



哈尔滨工程大学“十一五”规划教材

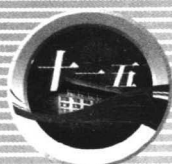
信号检测与估计

主 编 沈允春 田 园

 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

TN911.23/23

2007



哈尔滨工程大学“十一五”规划教材

信号检测与估计

主 编 沈允春 田 园



 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

内 容 简 介

本书共有7章。前3章是滤波理论,作为一个单元,包括维纳线性滤波理论、匹配滤波器理论和卡尔曼滤波理论。第4章、第5章和第6章讨论检测理论,包括一般检测理论、高斯加性白噪声背景下和非白噪声背景下的信号检测以及序列检测。第7章介绍多种参量估计方法。

本书可作为理工科相关专业高年级本科生教材,也可作为研究生和相关专业工程技术人员的参考读物。

图书在版编目(CIP)数据

信号检测与估计/沈允春,田园主编. —哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2007.9
ISBN 978-7-81133-006-9

I.信… II.①沈…②田… III.①信号检测-高等学校-教材②参数估计-高等学校-教材 IV.TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 145074 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传 真 0451-82519699
经 销 新华书店
印 刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开 本 787mm×1 092mm 1/16
印 张 7.75
字 数 155 千字
版 次 2007 年 10 月第 1 版
印 次 2007 年 10 月第 1 次印刷
定 价 15.00 元
<http://press.hrbeu.edu.cn>
E-mail: heupress@hrbeu.edu.cn

前言

>>>> PREFACE

在20世纪40年代,雷达和声呐对第二次世界大战产生了重大影响。正是由于雷达和声呐技术发展的需要推动了信号检测和估计理论的研究。信号检测和估计理论是现代信息理论的重要组成部分。其理论基础是信息论,采用概率论、随机过程和数理统计作为研究工具。信号检测与估计理论已广泛应用于雷达、声呐和自动控制等领域;在模式识别、射电天文学、遥感遥测、资源探测、天气预报、生物医学科学及社会科学等领域也得到了广泛应用。

信号检测与估计理论分为检测理论与估计理论两部分。估计理论包括参数和波形估计。波形估计常称为滤波理论,维纳滤波理论和卡尔曼滤波理论是其基本组成。为了使本科生对信号检测和估计理论有一个较为完整的入门理解,本书将维纳线性滤波理论、匹配滤波器理论和卡尔曼滤波理论作为前3章构成一个单元。本书的第4章、第5章和第6章讨论检测理论,采用数理统计中的假设检验方法,以贝叶斯检验作为重点。先在第4章中讨论一般的检测理论。第5章将信号检测理论用于高斯加性白噪声背景下的确知信号检测,而对非白噪声背景下的信号检测只作一般介绍。第6章讨论序列检测,介绍序列检测的基本原理、平均样本数的计算以及序列检测和固定样本检测的比较。本书第7章讨论参量估计,以贝叶斯估计为重点介绍多种估计方法。

本书叙述清晰,简明易懂,每章配有例题和习题,有利于掌握基本理论。

本书得以出版要特别感谢哈尔滨工程大学教务处赵琳处长的鼓励 and 大力支持。信通学院研究生郭文卓和孙晓锋同学在本书校对时做了大量工作,在此表示诚挚的谢意。

由于作者水平所限,错误及不当之处敬请读者批评指正。

编者

2007年9月

CONTENTS

目 录

第1章 维纳线性滤波理论	1
1.1 引言	1
1.2 非因果维纳滤波器	2
1.3 因果维纳滤波器	5
1.4 离散时间随机过程的维纳滤波	7
1.5 维纳滤波器举例	8
1.6 维纳滤波器特点	11
习题	12
第2章 匹配滤波器	13
2.1 引言	13
2.2 白噪声背景下的匹配滤波器	13
2.3 匹配滤波器的性质	15
2.4 匹配滤波器与相关器	17
2.5 举例	20
2.6 色噪声背景下的匹配滤波器(广义匹配滤波器)	22
2.7 离散匹配滤波器	26
习题	27
第3章 卡尔曼滤波	28
3.1 引言	28
3.2 标量卡尔曼滤波	28
3.3 向量卡尔曼滤波	31
3.4 卡尔曼滤波的特点	37
3.5 举例	38
习题	40
第4章 假设检验	41
4.1 引言	41
4.2 贝叶斯准则下的双择假设检验	42
4.3 贝叶斯准则下似然比检测获得最小平均风险的说明	45
4.4 双择检测的其他准则	46
4.5 举例	49
4.6 接收机工作特性	52
4.7 M 择假设检验	54
4.8 复合假设检验	57
习题	58

