



ZHUANGYUAN PEILIAN

九年义务教育四年制初中

根据最新版人教社教材编写

状元陪练

全国名校同步训练名题精编

初三代数(上)

战利超 主编

- 点击学习要点
- 荟萃经典习题
- 拓宽知识视野
- 强化素质能力



黑龙江少年儿童出版社

九年义务教育四年制初中

状元陪练

全国名校同步训练名题精编

初三代数(上)

战利超 主 编

孙润珠 副主编

战利超 孙润珠 姜海燕

栾继明 李 游 李叶合 编写

刘旭飞



黑龙江少年儿童出版社

2006年·哈尔滨

丛书策划:于晓北 王朝晖 赵 力

刁小菊 张立新

责任编辑:徐 高 顾吉霞

《状元陪练》丛书编委会

主 编:战利超

副 主 编:孙润珠

编 委:战利超 孙润珠 姜海燕

栾继明 李 游 李叶合

刘旭飞

九年义务教育四年制初中

状 元 陪 练

初三代数(上)

战利超 主 编

孙润珠 副主编

战利超 孙润珠 姜海燕

栾继明 李 游 李叶合 编写

刘旭飞

黑龙江少年儿童出版社出版

黑龙江省新华书店发行

哈尔滨新路印刷厂印装

开本:787毫米×1092毫米 1/16 印张:30 字数:600 000

2004年8月第2版 2006年8月第4次印刷

ISBN 7-5319-2285-1 定价:35.40元(共6册)

G·1626

出版说明

为使广大学生走出茫茫题海,获得名列前茅的好成绩,我们根据大多数状元学生的成功经验之一——精选名题练习,特邀请富有经验的一线著名教师,编写了这套名为《状元陪练——全国名校同步训练名题精编》的高质量教学辅导用书。该丛书完全符合教育部关于课程改革的最新精神及素质教育的要求,与2006年新版教材同步,展示了全国多所名校著名教师教学新成果。

栏目介绍:

点击重点难点——根据教学要求,由名师就教材各个章节知识点进行提示性讲解。

攻难解疑示例——结合例题,帮助学生掌握突破难点的思路和科学的解题方法。

课课达标◇状元陪练——博采众长,精选名题,与现行教材进行同步训练。

强化素质◇期中测试 提高素质◇期末评估——紧密贴近中考的要求,采取梯级拔高的形式,强化学生归纳、概括、运用知识的能力,增加跨学科知识的交叉渗透,提高学生创新能力。

衷心期望《状元陪练》使更多的学生成为“状元”,也恳请广大读者在使用本丛书过程中,及时向我们提出宝贵意见和建议,以便修订再版时及时予以改正和提高。

《状元陪练》丛书编委会

2006年8月

😊 把优异的成绩告诉父母

😊 把发现的错误和建议寄给我们

《状元陪练》丛书读者意见反馈表

科别、册次:		
页码	正、倒行	错误及疑问
建 议		
通信地址、姓名		

黑龙江少年儿童出版社:哈尔滨市南岗区宣庆小区8号楼 邮编:150008

目

录

第十一章 二次根式	(1)	强化素质 二次根式乘法、除法综合练习	(49)
11.1 二次根式	(1)	强化素质 期中测试一	(54)
11.2 二次根式的乘法	(8)	强化素质 期中测试二	(58)
11.3 二次根式的除法	(15)	提高素质 期末评估一	(61)
11.4 最简二次根式	(22)	提高素质 期末评估二	(64)
11.5 二次根式的加减法	(28)	参考答案	(67)
11.6 二次根式的混合运算	(35)		
11.7 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简	(41)		

第十一章 二次根式

11.1 二次根式

点击重点难点

重点

了解二次根式的意义和性质及 $\sqrt{a}$ 的性质.

难点

理解并熟练运用二次根式的基本性质
 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$.

攻难解疑示例

例1 $\sqrt{3}$ 是()

- A. 有理数 B. 1.732
C. 根式 D. 无理式

点拨思路

$\sqrt{3}$ 是表示3的算术平方根,它不是有理数,1.732只是它的近似值,不是它的精确值,因此排除了A选项与B选项;又因为根号下含有字母的式子叫做无理式,因此 $\sqrt{3}$ 不是无理式,从而排除了D; $\sqrt{3}$ 中被开方数 $3 > 0$,符合二次根式的意义,因此本题选C.

