# 大型工程结构模态参数识别技术

李惠彬　编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 大型工程结构模态参数识别技术

李惠彬 编著

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

本书介绍了国内外最新的大型工程结构模态参数识别技术，系统地论述了ERA特征系统算法及其改进的模态识别技术、频域法模态参数识别技术、时间序列ARMA模型模态参数识别技术和基于模态参数的结构损伤识别技术等的基本原理与技术，并通过对若干工程振动问题的分析，说明模态参数识别技术在工程中的应用。本书取材广泛、内容新颖，既阐明基本概念，又注重理论在工程中的应用。

本书可供土木水利、机械、车辆交通、能源、航空航天、力学等工程领域的科技人员参考，也可作为有关专业的研究生、本科生教材。

**版权专有　侵权必究**

**图书在版编目（CIP）数据**

大型工程结构模态参数识别技术/李惠彬编著. —北京：北京理工大学出版社，2007.7

ISBN 978-7-5640-1277-9

Ⅰ. 大…　Ⅱ. 李…　Ⅲ. 工程结构-模态-参数-识别　Ⅳ. TU3

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第080608号

出版发行／北京理工大学出版社
社　　址／北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址／http：// www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／北京地质印刷厂
开　　本／787毫米×960毫米　1/16
印　　张／8.75
字　　数／174千字
版　　次／2007年7月第1版　　2007年7月第1次印刷
印　　数／1~2000册　　　　责任校对／张　宏
定　　价／29.00元　　　　责任印制／吴皓云

图书出现印装质量问题，本社负责调换

# 前　　言

大型工程结构的模态参数识别技术是当今国内外学术界与工程界的研究热点和难点之一。大型工程结构（包括大型运载工具、大跨度桥梁、高耸建筑、海上石油平台、大型水坝和大型武器发射平台等）的模态参数识别只能通过测量系统输出（或响应）来建立系统的数学模型，从而确定系统的固有频率、阻尼比和振型模态参数。本书介绍了国内外最新的大型工程结构模态参数识别技术，系统地论述了包括 ERA 特征系统算法及其改进的模态识别技术、频域法模态参数识别技术、时间序列 ARMA 模型模态参数识别技术和基于模态参数的结构损伤识别技术等内容的基本原理与技术，并通过对若干工程振动问题的分析，说明模态参数识别技术在工程中的应用。

本书是作者在清华大学土木工程系博士后出站报告《大跨桥模态参数识别及损伤识别的研究》的基础上拓展完成的，融合了作者参与国家攀登项目、国家博士后基金项目、清华大学基础研究基金项目及与交通部门科研合作项目的科研成果，并注意吸收国内外大型工程结构模态参数识别技术研究的新成果的基础上编写完成的。

本书共分五章。

第一章绪论介绍了大型工程结构模态参数识别的基本内容、基本方法及模态参数在大型工程结构损伤诊断中的应用。

第二章阐述了 ERA 特征系统算法及其改进的识别技术，包括脉动试验、信号预处理、随机减量技术、ERA 特征系统算法识别技术、ERA 特征系统改进算法识别技术及误差分析等。

第三章介绍了频域法模态参数识别技术，包括用无输入的脉动响应信号识别模态参数的三个基本假设、频域法模态参数识别原理、模态参数识别技术及其误差分析等。

第四章介绍了时间序列 ARMA 模型模态参数识别的理论和方法，包括 ARMA 时序模型的建立、振动微分方程与时间序列 ARMA 模型的关系、频域法模态参数识别原理，研究了某大桥桥塔的模态参数识别，并用自相关函数对模态参数识别结果误差的影响进行了分析。

第五章介绍了基于模态参数的结构损伤识别技术、包括基于模态参数的直接比较的损伤识别指标、基于模态参数衍生出的损伤识别指标、损伤诊断技术研究及基于改进训练算法的神经网络损伤识别技术。