CONTENTS

第 5 章 确知信号检测	60
5.1 引言	60
5.2 信号和噪声离散化	60
5.3 高斯白噪声中雷达信号的检测	61
5.4 二元通信信号的检测	63
5.5 接收机工作特性	64
5.6 有色高斯噪声中确知信号检测简介	68
5.7 随机参量信号检测	71
习题	75
第 6 章 序列检测	77
6.1 引言	77
6.2 序列检测的基本概念	77
6.3 平均样本数的计算	80
6.4 序列检测和固定时间检测比较	81
6.5 计算举例	85
习题	86
第 7 章 参量估计	87
7.1 引言	87
7.2 估计量及其性质	88
7.3 贝叶斯估计	92
7.4 最大似然估计	94
7.5 举例	96
7.6 高斯白噪声中正弦信号参量的估计	100
7.7 多参量同时估计	106
7.8 线性最小均方估计	106
7.9 最小二乘估计	111
习题	115
参考文献	118



第 1 章 维纳线性滤波理论

1.1 引言

信号在传输过程中不可避免地要受到传输系统内部和来自外部的各种干扰,使得有用信息受到损失。由此,便提出这样一个问题,如何合理地构造一个系统,使它按一定的步骤处理信号与噪声的混合体,从中提取尽可能多的信息。这一问题通常可以从两个方面来研究:一方面是在噪声干扰下的信号检测问题,即经处理之后回答信号的有无问题;另一方面是复现有用信号波形或测量有用信号的某些携带消息的未知参量问题,即所谓参量估计问题。维纳线性滤波理论的实质是信号波形估计问题。由于历史上它是作为滤波理论提出的,另外,后续两章我们还要讨论匹配滤波器理论和卡尔曼滤波理论,为此我们把这三部分作为一个单元来讨论。

维纳线性滤波理论是在第二次世界大战期间由于军事技术发展的需要而产生的。这一理论由原苏联数学家柯尔莫哥洛夫和美国数学家维纳在 1941 年到 1942 年期间各自独立提出,准确地说应称为维纳-柯尔莫哥洛夫线性滤波理论。但在多数文献中简称为维纳线性滤波理论。

假设滤波器输入端作用的是信号 $s(t)$ 和噪声 $n(t)$ 的混合体,即 $x(t) = s(t) + n(t)$,滤波器输出是 $y(t)$ 。我们把想要得到的滤波器的输出称为期望输出 $y_0(t)$ 。在维纳线性滤波理论中认为 $y_0(t)$ 是 $s(t)$ 的某种线性函数。其中最常见的是 $y_0(t)$ 是 $s(t)$ 或 $s(t)$ 的时移信号。根据时移的不同 $y_0(t)$ 有三种不同的形式,并赋予三种不同名称。

1. 预测

$$y_0(t) = s(t + \Delta t) \quad \Delta t > 0 \quad (1-1)$$

2. 滤波

$$y_0(t) = s(t) \quad (1-2)$$

3. 外推(内插)

$$y_0(t) = s(t - \Delta t) \quad \Delta t > 0 \quad (1-3)$$

维纳线性滤波理论中我们主要讨论纯滤波问题。而采用的最佳准则是滤波器输出相对于期望输出的误差的均方值最小。令 $\epsilon(t) = y(t) - y_0(t)$, 维纳线性滤波理论讨论的问题是寻找能使

$$J = E[\epsilon^2(t)] = E[(y(t) - y_0(t))^2] \quad (1-4)$$

达到最小值的滤波器的冲激响应 $h(t)$ 或传输函数 $H(\omega)$ 。

维纳滤波器可分为因果维纳滤波器和非因果维纳滤波器两种。我们先讨论后一种。



1.2 非因果维纳滤波器

1.2.1 维纳 - 霍夫积分方程

假设 $s(t)$ 和 $n(t)$ 是零均值的自相关函数或功率谱密度已知的平稳随机过程, 滤波器冲激响应为 $h(t)$, 滤波器输入为

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (1-5)$$

非因果滤波器的输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (1-6)$$

$$y_0(t) = s(t) \quad (1-7)$$

将(1-6)式代入(1-4)式

$$\begin{aligned} J &= E[\epsilon^2(t)] = E\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau - y_0(t)\right)^2\right] = \\ &= E\left[y_0^2(t) - 2\int_{-\infty}^{\infty} y_0(t) x(t - \tau) h(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) x(t - \eta) h(\tau) h(\eta) d\tau d\eta\right] = \\ &= R_{y_0}(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\tau) h(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) h(\tau) h(\eta) d\tau d\eta \end{aligned} \quad (1-8)$$