答案

选C

例2 下列各式中哪些是二次根式? 哪些不是二次根式? 为什么?

- (1) $\sqrt{2}$; (2) $\sqrt{-7}$; (3) $\sqrt{a^2}$; (4) $\sqrt[3]{5}$;
(5) $\sqrt{6x}$; (6) $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

点拨思路

判断一个式子是否是二次根式一定要注意同时满足以下两点:(1)根号的根指数必须是2;(2)被开方数必须大于0. 注意被开方数可以是数,也可以是单项式、多项式、分式等代数式,但必须都大于0.

答案

- (1) $\because 2 > 0, \therefore \sqrt{2}$ 是二次根式;
(2) $\because -7 < 0, \therefore \sqrt{-7}$ 不是二次根式;
(3) $\because a^2 \geq 0, \therefore \sqrt{a^2}$ 是二次根式;
(4) $\because \sqrt[3]{5}$ 根指数是3,所以 $\sqrt[3]{5}$ 不是二次根式;
(5)当 $x \geq 0$ 时, $6x \geq 0, \sqrt{6x}$ 是二次根式;
当 $x < 0$ 时, $6x < 0, \sqrt{6x}$ 不是二次根式;
(6) $\because x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2, (x - 1)^2 \geq 0,$

$\therefore \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ 是二次根式.

例 3 计算:

$$(1)(\sqrt{15})^2; (2)\sqrt{(-\frac{1}{3})^2};$$

$$(3)(4\sqrt{a})^2.$$

点拨思路

理解运用好 $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ 是解决本题的关键所在, 同时应当注意(2)题中的 $(-\frac{1}{3})^2$ 要先化成 $\frac{1}{9}$, 再求其算术平方根, 若认为 $\sqrt{(-\frac{1}{3})^2} = -\frac{1}{3}$ 那就错了.

答案

$$(1)(\sqrt{15})^2 = 15;$$

$$(2)\sqrt{(-\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3};$$

$$(3)(4\sqrt{a})^2 = 4^2 \cdot (\sqrt{a})^2 = 16a.$$

例 4 x 取什么值时, 下列各式有意义?

$$(1)\sqrt{3-4x}; (2)\sqrt{x^2+1};$$

$$(3)\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}; (4)\frac{1}{\sqrt{x+2}}.$$

点拨思路

根据二次根式的定义, 被开方数一定是非负数, 所以这类问题一般列出一元一次不等式再求其解集. 若分母中也含有 x , 则还需要考虑到 x 的取值不能使分母为零.

答案

$$(1) \text{ 由 } 3-4x \geq 0, \text{ 得 } x \leq \frac{3}{4};$$

(2) 无论 x 取何值都有 $x^2+1 > 0$;

$\therefore$ 当 x 取任意实数时, $\sqrt{x^2+1}$ 都有意义;

(3) 由 $x+1 \geq 0, 3-x \geq 0$ 得 $-1 \leq x \leq 3$

$\therefore$ 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, $\sqrt{x+1} - \sqrt{3-x}$ 有意义;

(4) 由 $x+2 > 0$ 得 $x > -2$

$\therefore$ 当 $x > -2$ 时, $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ 有意义.

例 5 在实数范围内分解因式:

$$(1)4a^2-2; (2)16x^4-25.$$

点拨思路

本题是“ $a = (\sqrt{a})^2 (a \geq 0)$ ”的应用, 多项式 $4a^2-2$ 在实数范围内不能分解, 但把 2 化成 $(\sqrt{2})^2$ 后就可以利用平方差公式继续分解了.

答案

$$(1)4a^2-2 = (2a)^2 - (\sqrt{2})^2 = (2a+\sqrt{2})(2a-\sqrt{2});$$

$$(2)16x^4-25 = (4x^2)^2 - 5^2 = (4x^2+5)(4x^2-5)$$

$$= (4x^2+5)(2x+\sqrt{5})(2x-\sqrt{5}).$$

例 6 已知 $\sqrt{x-2y+5} + \sqrt{2x+y+1} = 0$, 求 $|x+y|$.

点拨思路

这是考查二次根式非负性的应用, 即 $\sqrt{a} \geq 0$, 由 $\sqrt{x-2y+5} \geq 0, \sqrt{2x+y+1} \geq 0$ 且这两个非负数和等于 0 可得每个非负数

都等于0,从而可以得到 $x-2y+5=0$ 和 $2x+y+1=0$. 由此可以求出 x, y 的值,再求 $|x+y|$ 的值.