作者首先感谢曾给予教诲的博士后合作指导教师秦权教授的指导和关怀。研究生吴丽娟参与了 ERA 特征系统算法研究和编程工作。

本书在编写过程中，参阅了国内外同行专家许多宝贵的研究成果与资料，在此谨向他们致以衷心的感谢。

本书可供土木水利、机械、车辆交通、能源、航空航天、力学等工程领域的科技人员参考，也可作为有关专业的研究生、本科生教材。

由于作者水平所限，本书的错误和不妥之处在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见。

作　者

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目 录

# 第一章 绪 论

## 1.1 大型工程结构模态参数识别的内容

模态参数识别是通过测量系统的输入（或称激励力）和输出（或称响应），来建立系统的数学模型，从而确定系统的动态特性。大型工程结构的模态参数识别只能通过测量系统输出（或响应）来建立系统的数学模型，从而确定系统的固有频率、阻尼比和振型模态参数。大型工程结构（包括大型运载工具、大跨度桥梁、高耸建筑、海上石油平台、大型水坝和大型武器发射平台等）的工作载荷往往是静载荷与动载荷或冲击载荷的组合，因此模态参数是结构动态设计的一个重要参数。此外，基于振动模态参数的损伤识别技术，由于其测试设备简单、成本低，不但可对大型工程结构的某一部分、也可对大型工程结构的整体作出损伤识别，对结构无损伤、对环境无污染、且不妨碍正常使用、能实现在线识别，故它是大型工程结构损伤识别的重要的、有前途的方法之一。目前，基于振动模态参数的损伤识别技术的精度不高、自动化程度也不高。引起其损伤识别精度不高的主要原因有：① 结构的模态参数识别精度不高，有误差；② 模态参数对结构损伤不敏感。故需进一步开展这一方面的理论和实验研究工作。

## 1.2 大型工程结构模态参数识别的基本方法与技术

结构模态参数识别方法可分为传统的传递函数模态分析方法和环境激励下的模态参数识别方法。传统的传递函数模态分析方法的特点是同时利用激励和响应信号进行参数识别。基于环境激励下的模态参数识别方法仅根据系统的响应就可进行参数识别，与传统的模态分析方法相比，有以下优点：① 无需激励源，仅需直接测试结构在环境激励下的振动响应数据就可进行模态参数识别，而且自然满足实际的边界条件，识别出的工作模态参数符合实际情况；② 费用少；③ 安全性好，实施人工激励可能使结构产生局部损伤，而环境激励则避免了这种情况的发生；④ 不影响交通，但这种识别方法所需要建立的数学模型复杂、且模态参数识别精度还有待进一步提高。

对于环境激励下模态参数识别问题的研究可以追溯到20世纪60年代B. L. Clarkson对这一问题的研究[1]。1973年Ibrahim[2]创立的仅利用时域振动响应信号进行参数识别的方法，极大地促进了模态分析技术的发展，在随后的多年该方法又不断得到完善，形成了独具一格的时域ITD法[3]。该方法的特点是能够在未知输入条件下，直接根据响应时域信号进行模态