式中, $R_{y_0}(0)$ 是期望输出 $y_0(t)$ 的自相关函数在 $\tau=0$ 处的值, $R_x(\tau)$ 是滤波器输入的自相关函数; $R_{y_0x}(\tau)$ 是期望输出 $y_0(t)$ 和滤波器输入 $x(t)$ 之间的互相关函数。由于 $y_0(t)$ 是 $s(t)$ 的线性函数, 在滤波器输入 $x(t) = s(t) + n(t)$ 统计特性已知的情况下, $R_{y_0}(0)$, $R_{y_0x}(\tau)$, $R_x(\tau)$ 可以认为是已知的。因此, 要使性能指标 $J = E[\epsilon^2(t)]$ 达到极小值, 唯一可调整的是冲激响应 $h(t)$ 。这样一来, 维纳线性滤波理论的基本问题就是把性能指标 J 看成是 $h(t)$ 的函数 $J[h(t)]$, 调整函数 $h(t)$ 使另一函数 $J[h(t)]$ 取得极小值。解决这一问题普遍适用的方法是变分法。对于均方误差最小准则下的极值问题也可以根据正交性原理来解决。我们先讨论使用变分法寻求 $h(t)$ 应满足的条件。

将(1-8)式改写成

$$J[h(t)] = R_{y_0}(0) - 2\int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\tau) h(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) h(\tau) h(\eta) d\tau d\eta \quad (1-9)$$

设已找到 $h_0(t)$ 使 J 取得极小值, 令

$$h(t) = h_0(t) + \beta \delta h_0(t) \quad (1-10)$$

式中, $\delta h_0(t)$ 是 $h_0(t)$ 的邻近函数, β 是可变常数。将 $h(t)$ 代入(1-9)式, J 成了 $h(t)$ 的函



数,即

$$\begin{aligned}
 J[h_0(t) + \beta \delta h_0(t)] &= R_{y_0}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\tau) [h_0(\tau) + \beta \delta h_0(\tau)] d\tau + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) [h_0(\tau) + \beta \delta h_0(\tau)] \cdot \\
 &\quad [h_0(\eta) + \beta \delta h_0(\eta)] d\tau d\eta = \\
 &\quad R_{y_0}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\tau) h_0(\tau) d\tau + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) h_0(\tau) h_0(\eta) d\tau d\eta - \\
 &\quad 2\beta \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\eta) \delta h_0(\eta) d\eta + \\
 &\quad \beta \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) h_0(\eta) \delta h_0(\tau) d\tau d\eta + \right. \\
 &\quad \left. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) h_0(\tau) \delta h_0(\eta) d\tau d\eta \right] + \\
 &\quad \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) \delta h_0(\tau) \delta h_0(\eta) d\tau d\eta = \\
 &\quad R_{y_0}(0) - 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\tau) h_0(\tau) d\tau + \\
 &\quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) h_0(\tau) h_0(\eta) d\tau d\eta - \\
 &\quad 2\beta \int_{-\infty}^{\infty} \delta h_0(\eta) [R_{y_0x}(\eta) - \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) R_x(\eta - \tau) d\tau] d\eta + \\
 &\quad \beta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta - \tau) \delta h_0(\tau) \delta h_0(\eta) d\tau d\eta \quad (1-11)
 \end{aligned}$$

对于确定的 $h_0(t)$ 和 $\delta h_0(t)$, $J[h_0(t) + \beta \delta h_0(t)]$ 成了 β 的函数。利用普通函数相对于变量求极值的方法, $J[h_0(t) + \beta \delta h_0(t)]$ 的极值将在下列条件下达到

$$\left. \frac{\partial J[h_0(t) + \beta \delta h_0(t)]}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = 0$$

即

$$\left. \frac{\partial J[\beta]}{\partial \beta} \right|_{\beta=0} = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta h_0(\eta) [R_{y_0x}(\eta) - \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) R_x(\eta - \tau) d\tau] d\eta = 0 \quad (1-12)$$

对于任意给定的 $\delta h_0(t)$ 要使上式成立, 只有

$$R_{y_0x}(\eta) - \int_{-\infty}^{\infty} h_0(\tau) R_x(\eta - \tau) d\tau = 0 \quad (1-13)$$

去掉 $h_0(t)$ 的下脚标, 能使均方误差达到最小的滤波器的冲激响应所需满足的方程是

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) R_x(\eta - \tau) d\tau = R_{y_0x}(\eta) \quad (1-14)$$