答案

解: $\because \sqrt{x-2y+5} + \sqrt{2x+y+1} = 0$, 又
 $\therefore \sqrt{x-2y+5} \geq 0, \sqrt{2x+y+1} \geq 0$,

$$\therefore \begin{cases} x-2y+5=0 \\ 2x+y+1=0 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=-\frac{7}{5} \\ y=\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$\therefore |x+y| = \left| -\frac{7}{5} + \frac{9}{5} \right| = \frac{2}{5}$$

课课达标◇状元陪练

一、选择题

1. 下列各式中,不是二次根式的是()

- A. $\sqrt{b^2+1}$ B. $\sqrt{a}$
 C. $\sqrt{0}$ D. $\sqrt{(a-b)^2}$

2. 下列各式中,一定是二次根式的是()

- A. $\sqrt{\frac{b}{a}}$ B. $\sqrt{a^2+1}$
 C. $\sqrt[3]{2m}$ D. $-\sqrt{-17}$

3. 若 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 是二次根式,则应满足的条件是()

- A. a, b 为非负数 B. $a \geq 0$ 且 $b > 0$
 C. $\frac{a}{b} > 0$ D. $\frac{a}{b} \geq 0$

4. 当 x 取什么值时,式子 $\sqrt{3x+5}$ 在实数范围内有意义()

- A. $x > \frac{5}{3}$ B. $x \geq \frac{5}{3}$
 C. $x > -\frac{5}{3}$ D. $x \geq -\frac{5}{3}$

5. 若 $\sqrt{(x-9)^2} = 9-x$, 则()

- A. $x > 9$ B. $x \leq 9$ C. $x = 9$ D. 不确定

6. 下列计算正确的是()

- A. $(-\sqrt{7})^2 = -7$
 B. $\sqrt{(-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}$
 C. $\sqrt{(-\frac{1}{3})^2} = -\frac{1}{3}$
 D. $-\sqrt{(-\frac{1}{7})^2} = \frac{1}{7}$

7. 把5写成一个正数的平方形式是()

- A. 5^2 B. $(\pm 5)^2$
 C. $(\sqrt{5})^2$ D. $(\pm \sqrt{5})^2$

8. 下列各式: $\sqrt{3}, \sqrt{6x}, \sqrt{x^2-1}, \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{a^2+5}, \sqrt{-6xy}$ 中,二次根式的个数是()

- A. 1个 B. 2个
 C. 3个 D. 4个

9. 如果式子 $\sqrt{-(x-2)^2}$ 有意义,则 x 的取值范围是()

- A. 2
 B. -2
 C. 无论 x 取何值都无意义
 D. 无论 x 取何值都有意义

10. 若二次根式 $\sqrt{10-x}$ 有意义,则它的最大值是()

- A. 10 B. $\sqrt{10}$

C.1 D.0

11. x 为任意数时,下列式子中有意义的是()

- A. $\sqrt{x^2-1}$ B. $\sqrt{\frac{1}{x^2}}$
C. $\sqrt{(x^2-1)^2}$ D. $\sqrt{-x^2+1}$

12. 若 $\sqrt{(y-x)^2} = x-y$, 则()

- A. $x \geq y$ B. $x = y$
C. $x > y$ D. $x \leq y$

13. 若 $x < -4$, 则 $\sqrt{|2-\sqrt{(x+2)^2}|} =$ ()

- A. $4+x$ B. $-x$
C. $-4-x$ D. x

14. 如果 $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ 是二次根式, 那么 x 的取值范围是()

- A. $x \neq 3$ B. $x > 3$
C. $x < 3$ D. $x \leq 3$

15. 如果 $\sqrt{\frac{1}{2-x}}$ 是二次根式, 则 x 的取值范围是()

- A. $x < 2$ B. $x > 2$
C. $x \leq 2$ D. $x \neq 2$

16. 若 $\sqrt{|x|-2}$ 有意义, 则 x 的取值范围是()

- A. $x \leq 2$
B. $x \geq 2$
C. $x \geq 2$, 或 $x \leq -2$
D. x 为全体实数

17. 在实数范围内分解下列因式, 其中正确的个数有()