参数识别，识别时采用了全部测试数据提供的信息量，无需将测试信号进行不同域之间的变化，避免了由数据变换而引起的截断误差，但该方法要求信号是平稳、均值为零的高斯分布，实际应用时测试量大、不易克服噪声影响。1976 年，Box 与 Jenkins 发表专著详细论述了用于时域参数识别的时序分析方法[4]，该方法利用能反映系统特性的一组有序的按时间次序排列的随机数据，通过建立描述这些随机数据内在规律的自回归模型（AR）或自回归滑动平均模型（ARMA）来识别系统模态参数，其优点是无能量泄漏，分辨率较高，可以方便地用于在线模态分析，但该方法属于局部识别法，仅适用于白噪声激励，实际应用时模型定阶比较困难，并且常规时序模型无法识别振型。近 20 年来，环境激励下的模态参数识别方法受到了航空、航天、航海、汽车等领域中的专家、学者的极大重视，也受到国际、国内工程界内人士的重视，如每年在美国举办的国际模态学术会议 IMAC 上，有很多文章研究和讨论环境激励下的工程结构的模态参数识别问题[5-25]。1983 年 Mergeay 研究了单参考点复指数 SRCE 法[26]，其核心是最小二乘估计和脉冲响应函数关于各阶模态的复指数展开理论的结合，但该方法是一种局部识别法。后来 Leuridan 和 Vold 在此基础上进一步发展了多参考点复指数 PRCE 法[27]，该方法同时利用所有激励点和响应点的数据进行分析，与 SRCE 法相比扩大了参数识别的信息量，使识别的模态参数具有整体统一性，并具有较强的对虚假模态的辨识能力，识别精度大大提高，但该方法所要求的激振技术较为复杂，测试数据量和运算量很大，且难于运用到大型工程结构上。1984 年 J.N.Junang 和 R.S.Pappa 首先提出了基于实现的子空间方法的特征系统实现算法（ERA）[28]，该方法利用了 $n$ 自由度线性系统的状态方程和系统最小实现理论，属于多输入、多输出的时域整体模态参数识别法，它以多点激励得到的脉冲响应函数矩阵为基础，构造 Hankel 矩阵，利用奇异值分解技术，确定出最小阶数的用于描述状态方程的系统矩阵和输入、输出矩阵，构成最小阶的系统实现，通过求解系统矩阵的特征问题得到模态参数。1985 年 Juang 提出了另一类确定系统最小实现的算法，其核心是 QR 分解技术，并进一步研究了模型缩聚减小解算量问题。特征系统实现法的理论推导严密，它以最少的参数、最小的阶次来描述系统的特征和进行求解，该方法识别精度高，是比较完善和先进的时域参数识别方法之一，当时已在航空航天复杂结构中得到良好应用，但在测点较多时 Hankel 矩阵阶次很高，对计算硬件要求较高。在 1986 年他们进一步研究了噪声对模态参数识别结果的影响[29]；在 1988 年他们研究了用数据相关来提高模态参数识别精度[30]。1986 年 Braun，S.G.提出把 prony 方法应用于结构模态参数识别[31]，该方法使用自由振动数据或脉冲响应数据，当使用脉冲响应数据时方法就是复指数方法，该方法的主要限制就是所需数据的瞬态性，对数据的采样要求比较高。1986 年 Braun，S.G.提出的两级最小二乘方法（two stage LS，简称 2TSLS）也是基于 ARMAX 模型的，但它将参数的非线性估计问题转化为二级线性最小二乘问题，与 PEM 方法相比，计算大为简化，参数估计也能达到次优的效果。Ljung，L.在 1987 年[32]提出了预测误差方法（Prediction Error Method，PEM），它是基于有确定性输入的 ARMA 模型即 ARMAX 模型的，可以把它看作广义的最小二乘方法，PEM 误差平方最小化方程是待估参

数向量的非线性方程，必须进行迭代优化，但会引起算法稳定性问题和计算上的复杂性。但理论上该方法给出的参数估计是统计意义上最优的。Ljung，L.在 1987 年又提出了辅助变量（IV，instrumental variable）方法，它是基于与 ARX 相类似的模型，但需要迭代步骤，尽管每一步的迭代计算得到的是统计一致的估计，但为了收敛性要求，需要的迭代次数太多。Fassois S D 和 Lee J E 在 1993 年[33]提出了线性多级（简称 LMS，linear-mul-tistage）方法，它使用多级线性 LS 方法并进行解卷积计算，计算效率与两级 TSLS 方法相类似。Hyoung M Kim 等在 1994 年[34]开始研究采用 ERA 方法识别结构模态参数，并把研究成果应用于识别和平号空间站和国际空间站的模态参数[35, 36]。1995 年 James 等[37]从解析结果推导证明了系统任意点的脉冲响应，与白噪声激励时两点之间的响应互相关函数具有相似的解析表达式，从而可以将运用脉冲响应函数进行参数识别的时域基本方法扩展到运用相关函数进行参数识别，并进一步提出了利用互相关函数识别工作模态参数的 NexT 技术，运用该技术对一座公路桥在交通车辆环境激励下的模态参数进行了识别，并与力激励下的结果进行比较，结果表明差异较小。1997 年 Hermans 利用响应互相关函数替代自由响应信号并结合传统的 ITD 法进行模态参数识别[38]。1997 年丹麦的 John Christian Asmussen 博士[39]对 Vestvej 大桥进行了环境激励下模态参数识别问题的研究，用随机减量和频域谱分析技术获取该大桥的模态参数。美国费城运输安全部在 1998 年对新泽西州的两座大桥，进行了环境激励下模态参数识别问题的研究。1999 年 Lawrence 采用 Laplace 小波与信号的脉冲响应函数进行相关处理，将多频的脉冲响应函数分解为单频的脉冲响应函数然后进行模态参数的估计[40]。1999 年 Peeters 提出了改进的随机子空间方法，其本质就是将响应互相关函数与传统的特征系统实现法两者相结合，该方法采用响应参考点，并采用采样数据缩减技术，一定条件下解决了实际应用中数据采样量较大给分析带来的困难，通过一个发射塔结构演示了它的具体应用[41]。2000 年 Jyrki Kullaa 对位于加拿大的 Vancouver 地区的一个古代宫廷城堡，使用随机子空间方法进行了模态参数辨识，识别出了前三阶的弯曲和扭转模态[42]。2000 年 Rune Brincker 等根据轿车车体在发动机振动激励下的响应数据使用随机子空间技术和对测量响应的功率谱密度矩阵进行分解，把响应分解成各单个模态的响应，识别了车体的前 16 阶模态，对有较高噪声水平的数据也得到了较高精度，模态阻尼的识别精度也较高[43]。2001 年 A. Fasana 使用 ARMAV 方法和 ITD 方法对意大利的一座大桥进行了模态参数识别，并对两者结果进行了比较[44]。2001 年 R.Bolton 对一钢筋混凝土公路桥的模态参数识别问题，使用了 ITD 等识别方法，并与单输入多输出（SIMO）识别方法得到的结果进行比较，结果显示对于低阶模态的结果，几种方法相差不多[45]。