这就是著名的维纳-霍夫积分方程。

(1-14)式也可以用正交性原理求出。所谓正交性原理是指当用观察值的某种线性组合对另一值作估计时, 若估计误差同观察值正交, 则此估计值就是最小均方误差估计值, 换



句话说就是当估计误差同观察值正交时,估计误差就是最小均方误差。在此处观察值是滤波器输入随机过程 $x(t)$,估计误差为

$$\varepsilon(t) = y_0(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

根据正交性原理可知

$$E\left[\left(y_0(t) - \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right)x(t-\eta)\right] = 0 \quad (1-15)$$

求期望后得到(1-14)式,即

$$R_{y_0x}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_x(\eta-\tau)d\tau$$

将(1-14)式代入(1-8)式得维纳滤波器输出的最小均方误差为

$$\begin{aligned} J_{\min} &= R_{y_0}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\tau)h(\tau)d\tau \\ &= R_{y_0}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta-\tau)h(\tau)h(\eta)d\tau d\eta \end{aligned} \quad (1-16)$$

1.2.2 维纳滤波器的传输函数

对于非因果维纳滤波器只要对(1-14)式两边求傅里叶变换就很容易求得维纳滤波器的传输函数。

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\eta}d\eta \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)R_x(\eta-\tau)d\tau$$

等式右端利用傅里叶变换的延时定理后立即可得

$$H(\omega) = \frac{G_{y_0x}(\omega)}{G_x(\omega)} \quad (1-17)$$

式中

$$G_{y_0x}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_0x}(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta \quad (1-18)$$

为期望输出和滤波器输入之间的互谱密度。

$$G_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad (1-19)$$

为滤波器输入的自谱密度。

根据

$$R_{y_0}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{y_0}(\omega)d\omega \quad (1-20)$$

以及

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\eta-\tau)h(\tau)h(\eta)d\tau d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x(\omega)|H(\omega)|^2d\omega \quad (1-21)$$

可得滤波器输出最小均方误差的等价表达式为

$$J_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G_{y_0}(\omega) - G_x(\omega)|H(\omega)|^2]d\omega \quad (1-22)$$

式中, $G_{y_0}(\omega)$ 是期望输出的自谱密度。



1.3 因果维纳滤波器

因果维纳滤波器的冲激响应 $h(t)$ 要满足条件

$$h(t) = 0 \quad t < 0 \quad (1-23)$$

此时维纳 - 霍夫方程变为

$$\int_0^{\infty} h(\tau) R_x(\eta - \tau) d\tau = R_{y_0x}(\eta) \quad (1-24)$$

在一般情况下,上述积分方程难以求得显式解。在随机过程的功率谱密度是有理谱密度的条件下,维纳 - 霍夫方程有可能求得显式解。实际上许多随机过程具有有理谱密度或可以近似表示成有理谱密度。对于有理谱密度可以将其表示成有理函数,即

$$G(\omega) = a^2 \frac{\omega^{2M} + c_{2M-2}\omega^{2M-2} + \cdots + c_2\omega^2 + c_0}{\omega^{2N} + d_{2N-2}\omega^{2N-2} + \cdots + d_2\omega^2 + d_0} \quad (1-25)$$

(1-25)式还可以表示成因式分解形式

$$G(\omega) = a^2 \frac{\prod_{i=1}^M (\omega - \alpha_i)(\omega - \alpha_i^*)}{\prod_{j=1}^N (\omega - \beta_j)(\omega - \beta_j^*)} = a^2 \frac{\left| \prod_{i=1}^M (\omega - \alpha_i) \right|^2}{\left| \prod_{j=1}^N (\omega - \beta_j) \right|^2} \quad (1-26)$$

式中, $M < N$, * 表示共轭。

在 $G_x(\omega)$ 是有理谱密度的条件下求解因果维纳滤波器的传输函数或冲激响应,首先要对功率谱密度进行谱分解,也就是说将 $G_x(\omega)$ 表示为

$$G_x(\omega) = a^2 \frac{\prod_{i=1}^M (\omega - \alpha_i)(\omega - \alpha_i^*)}{\prod_{j=1}^N (\omega - \beta_j)(\omega - \beta_j^*)} = G_x^+(\omega) G_x^-(\omega) \quad (-\infty < \omega < \infty) \quad (1-27)$$

式中

$$G_x^+(\omega) = a \frac{\prod_{i=1}^M (\omega - \alpha_i)}{\prod_{j=1}^N (\omega - \beta_j)} \quad (1-28)$$

$$G_x^-(\omega) = a \frac{\prod_{i=1}^M (\omega - \alpha_i^*)}{\prod_{j=1}^N (\omega - \beta_j^*)} \quad (1-29)$$

