中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数学

第四册

财经类中等数学教材编写组编

高等教育出版社

数　　学

第四册

财经类中专数学教材编写组编

本书是根据国家教育委员会1987年审定的财经类专业通用《中等专业学校数学教学大纲》编写的。全书共分四册。本册内容为行列式与矩阵、投入产出简介、线性规划、概率论与数理统计初步。

本书由全国中等专业学校数学课程组组织审阅，并定为招收初中毕业生的中等专业学校财经类各专业的试用教材。招收高中毕业生的中等专业学校财经类各专业也可选用。

中等专业学校试用教材

财经类专业通用

数　　学

第四册

财经类中专数学教材编写组

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

商务印书馆上海印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 12.5　字数 258,000

1988年10月第1版　1988年10月第1次印刷

印数 0001—51,630

ISBN 7-04-001636-2/O·177

定价 2.20 元

序　　言

本教材是根据1987年国家教育委员会审定的财经类专业通用的《中等专业学校数学教学大纲(试行草案)》编写的。

本教材共分四册：

第一册　集合、函数、三角；

第二册　*立体几何、解析几何、排列组合与二项式定理、数列；

第三册　微积分；

第四册　矩阵及其应用(*投入产出、*线性规划)、概率论与*数理统计初步.

本教材可供招收初中毕业生财经类各专业试用，第三、四册也可供招收高中毕业生的财经类各专业使用. 带*的内容可供选学.

本教材是由国家教育委员会组织的财经类中专数学教材编写组编写的. 编写组由南京铁路运输学校沈清任主编，上海银行学校姚叠叁、北京供销学校贝虹任协编. 其中第一、二两册初稿由贝虹编写，第三册初稿由姚叠叁编写，第四册初稿由沈清编写.

本教材由全国中专数学课程组组织审稿，参加第四册审稿会的有任必、吴伟贤、费本初、胡伯权、张又昌、林国宁、许金团、侯昭群. 其中线性规划部分由厦门大学林国宁副教授进一步作了审阅。

在编写过程中，曾得到有关单位的大力支持和协助，谨在此表示衷心的感谢。

由于编者的水平所限，加以编写时间仓促，错误及不当之处在所难免，恳切期望广大读者批评指正，以便今后进一步修订改进。

财经类中专数学教材编写组

一九八八年二月

目　录

第十七章　矩阵及其应用 ……………………………………1
§17-1　二阶、三阶行列式 ……………………………………1
§17-2　三阶行列式的性质 ……………………………………10
§17-3　高阶行列式展开举例 ……………………………………20
§17-4　克莱姆法则 ……………………………………24
§17-5　矩阵的概念和运算 ……………………………………31
§17-6　逆矩阵 ……………………………………52
§17-7　矩阵的初等变换 ……………………………………67
*§17-8　投入产出简介 ……………………………………77
*§17-9　线性规划问题的数学模型 ……………………………………93
*§17-10　线性规划问题的图解法 ……………………………………102
*§17-11　单纯形法 ……………………………………116
*§17-12　运输问题的表上作业法 ……………………………………134
第十八章　概率初步 ……………………………………154
§18-1　随机事件 ……………………………………154
§18-2　概率的概念 ……………………………………167
§18-3　概率的加法公式　逆事件的概率 ……………………………………182
§18-4　条件概率　乘法公式 ……………………………………190
§18-5　全概率公式 ……………………………………202
§18-6　伯努利试验 ……………………………………209
§18-7　随机变量 ……………………………………214

§ 18-8　离散型随机变量的概率分布 ……………………218
§ 18-9　连续型随机变量的概率分布 ……………………232
§ 18-10　随机变量的数字特征 ……………………………261
§ 18-11　概率在经济工作中的应用举例 …………………281
*第十九章　数理统计初步………………………………298
§ 19-1　随机样本 ……………………………………298
§ 19-2　参数估计 ……………………………………313
§ 19-3　参数的假设检验 ………………………………327
§ 19-4　一元线性回归分析 ……………………………348
附表　泊松分布表 ……………………………………364
正态分布表 ……………………………………………365
t 分布表 ……………………………………………367
χ^2 分布表 ………………………………………369
相关系数检验表 ………………………………………373
习题答案 ………………………………………………374
英汉词汇对照表 ………………………………………391

第十七章　矩阵及其应用

本章将介绍行列式和矩阵的基本知识以及投入产出和线性规划初步.

