学课程里已经学过.

基本初等函数虽然比较简单, 但是由于它们的重要性, 我们希望读者熟悉它们的图形、定义域和某些简单的性质. 在这里, 我们仅给出它们的图形, 以利于读者复习.

1. 幂函数 $y = x^\alpha (\alpha \in \mathbf{R})$

它的定义域和值域依 α 的取值不同而不同, 但是无论 α 取何值, 幂函数在 $x \in (0, +\infty)$ 内总有定义. 常见的幂函数的图形如图 1-3 所示.

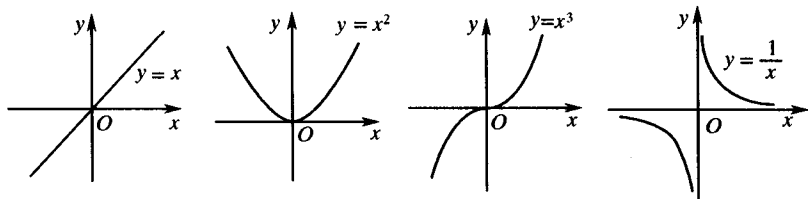


图 1-3

2. 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$. 指数函数的图形如图 1-4 所示.

3. 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^x$ 的反函数. 其图形如图 1-5 所示.

在工程中, 常以无理数 $e = 2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底, 并且记 $e^x = \exp x$, $\log_e x = \ln x$, 而后者称为自然对数函数.

4. 三角函数

三角函数有正弦函数 $y = \sin x$ 、余弦函数 $y = \cos x$ 、正切函数 $y = \tan x$ 、余切函数 $y = \cot x$ 、正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切等函数的图形如图 1-6 所示.

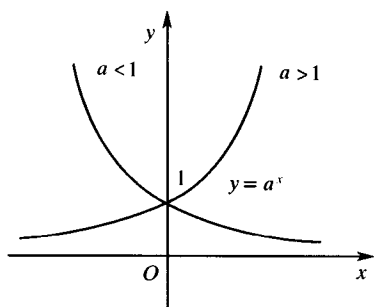


图 1-4

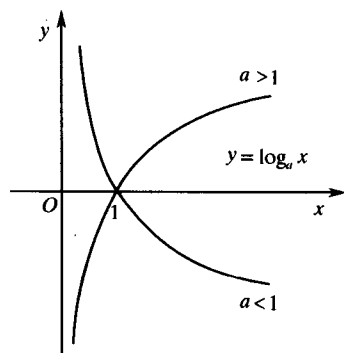


图 1-5

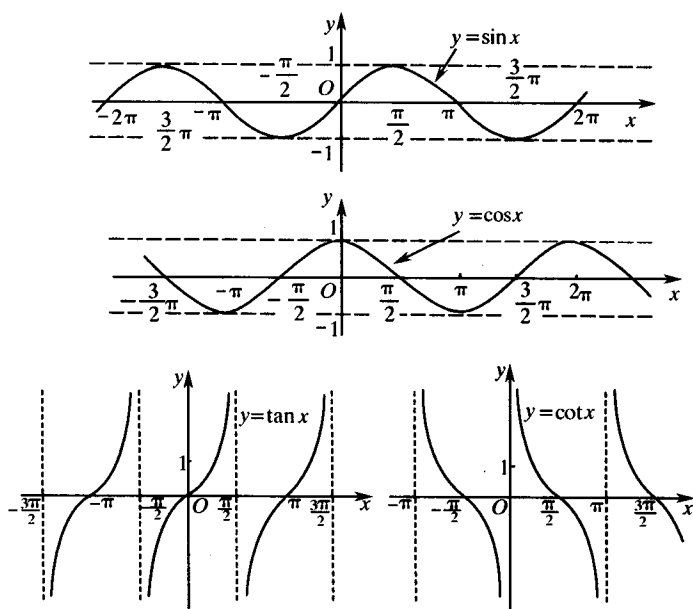


图 1-6

5. 反三角函数

反三角函数主要包括反正弦函数 $y = \arcsin x$ 、反余弦函数 $y = \arccos x$ 、反正切函数 $y = \arctan x$ 和反余切函数 $y = \text{arccot} x$ 等. 它们的图形如图 1-7 所示.

6. 常量函数 $y = c$ (c 为常数)

定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数的图形是一条水平的直线, 如图 1-8 所示.

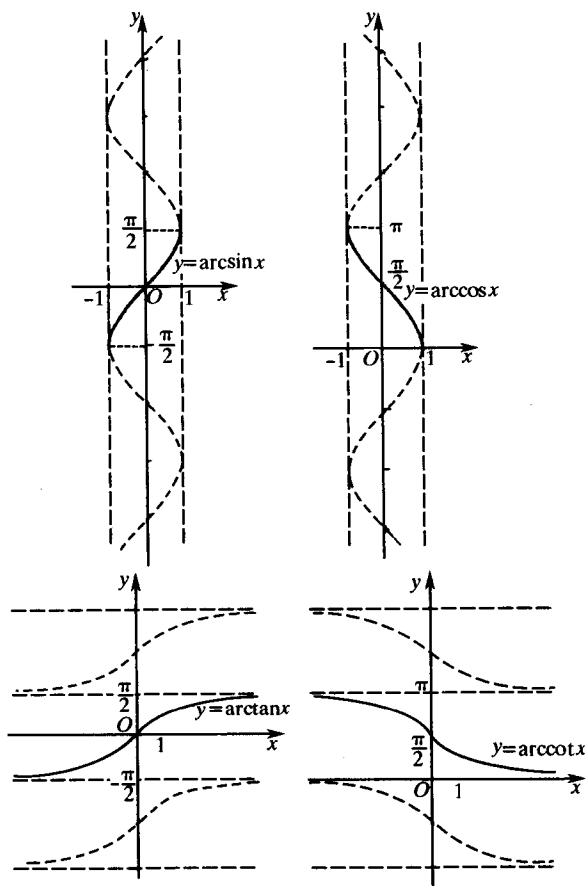


图 1-7

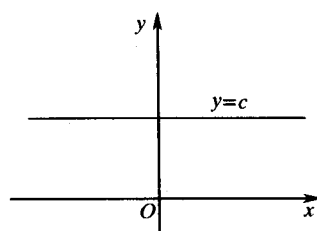


图 1-8

1.2.2 初等函数

在自然科学、社会科学及工程技术中,经常遇到的函数大多是由基本初等函数构成的.