$G_x^+(\omega)$ 的所有零极点位于 ω 上半平面,在 s 域其所有零极点位于 s 平面左半平面;
 $G_x^-(\omega)$ 的所有零极点位于 ω 下半平面,在 s 域其所有零极点位于 s 平面右半平面。定义

$$g_x^+(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x^+(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-30)$$

$$g_x^-(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_x^-(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-31)$$



由复变函数中的约当引理和哥西定理,有

$$g_x^+(t) = 0 \quad t < 0 \quad (1-32)$$

$$g_x^-(t) = 0 \quad t > 0 \quad (1-33)$$

由于 $G_x(\omega) = G_x^+(\omega)G_x^-(\omega)$, 故

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_x^-(t)g_x^+(\tau-t)dt = \int_{-\infty}^0 g_x^-(t)g_x^+(\tau-t)dt \quad (1-34)$$

定义函数 $b(t)$, $b(t)$ 由下列方程确定

$$R_{y_0x}(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} g_x^-(t)b(\eta-t)dt = \int_{-\infty}^0 g_x^-(t)b(\eta-t)dt \quad (1-35)$$

这样, 维纳-霍夫积分方程变为

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 g_x^-(t)b(\eta-t)dt - \int_0^{\infty} h(\tau)d\tau \int_{-\infty}^0 g_x^-(t)g_x^+(\eta-\tau-t)dt = \\ \int_{-\infty}^0 g_x^-(t)[b(\eta-t) - \int_0^{\infty} h(\tau)g_x^+(\eta-\tau-t)d\tau]dt = 0 \end{aligned} \quad (1-36)$$

要使(1-36)式成立, 必须要满足

$$b(\eta-t) - \int_0^{\infty} h(\tau)g_x^+(\eta-\tau-t)d\tau = 0 \quad (1-37)$$

令 $\eta-t = \eta'$, 式(1-37)变为

$$b(\eta') = \int_0^{\infty} h(\tau)g_x^+(\eta'-\tau)d\tau \quad (1-38)$$

(1-38)式形式上同因果维纳-霍夫方程(1-24)式相同。对于因果滤波器 $h(t) = 0, t < 0$, 而 $g_x^+(t) = 0, t < 0$, (1-38)式中的 η' 必须大于零, 故

$$b(t) = 0 \quad t < 0 \quad (1-39)$$

这就是说, $b(t)$ 是因果信号, 与 $b(t)$ 对应的傅里叶变换的零极点位于 ω 平面的上半平面。(1-38)式左右两端都是因果信号, 因此可以在 $0 < \eta' < \infty$ 域内对(1-38)式左右两端进行傅里叶变换, 则

$$\int_0^{\infty} b(\eta')e^{-j\omega\eta'}d\eta' - \int_0^{\infty} e^{-j\omega\eta'}d\eta' \int_0^{\infty} h(\tau)g_x^+(\eta'-\tau)d\tau = 0 \quad (1-40)$$

在上式第二个积分中令 $\eta' - \tau = t$, 并注意到 $g_x^+(t) = 0, t < 0$, 则(1-40)式变为

$$\int_0^{\infty} b(\eta')e^{-j\omega\eta'}d\eta' - \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \int_0^{\infty} g_x^+(t)e^{-j\omega t}dt = 0 \quad (1-41)$$

令

$$B(\omega) = \int_0^{\infty} b(\eta')e^{-j\omega\eta'}d\eta' \quad (1-42)$$

则(1-41)式变为

$$B(\omega) - H(\omega)G_x^+(\omega) = 0$$

故因果维纳滤波器的传输函数为

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{G_x^+(\omega)} \quad (1-43)$$

(1-43)式中的 $B(\omega)$ 是 $b(t)$ 的傅里叶变换, 根据 $b(t)$ 的定义式(1-35)式, $R_{y_0x}(t)$ 是 $b(t)$ 和 $g_x^-(t)$ 的卷积, 由傅里叶变换的性质有



$$G_{y_0x}(\omega) = G_x^-(\omega)B(\omega)$$

$$B(\omega) = \frac{G_{y_0x}(\omega)}{G_x^-(\omega)} \quad (1-44)$$

前面已经说过, $B(\omega)$ 的零极点必须位于 ω 平面的上半平面, 因此必须先对 $\frac{G_{y_0x}(\omega)}{G_x^-(\omega)}$ 作谱分解, 取其中零极点的上半平面的那部分作为 $B(\omega)$, 为明确起见, 用 $B^+(\omega)$ 表示, 即

$$B^+(\omega) = \left[\frac{G_{y_0x}(\omega)}{G_x^-(\omega)} \right]^+ \quad (1-45)$$