自 20 世纪 80 年代起，国内的学术界与工程界对环境激励下的大型工程结构的模态参数识别方法进行了理论和应用方面的研究[46-61]。1981 年宝志雯等研究用峰值拾取法对某高层建筑物进行了模态参数识别研究[62, 63]。1994 年曾庆华等[64]用频域的有理分式正交多项式拟合方法及时域的最小二乘复指数（LSCE）方法对飞机颤振试验数据进行了模态参数识别，

研究结果表明，考虑有噪声影响时正交多项式拟合方法比最小二乘复指数（LSCE）法有效。1999 年于开平等[65]研究了从结构系统的脉冲响应函数的小波变换提取模态参数的方法。1999 年张令弥等[66]提出了一种改进的特征系统实现算法（FERA），这种算法先用相关滤波方法对测量数据进行预处理，然后以递推形式形成一个对称半正定阵，采用特征值分解代替奇异值分解以减少计算工作量和提高模态识别精度。2000 年邹经湘和于开平等[67,68]研究用 ARMA 模型与 NARMA 模型识别线性时变和非线性时不变结构系统。2001 年作者[69]研究用 FERA 方法识别了青马悬索桥模态参数。2001 年陈鹏程等[70]选用峰值拾取法对集装箱装进行模态参数识别。2001 年李中付等[55]根据线性系统在环境激励下各输出点响应之间的相关函数与系统的脉冲响应函数具有相同的数学表达式等特点，提出了模态参数识别的新方法，该方法与以 ITD 法为基础的 NEXT 法相比，采用奇异值分解的原理提高了数值稳定性，避免了 ITD 法中的系统特征值虚部的多值性，且识别结果具有鲁棒性。2001 年吕志民等[54]使用非线性自回归模型和小波变换方法检测出我国某大型水轮机轴系的动态固有频率和黏性阻尼系数。2003 年金新灿等[71]用多参考点 LSCE 法对环境随机激励下的高速列车进行了工作模态识别，并与 FRF 模态识别法进行了对比和分析，试验结果显示，两种方法对模态频率和阻尼比的识别误差分别不超过 5.4%和 9.9%。2004 年陈隽等[72]研究使用 HHT（Hilbert-Huang）方法识别出青马桥在台风作用下的固有频率和阻尼比。2005 年杨和振等[60]对位于渤海湾的“埕岛二号”中心生活平台利用峰值拾取法和 ERA 方法分别进行模态参数识别，结果比较吻合。2005 年 Yu Dan-Jiang 等[73]发展了基于 HHT 方法的核心经验模型分解（EMD）的随机子空间方法从结构工作状态下测量的非平稳响应信号识别模态参数。2005 年庞世伟、邹经湘和于开平[74]研究用改进子空间方法识别线性时变结构系统模态参数。

环境激励下模态参数识别技术的研究经过多年的发展，特别是近年来，不断出现新的识别方法。按识别域分，可分为时域法、频域法（以 FFT 为基础）和时频法（如 Wignar）；按激励点和测量点来区分，有单输入多输出法（SIMO）和多输入多输出法（MIMO）；按激励的信号区分，可分为适用于白噪声类和适用于非白噪声类，也可分为适用于稳态信号类和适用于非稳态信号类；或可分为基于脉动输入的 RD 函数法、ARMA 模型法、Hilbert 变换法、Kalman 滤波法等，输入为脉冲响应的 Ibrahim Time Domain（ITD）法、Eigen Realization Algorithms（ERA）法及其改进方法等；如按照特点来区分，则有峰值拾取法、频域分解法、时间序列法、随机减量法、NEXT 法、子空间类方法等。在以上各种方法中，ERA 和 PEM 方法在模态识别的成功率和识别精度方面为最佳，ITD 法和 ERA 法及其改进方法更适用于识别有非经典阻尼的结构，它们能识别出复模态。下面就常用的模态参数识别方法与技术作一介绍。