行列式和矩阵是研究线性方程组时建立起来的一种数学工具，是线性代数的主要内容之一，它可使线性方程组的研究得到简化.

投入产出是一种经济分析方法，它利用矩阵和统计资料对各种社会现象、经济活动进行综合平衡和多方面的分析.

线性规划是运筹学的一个重要分支，是研究有限资源的最优配置以取得最优经济效果的一门学科.

§17-1　二阶、三阶行列式

一　二阶行列式

行列式(determinant)是在解二元、三元线性方程组时引出的.

二元线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & (1) \\ a_2x+b_2y=c_2. & (2) \end{cases}$$

我们可以用加减消元法推导出解的公式.

$(1)\times b_2-(2)\times b_1$, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1;$$

$(2)\times a_1-(1)\times b_2$, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$$

当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，方程组解的公式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, & (3) \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. & (4) \end{cases}$$

为了便于记忆和研究，引进了一个新的符号．把四个数 a_1, b_1, a_2, b_2，记成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{17-1}$$

用它来表示 $a_1b_2-a_2b_1$，即

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1}$$

(17-1) 叫做**二阶行列式**，横排叫行，纵排叫列，a_1, b_1, a_2, b_2 叫做行列式的**元素**，$a_1b_2-a_2b_1$ 叫做二阶行列式的展开式．

二阶行列式的展开法如下：

$$\begin{vmatrix} a_1 & & b_1 \\ & & \\ a_2 & & b_2 \end{vmatrix}$$

实对角线（叫做主对角线）上两数之积取正号，虚对角线上两数之积取负号，然后相加就是行列式的展开式．

类似地

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1.$$

它们分别是公式(3)，(4)的分子. 于是公式(3)，(4)用行列式表示可写成

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0\right). \qquad (17\text{-}2)$$

为了方便起见，用 D, D_x, D_y 分别表示公式(17-2)中的分母和分子的各行列式.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix},\ D_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

于是,方程组(1)，(2)的解又可记作

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \end{cases} \quad (D\neq 0) \qquad (17\text{-}3)$$

可以看出，行列式 D 是由方程组(1)，(2)中未知数的系数按原来的顺序排成，叫做方程组的系数行列式；行列式 D_x 是由方程组(1)，(2)中右边的常数项 c_1, c_2 顺次代替行列式 D 中 x 的系数 a_1, a_2 而得到；行列式 D_y 是由 c_1, c_2 代替 D 中 y 的系数 b_1, b_2 而得到.

例 1 计算下列各行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\times 6 - 5\times(-8) = 52;$

(2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y-1=0, \\ x+2y+2=0. \end{cases}$$

解 方程组可变形为

$$\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x+2y=-2, \end{cases}$$

可得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+3=7,$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2-6=-4,$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-1=-5.$$

故所求的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}=-\dfrac{4}{7}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}=-\dfrac{5}{7}. \end{cases}$$

二 三阶行列式

现在来解三元线性方程组.

三元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, & (1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, & (2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. & (3) \end{cases}$$

和二元线性方程组类似，用加减消元法可求出解的公式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}, & (4)\\ y=\dfrac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2-a_2d_1c_3-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}, & (5)\\ z=\dfrac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}. & (6)\end{cases}$$

(4)，(5)，(6) 中分母不为零.

这种表达式比较繁杂，为了便于记忆和研究，仿照二阶行列式，用记号

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \qquad (17\text{-}4)$$

表示　$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$.

即

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} =a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.}$$

等式左边叫做**三阶行列式**，等式右边的代数式叫做这个三阶行列式的**展开式**，展开式共六项.

三阶行列式的展开有如下的对角线法则：

实线上三数之积取正号，虚线上三数之积取负号，然后相加就是行列式的展开式，这种展开法则叫做**对角线法则**.