将(1-45)式代入(1-43)式得因果维纳滤波器传输函数为

$$H(\omega) = \frac{\left[\frac{G_{y_0x}(\omega)}{G_x^-(\omega)} \right]^+}{G_x^+(\omega)} \quad (1-46)$$

对于因果维纳滤波器, 最小均方误差由下式确定

$$J_{\min} = R_{y_0}(0) - \int_0^{\infty} R_{y_0x}(\tau)h(\tau)d\tau \quad (1-47)$$

在实际计算因果维纳滤波器传输函数或冲激响应时, 在 s 域中进行计算可能更为方便。为此, 只要在功率谱密度中代入 $s = j\omega$, ω 的上半平面成了 s 域的左半平面, ω 的下半平面成了 s 域的右半平面, 仿照(1-28)式、(1-29)式、(1-45)式和(1-46)式进行计算, 对计算出的 $H(s)$ 进行单边拉普拉斯变换即可确定因果维纳滤波器的冲激响应。

1.4 离散时间随机过程的维纳滤波

设 $\{x_i\}$ 是滤波器输入样本序列, $\{y_{0i}\}$ 是滤波器期望输出样本序列, $\{y_i\}$ 是滤波器输出样本序列, $\{h_i\}$ 是滤波器单位样值序列。以上随机序列均认为是零均值平稳随机序列。滤波器是否因果取决于卷积和下限是 0 还是 $-\infty$, 在讨论离散维纳-霍夫方程时为了简单起见以因果维纳滤波器为例。因此, 滤波器输出可以表示为

$$y(i) = \sum_{k=0}^{\infty} x(i-k)h(k) \quad (1-48)$$

滤波器输出误差为

$$\epsilon(i) = y_0(i) - y(i) = y_0(i) - \sum_{k=0}^{\infty} x(i-k)h(k) \quad (1-49)$$

性能指标为

$$J = E[\epsilon^2(i)] = E\left[\left(y_0(i) - \sum_{k=0}^{\infty} x(i-k)h(k)\right)^2\right] \quad (1-50)$$

使 J 达到最小的单位样值响应可以根据正交性原理来确定, 即

$$E\left[\left(y_0(i) - \sum_{k=0}^{\infty} x(i-k)h(k)\right)x(i-m)\right] = 0 \quad m \geq 0, k \geq 0 \quad (1-51)$$



由式(1-51)得离散维纳-霍夫方程为

$$R_{y_0x}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} R_x(m-k)h(k)$$

对于非因果的离散维纳滤波器,对(1-51)式两边进行 Z 变换后得

$$H(z) = \frac{G_{y_0x}(z)}{G_x(z)} \quad (1-52)$$

$$J_{\min} = R_{y_0}(0) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)R_{y_0x}(k) \quad (1-53)$$

当 $G_x(z)$ 可以表示成 z 的有理函数时,因果离散维纳-霍夫方程的求解可以仿照因果连续维纳-霍夫方程求解方法进行,其结果为

$$H(z) = \frac{\left[\frac{G_{y_0x}(z)}{G_x^-(z)} \right]^+}{G_x^+(z)} \quad (1-54)$$

式中, $G_x(z) = G_x^+(z)G_x^-(z)$, $G_x^+(z)$ 的零极点均位于单位圆内, $G_x^-(z)$ 的零极点均位于单位圆外, $\left[\frac{G_{y_0x}(z)}{G_x^-(z)} \right]^+$ 表示 $\frac{G_{y_0x}(z)}{G_x^-(z)}$ 的零极点位于单位圆内的那部分。

因果离散维纳滤波器输出误差均方值为

$$J_{\min} = R_{y_0}(0) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)R_{y_0x}(k) \quad (1-55)$$

1.5 维纳滤波器举例

例1 设滤波器输入为

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (1-56)$$

式中, $s(t)$ 是零均值平稳随机信号, 自相关函数 $R_s(\tau)$ 已知; $n(t)$ 是零均值平稳随机噪声, 其自相关函数为 $R_n(\tau)$ 。 $s(t)$ 和 $n(t)$ 互相正交, 期望信号 $y_0(t) = s(t)$, 求非因果维纳滤波器的传输函数 $H(\omega)$ 。