- (1) $6a^2-2=2(\sqrt{3}a+1)(\sqrt{3}a-1)$
(2) $x^4-25=(x^2+5)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$
(3) $4x^2-7=(2x+\sqrt{7})(2x-\sqrt{7})$
(4) $x^2-2=(x+2)(x-2)$

- A. 1 个 B. 2 个
C. 3 个 D. 4 个

18. 下列化简结果错误的是()

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}\sqrt{2}$
B. $3\sqrt{\frac{a}{3}} = \sqrt{3a}$
C. $3\sqrt{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$
D. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$

19. 当 a, b 满足什么条件时, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 是二次根式()

- A. a, b 均为非负数
B. $\frac{a}{b} > 0$
C. $a > b, b \geq 0$
D. $\frac{a}{b} \geq 0$

20. 在 $(\sqrt{x})^2$ 中, x 的取值范围是()

- A. 实数 B. 有理数
C. 正实数 D. 非负实数

21. 下列各式中一定是二次根式的是()

- A. $\sqrt{-3^2}$ B. $\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$

C. $\sqrt{-2}$ D. $\sqrt{-x}$

22. $-x^4 + 4$ 在实数范围内分解因式得

()

A. $-(x^2 + 2)(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)$

B. $-(x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

C. $(x^2 - 2)(x^2 + 2)$

D. $(2 + x^2)(2 - x^2)$

23. 已知 $|2x - 3| + |2x - 3y| = 0$, 则化

简 $\sqrt{xy} \div (x\sqrt{3x} \cdot b\sqrt{b}) = ()$

A. $\frac{2\sqrt{6}}{9}$ B. $2\sqrt{6}$

C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

24. 当 $-3 < x \leq 2$ 时, $|x - 2| +$

$\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}$ 可以化简为

()

A. $4 - 3x$ B. $10 - x$

C. $x + 6$ D. $3x - 4$

25. a, b 是实数, $a = \sqrt{b-4} + \sqrt{4-b} +$

3, 则 a^b 等于()

A. 64 B. $\frac{1}{64}$

C. 81 D. 0

二、判断题

1. $\sqrt{a}$ 是二次根式()

2. 若 $\sqrt{5-a}$ 是二次根式则有 $a \leq 5$
()

3. 式子 $\sqrt{x^2 + 3}$ 一定是二次根式()

4. 式子 $\sqrt{|x-5|}$ 在 $x \geq 5$ 的条件下一定是二次根式()

5. 式子 $\sqrt{\frac{2}{a-5}}$ 是二次根式的条件是 $a \geq 5$ ()

6. 判断下列各等式是否成立.

(1) $(\sqrt{a})^2 = a (a \geq 0)$ ()

(2) $(2\sqrt{3})^2 = 6$ ()

(3) $\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16}$ ()

(4) $\sqrt{x-y} = \sqrt{y-x}$ ()

(5) $x^2 - 3 = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$ ()

三、填空题

1. 当 x _____ 时, $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$.

当 a _____ 时, $\sqrt{-(a-1)^2}$ 有意义.

2. 在实数范围内分解因式 $2x^a - 4 =$ _____; $4a^a - 3 =$ _____; $2a^a - 5b^2 =$ _____.

3. 计算下列各式:

(1) $(\sqrt{0.2})^2 =$ _____.

(2) $(2\sqrt{3})^2 =$ _____.

(3) $(-\frac{1}{2}\sqrt{7})^2 =$ _____.

(4) $(-\sqrt{2 \times 7})^2 =$ _____.

(5) $(\sqrt{\sqrt{4}})^2 =$ _____.

(6) $(\sqrt{\sqrt{2}-1})^2$ _____.

4. x _____ 时, $\sqrt{x-5}$ 是二次根式; x _____ 时, $\sqrt{1-x}$ 不是二次根式.

5. a _____ 时, $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$; a _____ 时, $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$.

6. $\sqrt{(-2004)^2} =$ _____.

7. 当 x 为_____时, $\frac{1}{5-\sqrt{x}}$ 有意义.

8. 当 $0 < x < 2$ 时, $\sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2} =$ _____.

9. 当 x _____时, $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-2} = 0$.

10. 分解因式: $x^4 - 12x^2 + 36 =$ _____.

11. $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ 的相反数是_____, 倒数是_____, 绝对值是_____.

12. $\sqrt{x^2-9} = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3}$ 成立的条件是_____.