### 1. 峰值拾取法

峰值拾取法（peak picking technique）属于频域法[63]，主要根据频响函数在固有频率附

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

近出现峰值的原理提出的。峰值拾取法用结构响应的功率谱代替频响函数。该方法假定响应的功率谱峰值仅有一个模态确定。这样，系统的固有频率可由平均响应功率谱的峰值得到，并用工作挠度近似代替系统的振型。该方法原理简单、识别迅速、容易操作，在桥梁和建筑领域时常用到。但该方法无法识别密集模态，且识别结构的阻尼比误差较大。且峰值拾取法仅适用于实模态或比例阻尼的结构。

### 2. 频域分解法

频域分解（frequency domain decomposition）方法[75]是一种输入属于白噪声激励在频域中识别参数的方法，它在原理上是峰值拾取法的延伸，并克服了峰值拾取法的不足。识别时，频率和阻尼是从对应单自由度相关函数的对数衰减中获得。因此，频域分解法的核心是对响应功率谱进行奇异值分解，分解为对应多阶模态的一组单自由度系统功率谱。

该方法识别精度高，有抗干扰能力。但是频域分解法必须同时满足三个假设：一是激励为白噪声；二是结构的阻尼为弱阻尼；三是当有密集模态时必须是正交的。否则，该方法仅是一个近似方法。

### 3. 正交多项式算法

正交多项式算法属于单输入单输出（SISO）范畴，其识别模态频率和模态阻尼的步骤一般是首先对各条测试频响函数进行一一拟合，然后利用某种形式的平均来获得结构系统的整体模态参数。实践证明，当测点位置不理想（如节点位置的测点）或模态耦合严重时，这种算法的识别精度往往会受到较大影响，有时甚至得出错误的结果。整体正交多项式拟合算法能够同时综合多个频响的信息，可以提高模态参数识别精度。

（1）正交多项式识别算法。[76]

系统测试频响函数在第 $i$ 个频率点处的值可表示为如下有理分式

$$H_T(\omega_i)=\frac{\sum_{k=0}^{m}a_k\phi_k(\omega_i)}{\sum_{k=0}^{n}b_k\theta_k(\omega_i)} \tag{1.2.1}$$

式中，$a_k$、$b_k$分别为分子、分母正交多项式系数，为了保证分母多项式的唯一性，取其最高项系数 $b_n$ 为 1；$\phi_k$，$\theta_k$分别为分子、分母正交多项式，它们满足以下的正交性条件

$$\sum_{i=0}^{L}\phi_j^*(\omega_i)\phi_k(\omega_i)=\delta_{jk}\text{，}\quad\sum_{i=0}^{L}\left|H_T(\omega_i)\right|^2\theta_j^*(\omega_i)\theta_k(\omega_i)=\delta_{jk} \tag{1.2.2}$$

其中，$L$ 为总的频率点数；$\delta$ 是 Kronecker Delta 函数。

式（1.2.1）两边同乘右边的分母可得到与拟合参数、测试频响 $H_T(\omega)$有关的误差函数

$$\varepsilon = \Phi a - \Theta b - w \tag{1.2.3}$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{1,0} & \phi_{1,1} & \cdots & \phi_{1,m} \\ \phi_{2,0} & \phi_{2,1} & \cdots & \phi_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{L,0} & \phi_{L,1} & \cdots & \phi_{L,m} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} H_T(\omega_1)\theta_{1,0} & H_T(\omega_1)\theta_{1,1} & \cdots & H_T(\omega_1)\theta_{1,n-1} \\ H_T(\omega_2)\theta_{2,0} & H_T(\omega_2)\theta_{2,1} & \cdots & H_T(\omega_2)\theta_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_T(\omega_L)\theta_{L,0} & H_T(\omega_L)\theta_{L,1} & \cdots & H_T(\omega_L)\theta_{L,n-1} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Bmatrix}, \quad w = \begin{Bmatrix} H_T(\omega_1)\theta_{1,n} \\ H_T(\omega_2)\theta_{2,n} \\ \vdots \\ H_T(\omega_L)\theta_{L,n} \end{Bmatrix}$$