解 由(1-17)式可知

$$H(\omega) = \frac{G_{y_0x}(\omega)}{G_x(\omega)} = \frac{G_s(\omega)}{G_x(\omega)} \quad (1-57)$$

$$R_{xx}(\tau) = E[s(t)(s(t+\tau) + n(t+\tau))] = R_s(\tau) \quad (1-58)$$

$$G_{xx}(\omega) = \mathcal{F}[R_{xx}(\tau)] = \mathcal{F}[R_s(\tau)] = G_s(\omega) \quad (1-59)$$

$$R_x(\tau) = E[(s(t) + n(t))(s(t+\tau) + n(t+\tau))] = R_s(\tau) + R_n(\tau) \quad (1-60)$$

$$G_x(\omega) = G_s(\omega) + G_n(\omega) \quad (1-61)$$

将(1-59)式和(1-61)式代入(1-57)式得

$$H(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{G_n(\omega)}{G_s(\omega)}} \quad (1-62)$$



讨论:由(1-62)式可以看出,在 $G_n(\omega) = 0, G_s(\omega) \neq 0$ 的频率范围有 $H(\omega) = 1$, 滤波器无失真地传输信号频率分量;在 $G_n(\omega) \neq 0, G_s(\omega) = 0$ 的频率范围有 $H(\omega) = 0$, 滤波器阻止那些噪声频率分量通过;在 $G_n(\omega)$ 和 $G_s(\omega)$ 同时存在的频率范围, $G_n(\omega)$ 越大, $H(\omega)$ 越小, 对噪声分量有较大的衰减, 从而保证输出信号有最小的失真。以上讨论可由图 1-1 说明, 由图可以看出按(1-62)式设计的滤波器是非因果的。

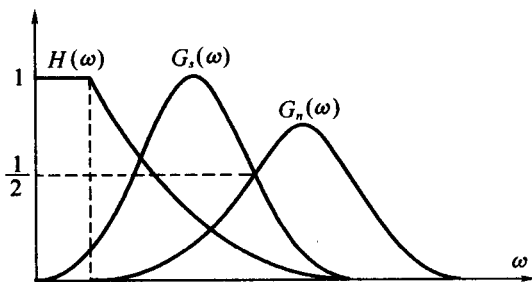


图 1-1 非因果维纳滤波器传输函数

例 2 设 $x(t) = s(t) + n(t)$, $R_s(\tau) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$, $R_n(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2|\tau|}$, $s(t)$ 和 $n(t)$ 互相正交, $y_0(t) = s(t)$, 求非因果和因果维纳滤波器的传输函数以及输出最小均方误差。

解

$$G_s(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|\tau|} e^{j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

$$G_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-2|\tau|} e^{j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{4 + \omega^2}$$

$$G_x(\omega) = G_s(\omega) + G_n(\omega) = \frac{1}{1 + \omega^2} + \frac{1}{4 + \omega^2} = \frac{5 + 2\omega^2}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)}$$

1. 非因果维纳滤波器

$$H(\omega) = \frac{G_s(\omega)}{G_s(\omega) + G_n(\omega)} = \frac{4 + \omega^2}{5 + 2\omega^2}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \left[\delta(t) + \frac{1.5}{\sqrt{10}} e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}|t|} \right]$$

$$J_{\min} = R_s(0) - \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) h(\tau) d\tau =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} \left[\delta(\tau) + \frac{1.5}{\sqrt{10}} e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}|\tau|} \right] d\tau =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{1.5}{\sqrt{10}} e^{-(1+\sqrt{\frac{5}{2}})\tau} d\tau = 0.16$$

2. 因果滤波器

在 s 域求解

$$G_s(s) = \frac{1}{1 - s^2}, \quad G_n(s) = \frac{1}{4 - s^2}$$



$$G_x(s) = G_s(s) + G_n(s) = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - s\right) \cdot \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + s\right)}{(1-s)(2-s)(1+s)(2+s)}$$

$$G_x^+(s) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + s}{(1+s)(2+s)}, \quad G_x^-(s) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} - s}{(1-s)(2-s)}$$

$$\left[\frac{G_{y_0x}(s)}{G_x^-(s)}\right]^+ = \left[\frac{G_s(s)}{G_x^-(s)}\right]^+ = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2-s}{(1+s)\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - s\right)}\right]^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{A}{1+s} + \frac{B}{\sqrt{\frac{5}{2}} - s}\right]^+$$

$$A = \frac{3}{\sqrt{\frac{5}{2}} + 1}, \quad B = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{5}{2}}}$$

$$\left[\frac{G_s(s)}{G_x^-(s)}\right]^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + 1}{1+s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1.16}{1+s}$$