13. $\sqrt{-a^3}$ 有意义, 则 a 的取值范围是_____.

14. $\sqrt{4-|x|}$ 在实数范围内有意义, 则 x 的取值范围是_____.

15. 把下列非负数写成一个数的平方形式:

(1) $3 =$ _____;

(2) $\frac{1}{2} =$ _____;

(3) $2\pi =$ _____;

(4) $8 =$ _____.

16. 若 $\sqrt[4m-2]{x^2+1}$ 是二次根式, 则 $m =$ _____.

17. 若 $1 \leq a \leq 3$, 则 $|a-1| + \sqrt{a^2-6a+9}$ 的结果为_____.

18. 若 $0 < y < x < 2y$, 则 $\sqrt{x^2-2xy+y^2} - \sqrt{x^2-4xy+4y^2} =$ _____.

19. 设 $\sqrt{17}$ 的整数部分为 x , 小数部分为

y , 则 $x^2 + \frac{1}{y} =$ _____.

20. 要使 $\sqrt{-(5x^2-20)^2}$ 表示有理数, 则 x 的取值范围是_____.

21. 使 $\frac{\sqrt{3m+1}}{1-|m|}$ 有意义的 m 的取值范围是_____.

22. 当 x _____时, $\sqrt{(x-1)^2} = 1-x$; 当 a _____时, $\sqrt{-(a-1)^2}$ 有意义.

23. 若 $\sqrt{\frac{2}{1-x}}$ 是二次根式, 则 x _____; 当 x _____时, $(\sqrt{x-4})^2 = x-4$.

24. 已知 $\sqrt{-x^3}$ 有意义, 则 $\sqrt{(-x)^2} =$ _____.

25. 已知 $(a-b+1)^2 + \sqrt{2a-b+4} = 0$, 则 $a \cdot b =$ _____.

四、解答题

1. 在实数范围内分解下列因式

(1) $2a^2 - 13$

(2) $a^2 - 7a^2 + 6$

2. x 为何值时, 下列二次根式有意义?

$$(1) \sqrt{x} + \sqrt{-x}$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

3. 求下列各式的值

$$(1) \sqrt{15xyz}, \text{ 其中 } x=1.2, y=0.08, z=$$

4.

$$(2) \sqrt{m^2+4pn}, \text{ 其中 } m=\sqrt{29}, n=5\frac{1}{4},$$

$$p=\frac{1}{3}.$$

$$(3) \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ 其中 } a=-3, b=$$

$$\frac{7}{2}, c=-\frac{1}{2}.$$

4. 已知 $\sqrt{x^2-4} + \sqrt{3x+y} = 0$, 求 $x+y$ 的值.

5. 若 x, y 为实数, $y < \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}$, 化简 $\frac{|1-y|}{y-1}$.

6. 若 x, y 为实数, $y < \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}$, 化简 $\frac{|1-y|}{y-1}$.

7. 当 x 取什么值时, $\sqrt{9x+1} + 1$ 取值最小, 并求出这个最小值.

11.2 二次根式的乘法

点击重点难点

重点

本节的重点是积的算术平方根,二次根式的乘法运算及化简.

难点

正确理解积的算术平方根性质中的条件(各因式必须是非负的)和正确运用二次根式的乘法法则进行运算.

攻难解疑示例

例2 计算:

$$(1) \sqrt{\frac{64}{9} \times \frac{144}{169}};$$

$$(2) \sqrt{(-5)^2 \times (-3)^2};$$

$$(3) \sqrt{36^2 + 48^2};$$

$$(4) \sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)}.$$

点拨思路

本题是利用积的算术平方根的性质进行计算,同时还要注意先把负因数转化成正因数进行计算,如第(2)小题与第(4)小题.第(3)小题应注意 $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$.