定义目标函数为

$$E = \varepsilon^* \varepsilon \tag{1.2.4}$$

可以看出 $E$ 与分子、分母正交多项式系数呈线性关系，所以使 $E$ 最小的问题可以利用线性优化理论来完成。分别求 $E$ 对 $a$、$b$ 的偏导数并令其为 0，可得如下的线性方程组

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_1 & X \\ X^T & \mathrm{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.5}$$

其中

$$X = -\mathrm{Re}(\Phi^* \Theta), \quad h = -\mathrm{Re}(\Phi^* w) \tag{1.2.6}$$

求解线性方程组（1.2.5）可得

$$(\mathrm{I} - X^{\mathrm{T}} X)\ b = -X^{\mathrm{T}} h, \quad a = h - Xb \ (k = 0, \ \ldots, \ n) \tag{1.2.7}$$

在由式（1.2.7）求得分子、分母正交多项式系数 $a_k$ 和 $b_k$ 之后，就可根据所采用的正交多项式的定义进一步求出一般多项式（幂多项式）的系数，求解分母幂多项式的根即可得极点，最后频响函数矩阵可由频响函数的有理分式模型获得。

可以看出，正交多项式算法相当于每次拟合一条频响，得到一个形如式（1.2.7）的方程组，再求解此方程组得出一组模态频率和模态阻尼。

（2）整体正交多项式识别算法。[58, 77, 78]

与普通的正交多项式算法不同，整体正交多项式算法则同时对所有频响函数进行拟合，利用整体最小二乘算法来识别结构系统的整体模态参数。最早关于整体正交多项式识别算法的研究是在 1982 年，由 Richardson 在提出正交多项式拟合算法的同一篇文章中提出。1985 年 Richardson 提出了在已知整体模态频率和模态阻尼的前提下获得模态留数的算法，并于 1986 年对模态频率和模态阻尼因子的整体正交多项式拟合算法做了进一步的完善，推导出基

于分母幂多项式系数的最小二乘问题的公式。1988 年彭伟、袁景侠将 Richardson 提出的模态频率和模态阻尼因子的整体正交多项式拟合算法进一步发展到实用阶段，并将原算法中的基于分母幂多项式系数的最小二乘问题转化为基于分母正交多项式系数的最小二乘问题。1993 年，Friswell 对正交多项式拟合算法中的分母、分子取不同正交多项式的思路进行改造，令分子、分母取相同的正交多项式，从而使不同的频响函数拟合所得分母正交多项式的系数相同，直接将问题转化为关于分母正交多项式系数的整体最小二乘问题，使得算法的识别速度大大提高。

4. 时间序列法

时间序列法（time series analysis）是一种利用参数模型对有序的随机数据进行处理的一种方法。其实质就是在白噪声激励下识别时序模型的系数。

时间序列分析是对一串随时间变化而又相互关联的动态数据（动态信号）进行分析、研究和处理的一种方法。时间序列或动态数据是依时间顺序或空间顺序或依某种物理顺序先后排列的、各有其大小的一列数据，这种有序性和大小反应了数据内部相互联系和变化规律，蕴含着产生这列数据的现象、过程或系统的有关特性和信息。

从系统分析角度来看，如将动态数据作为某一系统的输出，则这一输出应包含如下三方面的信息：

① 系统本身有关的固有特性；

② 输入的特性，即同此系统有关的外界特性；

③ 输入同系统的关系，即有关的外界同系统的关系研究、分析与处理后得到的动态数据。

用时间序列法识别模态参数，无能量泄露、分辨率高。但该类方法仅适用于白噪声激励的情况，时序模型的阶次较难确定，且阻尼识别误差较大。

模态参数识别中的时序法使用的数学模型（差分方程）主要是 AR 模型和 ARMA 模型，AR 模型只使用响应信号，ARMA 模型需使用激励和响应两种信号，二者均使用平稳随机信号。ARMA 模型法既可用于自由振动响应模态识别，又可用于强迫振动响应模态识别。

（1）ARX 模型。[79, 80]

设 $n$ 自由度振动系统的运动微分方程为

$$M\ddot{x}(t)+C\dot{x}(t)+Kx(t)=B_fU(t) \tag{1.2.8}$$

式中，$M$，$C$，$K$ 分别为系统的质量、阻尼及刚度矩阵，均为 $n\times n$ 阶（设输出状态变量的维数与系统的自由度数相同）；$B_f$ 为 $n\times m$ 阶输入分配矩阵；$x(t)$、$U(t)$分别为 $n$ 维输出向量和 $m$ 维输入激励向量。