$$H(s) = \frac{\left[\frac{G_s(s)}{G_x^-(s)}\right]^+}{G_x^+(s)} = \frac{1.16}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{1}{1+s}}{\sqrt{2} \frac{\sqrt{\frac{5}{2}} + s}{(1+s)(2+s)}} =$$

$$0.58 \frac{2+s}{\sqrt{\frac{5}{2}} + s} = 0.58 \left[1 + \left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}} + s} \right] =$$

$$0.58 \left(1 + 0.42 \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}} + s} \right)$$

$$h(t) = 0.58(\delta(t) + 0.42e^{-\sqrt{\frac{5}{2}}t})u(t)$$

$$J_{\min} = R_s(0) - \int_0^\infty R_s(\tau)h(\tau)d\tau = \frac{1}{2} - \frac{0.24}{2} \int_0^\infty e^{-(1+\sqrt{\frac{5}{2}})\tau}d\tau =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{0.24}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{5}{2}}} = 0.41$$

例 3 设 $x(i) = s(i) + n(i)$, $s(i)$ 和 $n(i)$ 是连续过程 $s(t)$ 和 $n(t)$ 用 $T = \ln 2$ 采样所得到的, $s(t)$ 和 $n(t)$ 正交, $R_s(\tau) = \frac{1}{2}e^{-|\tau|}$, $R_n(\tau) = \frac{1}{4}e^{-2|\tau|}$, 求维纳滤波器 $H(z)$ 和单位样值响应。

解

$$R_{y_0x}(k) = E[s(j+k)(s(j) + n(j))] = R_s(k)$$

$$R_x(k) = E[(s(j+k) + n(j+k))(s(j) + n(j))] = R_s(k) + R_n(k)$$



$$G_{y_0x}(z) = Z[R_{y_0x}(k)] = Z\left[\frac{1}{2}e^{|\kappa T|}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^T}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z-2}\right) = \frac{-0.75z}{(z-0.5)(z-2)}$$

$$G_x(z) = Z[R_s(k)] + Z[R_n(k)] = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-0.5} - \frac{z}{z-2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{z}{z-4}\right) =$$

$$\frac{-0.75z}{(z-0.5)(z-2)} - \frac{0.9375z}{(z-0.25)(z-4)} =$$

$$\frac{-1.6875z(z-0.34044)(z-2.93733)}{(z-0.5)(z-2)(z-0.25)(z-4)} =$$

$$\frac{0.78714(z-0.34044)z}{(z-0.5)(z-0.25)} \cdot \frac{0.78714(z^{-1}-0.34044)z^{-1}}{(z^{-1}-0.25)(z^{-1}-0.5)}$$

$$G_x^+(z) = \frac{0.78714(z-0.34044)z}{(z-0.5)(z-0.25)}, \quad G_x^-(z) = \frac{0.78714(z^{-1}-0.34044)z^{-1}}{(z^{-1}-0.25)(z^{-1}-0.5)}$$

$$\left[\frac{G_{y_0x}(z)}{G_x^-(z)}\right]^+ = \left[\frac{0.34984z(z-4)}{(z-0.5)(z-2.93733)}\right]^+ = \left[\frac{Az}{z-0.5} + \frac{Bz}{z-2.93733}\right]^+ = \frac{Az}{z-0.5}$$

$$A = \frac{0.34984(z-4)}{z-2.93733} \Big|_{z=0.5} = 0.50237$$

$$H(z) = \frac{0.50237z}{(z-0.5)G_x^+(z)} = \frac{0.50237z(z-0.25)}{0.78714z(z-0.34044)} = \frac{0.6382(z-0.25)}{z-0.34044} =$$

$$0.6382\left(0.73434 + \frac{0.26566z}{z-0.34044}\right) = 0.4687 + 0.1695 \frac{z}{z-0.34044} =$$

$$0.4687 + 0.1695 \frac{z}{z-0.34044}$$

$$h(n) = 0.4687\delta(n) + 0.1695(0.34044)^n u(n)$$

1.6 维纳滤波器特点

从维纳滤波理论的讨论可以看出维纳滤波器具有以下特点。

1. 维纳滤波采用的最佳准则是最小均方误差准则。在纯滤波的情况下,维纳滤波器着眼于恢复整个信号 $s(t)$,而不是信号所包含的某个参量,因此维纳滤波器可以看成是最佳波形估计器。

2. 求解维纳滤波器需要利用全部输入数据,适用于验后处理,不适用于实时处理。

3. 正由于维纳滤波器要恢复信号 $s(t)$,使波形失真最小,因此维纳滤波器常用于输入信号解调之后。