答案

$$(1) \sqrt{\frac{64}{9} \times \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{64}{9}} \cdot \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{12}{13} =$$

$$\frac{32}{13};$$

$$(2) \sqrt{(-5)^2 \times (-3)^2} = \sqrt{5^2 \times 3^2} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3^2} = 5 \times 3 = 15;$$

$$(3) \sqrt{36^2 + 48^2} = \sqrt{12^2(3^2 + 4^2)} = \sqrt{12^2 \times 5^2} = \sqrt{12^2} \times \sqrt{5^2} = 12 \times 5 = 60;$$

$$(4) \sqrt{(-4) \times \frac{25}{9} \times (-169)} = \sqrt{4 \times \frac{25}{9} \times 169} = \sqrt{4} \times \sqrt{\frac{25}{9}} \times \sqrt{169} = 2 \times \frac{5}{3} \times 13 = \frac{130}{3}.$$

例2 判断下列各式是否成立:

$$(1) \sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9};$$

$$(2) \sqrt{16-9} = \sqrt{16} - \sqrt{9};$$

$$(3) \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9};$$

$$(4) \sqrt{(-16) \times (-9)} = \sqrt{(-16)} \times \sqrt{(-9)}.$$

点拨思路

本题需要注意以下几点:① $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$; ② $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$; ③ $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 同时 $\sqrt{a} \geq 0$, 且 $a \geq 0$.

答案

$$(1) \sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9} \text{ 不成立;}$$

$$(2) \sqrt{16-9} = \sqrt{16} - \sqrt{9} \text{ 不成立;}$$

$$(3) \sqrt{16 \times 9} = \sqrt{16} \times \sqrt{9} \text{ 成立;}$$

(4) $\sqrt{(-16) \times (-9)} = \sqrt{(-16)} \times \sqrt{(-9)}$ 不成立.

即:(1)(2)(4)不成立,(3)成立.

例 3 化简下列二次根式:

(1) $\sqrt{12a^3b^3c^3}$;

(2) $\sqrt{27a^3+9a^2}$;

(3) $\sqrt{x^4y^2+x^2y^4}$;

(4) $\sqrt{a^3+6a^2b+9ab^2}$.

点拨思路

二次根式的被开方数如果是多项式要先分解因式,能开得尽方的因式同样要开出来.如果开出来的因式是多项式,要加上括号,并且要移到根号外面.

答案

(1) $\sqrt{12a^3b^3c^3} = \sqrt{4a^2b^2c^2 \cdot 3abc} = \sqrt{4} \cdot$

$\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{c^2} \cdot \sqrt{3abc} = 2abc \cdot \sqrt{3abc}$;

(2) $\sqrt{27a^3+9a^2} = \sqrt{9a^2(3a+1)} = \sqrt{9} \cdot$

$\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{3a+1} = 3a \cdot \sqrt{3a+1}$;

(3) $\sqrt{x^4y^2+x^2y^4} = \sqrt{x^2y^2(x^2+y^2)} =$

$\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = xy \sqrt{x^2+y^2}$;

(4) $\sqrt{a^3+6a^2b+9ab^2} =$

$\sqrt{a(a^2+6ab+9b^2)} = \sqrt{a(a+3b)^2} = (a+3b)\sqrt{a}$.

例 5 把 $x\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 根号外面的因式移入根号内,并化简.

点拨思路

该题是逆用性质公式.但要牢记当根号外面的因式是负数时,要把“-”号留在外面,只能把正因式移到根号内;有时不给条件,但可以由被开方数的取值范围来确定符号.如 $\sqrt{-\frac{1}{x}}$ 被开方数不能为负,所以 $x < 0$,外面的因式是负数,所以负号要留在根式外.

答案

解: $x\sqrt{-\frac{1}{x}} = -\sqrt{-x}$.

例 5 比较下列各组中两个二次根式的大小:

(1) $2\sqrt{7}$ 和 $4\sqrt{2}$;

(2) $3\sqrt{5}$ 和 $\frac{5}{2}\sqrt{6}$;

(3) $-5\sqrt{6}$ 和 $-6\sqrt{5}$;

(4) $-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{7}}$.

点拨思路

比较两个二次根式的大小,本题用了两种方法:一是平方法.一般地,若 $a > 0, b > 0$,且 $a^2 > b^2$,那么 $a > b$,第(1)、(2)题用此法;二是把根号外面的数移进根号内.一般地,若 $a > 0, b > 0$,且 $a > b$,那么 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$,
 $-\sqrt{a} < -\sqrt{b}$,第(3)、(4)题用此法.