公式(4)，(5)，(6)中的分子与分母利用行列式表示并引入记号 D, D_x, D_y, D_z，就可写成：

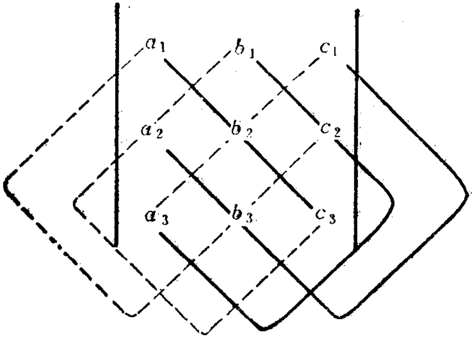

图 17-1

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\dfrac{D_y}{D}, \quad (D\neq 0). \quad \textbf{(17-5)} \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\dfrac{D_z}{D}, \end{cases}$$

其中行列式 D 是由方程组 (1), (2), (3) 中未知数的系数按原来的顺序排成，叫做方程组的系数行列式；行列式 D_x, D_y, D_z 分别是由方程组中右边的常数项 d_1, d_2, d_3 顺次代替 D 中 x, y, z 的系数而得到.

例 3 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

解
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\times1\times4+0\times5\times(-1)+(-2)\times3\times2-1\times5\times2-0\times3\times4-(-2)\times1\times(-1)$$
$$=4+0-12-10-0-2=-20.$$

例 4 展开下列行列式

$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-abc-abc-abc$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

例 5 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x-y+3z-1=0, \\ x+2y-z+2=0, \\ 3x+y+z-3=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x+y=3, \\ y-3z=1, \\ x+2z=-1. \end{cases}$

解 (1) 将方程组化为一般形式

$$\begin{cases}2x-y+3z=1,\\ x+2y-z=-2,\\ 3x+y+z=3.\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&2&-1\\3&1&1\end{vmatrix}=-5,\ D_x=\begin{vmatrix}1&-1&3\\-2&2&-1\\3&1&1\end{vmatrix}=-20,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-2&-1\\3&3&1\end{vmatrix}=25,\ D_z=\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&2&-2\\3&1&3\end{vmatrix}=20.$$

由(17-5)可得方程组的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-20}{-5}=4,\\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{25}{-5}=-5,\\ z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{20}{-5}=-4.\end{cases}$$

(2) 方程组可写成

$$\begin{cases}2x+y+0z=3,\\ 0x+y-3z=1,\\ x+0y+2z=-1.\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&-3\\1&0&2\end{vmatrix}=1,\ D_x=\begin{vmatrix}3&1&0\\1&1&-3\\-1&0&2\end{vmatrix}=7,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&3&0\\0&1&-3\\1&-1&2\end{vmatrix}=-11,\ D_z=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&0&-1\end{vmatrix}=-4.$$

故方程组的解为

$$\begin{cases} x=\dfrac{7}{1}=7, \\ y=\dfrac{-11}{1}=-11, \\ z=\dfrac{-4}{1}=-4. \end{cases}$$

习　题　17-1

1．求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} a+b & 1 \\ -b^2 & a-b \end{vmatrix}$.

2．用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ 2x-y=8; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x+2y+7=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2.4x+1.5y=5.4, \\ 3.2x-2.5y=1.8; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{5}y=6, \\ \dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{2}y=-4. \end{cases}$

3．求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 6 & 19 & -23 \\ 0 & 7 & 35 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} a & ka & x \\ b & kb & y \\ c & kc & z \end{vmatrix}$.

4．用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x+2y+z-14=0, \\ x+y+z-10=0, \\ 2x+3y-z-1=0; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 4x+3y+7z=36, \\ 2x-y-2z=10, \\ x+y+2z=10; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} ax+by=c, \\ by+cz=a, \\ ax+cz=b, \end{cases} \quad (abc\neq 0);$ (4) $\begin{cases} x+2y-3z=0, \\ 2x-y+4z=0, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

5. 用二阶和三阶行列式的展开式，证明下列等式:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 \\ a_2 & kb_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};$

(3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$

§17-2　三阶行列式的性质

为了叙述方便，我们用 $a_{ij}(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3)$ 表示行列式中第 i 行第 j 列的元素，于是，二阶、三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}.$$

下面的性质都可用对角线法则来验证.

性质 1　行列式所有的行与相应的列互换，行列式的值不变，即