下面取状态变量为

$$y=\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

则有

$$\dot{y}=\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\end{bmatrix}$$

且 $$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & I\\ -M^{-1}K & -M^{-1}C\end{bmatrix}_{2n\times 2n},\quad \bar{B}=\begin{bmatrix}0\\ M^{-1}B_f\end{bmatrix}_{2n\times m}$$

振动微分方程（1.2.8）用状态方程表示为

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=\bar{A}y(t)+\bar{B}U(t)\\ z(t)=\bar{C}y(t)\end{cases}\tag{1.2.9}$$

式（1.2.9）中 $z(t)$ 为 $l$ 维测量向量，$\bar{C}$ 为 $l\times 2n$ 阶测量矩阵，且 $\bar{C}=C$。设初始条件为 $y(0)$，则很容易求出方程（1.2.9）的时域解为

$$y(t)=\mathrm{e}^{\bar{A}t}y(0)+\int_0^t \mathrm{e}^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B}U(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0\tag{1.2.10}$$

假定采样时间间隔为 $\Delta t$，采样时间点为 $t=k\Delta t$，则时间离散化后的系统的解为

$$y((k+1)\Delta t)=\mathrm{e}^{\bar{A}k\Delta t}y(k\Delta t)+\int_0^{\Delta t}\mathrm{e}^{\bar{A}\tau}\bar{B}U(k\Delta t)\,\mathrm{d}\tau$$

离散化后的状态方程为

$$\begin{cases}y((k+1)\Delta t)=\bar{A}y(k\Delta t)+\bar{B}U(k\Delta t)\\ z((k+1)\Delta t)=\bar{C}y((k+1)\Delta t)\end{cases}\tag{1.2.11}$$

式中 $$\begin{cases}A=\mathrm{e}^{\bar{A}\Delta t}\\ B=\left(\int_0^t \mathrm{e}^{\bar{A}\tau}d\tau\right)\bar{B}\\ C=\bar{C}\end{cases}$$

式（1.2.11）写成差分方程，并对其进行 Z 变换得

$$Y(k)=G(z^{-1})U(k)\tag{1.2.12}$$

$$G(z^{-1})=\frac{1}{A_1(z^{-1})}\begin{bmatrix}B_{11}(z^{-1}) & \cdots & B_{1m}(z^{-1})\\ \vdots & & \vdots\\ B_{n1}(z^{-1}) & \cdots & B_{nm}(z^{-1})\end{bmatrix}$$

其中 $G(z^{-1})$ 为离散型传递函数矩阵，$z^{-1}$ 为后移算子，多项式 $A_1(z^{-1})$ 和 $B_{ij}(z^{-1})$ 可写成

$$A_1(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_p z^{-p} \tag{1.2.13}$$

$$B_{ij}(z^{-1}) = \sum_{k=1}^{q} b_{kij} z^{-k} \quad (i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m) \tag{1.2.14}$$

使 $A_1(z^{-1})$ 为严格最小相位，则公式（1.2.12）可以看做 $n$ 个独立的单输出多输入子系统，第 $i$ 子系统可以表示成

$$A_1(z^{-1}) y_i(k) = \sum_{j=1}^{m} B_{ij}(z^{-1}) u_j(k) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.15}$$

考虑到量测噪声影响，设

$$\hat{y}_i(k) = y_i(k) + w_i(k) \tag{1.2.16}$$

把式（1.2.15）中的 $y_i(k)$ 用 $\hat{y}_i(k)$ 代替，得到

$$A_1(z^{-1}) \hat{y}_i(k) = \sum_{j=1}^{m} B_{ij}(z^{-1}) u_j(k) + e_i(k) \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.2.17}$$

式中，噪声 $e_i(k) = A_1(z^{-1}) w_i(k)$； $w_i(k)$ 是均值为零的白噪声。

式（1.2.17）写成矩阵形式

$$A_1(z^{-1}) \mathrm{I}_{n\times m} \hat{Y}(k) = B(z^{-1}) U(k) + e(k) \tag{1.2.18}$$