答案

(1) $\because (2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28,$

$$(4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32,$$

$$\therefore 2\sqrt{7} < 4\sqrt{2};$$

$$(2) \because (3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45,$$

$$(\frac{5}{2}\sqrt{6})^2 = \frac{25}{4} \times 6 = 37\frac{1}{2},$$

$$\therefore 3\sqrt{5} > \frac{5}{2}\sqrt{6};$$

$$(3) \because -5\sqrt{6} = -\sqrt{5^2 \times 6} = -\sqrt{150},$$

$$-6\sqrt{5} = -\sqrt{6^2 \times 5} = -\sqrt{180},$$

$$\therefore -5\sqrt{6} > -6\sqrt{5};$$

$$(4) \because -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = -\sqrt{(\frac{1}{3})^2 \times \frac{1}{3}} = -\sqrt{\frac{1}{27}},$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{7}} = -\sqrt{(\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{7}} = -\sqrt{\frac{1}{28}},$$

$$\therefore -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} < -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{7}}.$$

例 6 计算:

$$-6\sqrt{45} \times (-4\sqrt{48})$$

点拨思路

几个二次根式相乘,根指数不变,被开方数和系数分别相乘,同时要注意积的符号,被开方数相乘时,不要计算乘积的结果,而应将被开方数进一步分解因数,以便将能开得尽方的因数移到根号外.

答案

$$\begin{aligned} \text{解: } & -6\sqrt{45} \times (-4\sqrt{48}) \\ & = (-6) \times (-4) \times \sqrt{45} \cdot \sqrt{48} \\ & = 24\sqrt{5 \times 9 \times 3 \times 16} \end{aligned}$$

$$= 24 \times 3 \times 4\sqrt{15}$$

$$= 288\sqrt{15}$$

注意:二次根式运算结果,应该尽量化简能开得尽方时,要利用积的算术平方根的性质将这些因式(因数)开出来.

课课达标◇状元陪练

一、判断题

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} (a \geq 0, b \geq 0)$ ()

2. $\sqrt{(-2) \times (-3)} = \sqrt{-2} \times \sqrt{-3}$ ()

3. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b$ ()

4. $\sqrt{21^2 - 9^2} = 21 - 9$ ()

5. $\sqrt{(m-1)^2} = m-1$ ()

6. $(\sqrt{m-1})^2 = m-1 (m \geq 1)$ ()

7. $\sqrt{x^3} \cdot \sqrt{x^5} = x^4$ ()

8. $-3\sqrt{x} = \sqrt{(-3)^2}x$ ()

9. $\sqrt{a} (\sqrt{a})^5 (\sqrt{a})^9 = (\sqrt{a})^{14} = a^7$ ()

10. $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ ()

二、选择题

1. 若 $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x = 1$

B. $x > 1$

C. $x \geq 1$

D. x 为任意实数

2. 下列各式计算正确的是 ()

A. $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{5}$ D. $2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} = 18$

3. 化简二次根式 $\sqrt{(-2)^2 \times 6}$ 得()

A. $-2\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$

C. 6 D. 12

4. 下列各式不成立的是()

A. $\sqrt{12a^2b^4} = 2ab^2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{(x+1)} \cdot \sqrt{(x-1)} (x \geq 1)$

C. $\sqrt{(x-y)^2} = x-y (x \geq y)$

D. $\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \sqrt{xy} = -x$

5. 化简 $\sqrt{16 \times 49 \times 121}$ 得()

A. 22 B. ± 22

C. ± 308 D. 308

6. 当 $x < 0, y < 0$ 时, 下列等式成立的是()

A. $\sqrt{x^2y} = -x\sqrt{y}$

B. $\sqrt{xy^2} = y\sqrt{x}$

C. $\sqrt{9x^3y} = -3x\sqrt{xy}$

D. $\sqrt{9x^4y^2} = 3x^2y$

7. 下列计算正确的是()

A. $a\sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{a}$

B. $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

C. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b$

D. $\sqrt{\frac{3}{4}a} = 2\sqrt{3}a$

8. 化简二次根式 $\sqrt{-16a^3}$ 的结果是()

A. $4a\sqrt{-a}$ B. $-4a\sqrt{a}$

C. $4a\sqrt{a}$ D. $-4a\sqrt{-a}$

9. 如果 $\sqrt{a^3+a^2} = -a\sqrt{a+1}$, 那么实数 a 的取值范围是()

A. $a < -1$ B. $a > 1$

C. $0 < a \leq 1$ D. $-1 \leq a \leq 0$

10. 将 $ab\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 中, a, b 移入根号内, 则原式等于()

A. $\sqrt{a^2b+ab^2}$ B. $\sqrt{a+b}$

C. $\sqrt{\frac{a+b}{a}}$ D. $\sqrt{a^2+b^2}$

11. 若把代数式 $(x-1)\sqrt{-\frac{1}{x-1}}$ 根号外的因式移到根号内, 则原式等于()

A. $\sqrt{1-x}$ B. $\sqrt{x-1}$

C. $-\sqrt{x-1}$ D. $-\sqrt{1-x}$

12. 等式 $\sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ 成立的条件是()

A. $\frac{x+1}{x} \geq 0$ B. $x \neq 0$

C. $x > 0$ D. $x \geq -2$

13. 若 a, b 都是实数, 则下列等式一定成立的是()

A. $\sqrt{(a+b)^2} = a+b$

B. $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a+b$

C. $(\sqrt{a+b})^2 = a+b$

D. $\sqrt{(a^2+b^2)^2} = a^2+b^2$

14. $2\sqrt{x^2y} \cdot \sqrt{\frac{y}{x}} = ()$

A. $2xy\sqrt{x}$ B. $2y\sqrt{x}$

C. $2x\sqrt{y}$

D. $2xy$

15. 把 $-2\sqrt{4\frac{1}{2}}$ 根号外面的因式移到根号内, 结果是()

A. $-\sqrt{18}$

B. $\sqrt{18}$

C. $-\sqrt{\frac{5}{2}}$

D. 以上答案都不对

16. 计算 $\sqrt{3^4 \times 7}$ 得()

A. $6\sqrt{7}$

B. $9\sqrt{7}$

C. $\pm 9\sqrt{7}$

D. $\pm 6\sqrt{7}$

17. 计算 $\sqrt{(-7)^2 - 16} \times 2$ 得()

A. $7 - 4\sqrt{2}$

B. 17

C. $\sqrt{17}$

D. $\pm\sqrt{17}$

18. 化简 $\sqrt{800}$ 的结果是()

A. 40

B. 20

C. $200\sqrt{2}$

D. $20\sqrt{2}$

19. 计算 $\sqrt{6^2 + 8^2}$ 的正确答案是()

A. 10

B. $\sqrt{10}$

C. 14

D. $\sqrt{14}$

20. 求 $\sqrt{5^2 - 4^2}$ 的算术平方根是()

A. 9

B. 3

C. $\sqrt{3}$

D. $\pm\sqrt{3}$

三、填空题

1. 积的算术平方根等于积中_____的积, 用公式表达是_____.

2. 若 $(\sqrt{a})^2 = a$ 、 $\sqrt{a^2} = a$, 则 a _____.

3. 若 $\sqrt{a^2b} = -a\sqrt{b}$, 则 a _____, b _____.

4. 若 $\sqrt{a^3b} = a\sqrt{ab}$, 则 a _____, b _____.

5. 把 $a\sqrt{ab}$ ($b > 0$) 根号外的因式移入根号内得_____.

6. 当 $a > 0$, x _____ 时, 二次根式 $\sqrt{-ax^3} = -x\sqrt{-ax}$ 成立.

7. 计算: $\sqrt{36 \times 25} =$ _____; $\sqrt{24} \times \sqrt{54} =$ _____; $\sqrt{29^2 - 21^2} =$ _____.

8. 计算: $\frac{1}{6}\sqrt{xy} \cdot (-3\sqrt{\frac{2}{x}}) =$ _____.

9. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2 =$ _____.

10. 计算: $(\sqrt{17} + 4)^{2002} \cdot (\sqrt{17} - 4)^{2001} =$ _____.

11. 比较大小: $3\sqrt{5}$ _____ $\frac{5}{2}\sqrt{6}$.

12. 长方形的长 $a = 3\sqrt{50}$, 宽 $b = 2\sqrt{32}$, 则长方形的面积 $S =$ _____.

13. 已知直角三角形的两直角边 $a = 0.8$, $b = 1.5$, 则斜边 $c =$ _____.

14. $\sqrt{48x^2y^2} =$ _____, $\sqrt{a^2} - \sqrt[3]{a^3} =$ _____, $\sqrt{\frac{mn}{(m+n)^2}} =$ _____.

15. 若 $x = \sqrt{3} + 1$, 则 $\frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + 2 =$ _____.

四、简答题

1. 计算

(1) $\sqrt{1.44 \times 0.81}$