式（1.2.18）为多维 ARX 模型。其中由 $A_1(z^{-1})$ 可以求出系统的固有频率和阻尼比，由 $B(z^{-1})$ 可以求出系统的振型。

（2）自回归滑动平均模型（ARMA）。[81, 82]

ARMA 模型的数学公式为

$$x_t - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i x_{t-i} = a_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j} \tag{1.2.19}$$

该模型记作为 ARMA$(p,q)$，其中：$p$ 为自回归模型的阶数，$q$ 为滑动平均模型的阶数，$\varphi_i$ 为自回归系数，$\theta_j$ 为滑动平均系数。

确定 ARMA$(p,q)$ 模型的阶数 $p$ 和 $q$ 的方法主要有两种：目标函数变化的显著性检验法和方法误差的独立性检验法。ARMA 模型中的自回归系数 $\varphi_i$ 和滑动平均系数 $\theta_j$ 的估计方法有：最小二乘法、极大似然法、相关矩法和逆函数法等。$\varphi_i$ 和滑动平均系数 $\theta_j$ 一旦确定，就可确定结构各阶模态频率和阻尼比。

（3）自回归滑动平均模型（ARMAX）。[83]

ARMAX 模型是在 ARMA 模型的基础上发展起来的，它不但可以描述系统的输入输出关系，而且可以描述有色测量噪声。该模型的参数估计有最小二乘法和极大似然法。一般的最小二乘法算法简单，且估计量具有很多优良的统计特性，但不能考虑噪声的有色性，从而使

识别精度对噪声比较敏感，鲁棒性差；而极大似然法可以对具有有色噪声的系统进行辨识，但需要构造一个与测量数据和未知数据有关的似然函数，并通过极大化这个函数获得模型的参数，因此计算过于复杂。采用基于限定记忆的增广最小二乘递推算法，可有效地避免数据饱和现象，而且考虑了噪声的影响，对实际振动结构在线模态识别具有一定的工程应用价值。

设 $n$ 自由度振动系统在 $p$ 点激励 $l$ 点拾取响应之间传递函数可写为

$$H_{lp}(s)=\frac{b_0+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_m s^m}{a_0+a_1 s+b_2 s^2+\cdots+a_n s^n} \tag{1.2.20}$$

对 $H_{lp}(s)$ 进行拉氏逆变换及离散采样，可得到下式

$$H_{lp}(k)=\sum_{r=1}^{n}\left(A_{lpr}\mathrm{e}^{s_r k\Delta}+A_{lpr}^{*}\mathrm{e}^{s_r^{*} k\Delta}\right) \tag{1.2.21}$$

式中，$k$=1，2，…；$\Delta$ 为采样时间间隔。

设 $Z_r=\mathrm{e}^{s_r\Delta}$，则式（1.2.21）变为

$$H_{lp}(k)=\sum_{r=1}^{n}\left(A_{lpr}Z_r^{k}+A_{lpr}^{*}Z_r^{*k}\right) \tag{1.2.22}$$

对式（1.2.22）进行 $Z$ 变换，并化简后得到

$$H_{lp}(Z)=\frac{\beta_0+\beta_1 Z^{-1}+\beta_2 Z^{-2}+\cdots+\beta_m Z^{-m}}{1+\alpha_1 Z^{-1}+\alpha_2 Z^{-2}+\cdots+\alpha_n Z^{-n}}=\frac{X(Z)}{U(Z)} \tag{1.2.23}$$

经过 $Z$ 逆变换，并化简后得到离散的差分方程 ARMA（$n$，$m$）模型

$$\begin{cases}A(q)x(k)=B(q)u(k)\\ A(q)=1+\alpha_1 q^{-1}+\alpha_2 q^{-2}+\cdots+\alpha_n q^{-n}\\ B(q)=\beta_0+\beta_1 q^{-1}+\beta_2 q^{-2}+\cdots+\beta_m q^{-m}\end{cases} \tag{1.2.24}$$

式中，$q$ 为延迟算子，且 $q^{-1}x(k)=x(k-1)$。

如果考虑输出端存在测量误差，则有

$$y(k)=x(k)+w(k) \tag{1.2.25}$$

式中，$w(k)$ 为零均值的不相关平稳随机信号。由式（1.2.25）得到 $x(k)=y(k)-w(k)$，将其代入式（1.2.24）中，得到

$$A(q)y(k)=B(q)u(k)+A(q)w(k) \tag{1.2.26}$$

如果 $w(k)$为有色噪声且为有理谱，则根据表示定理有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com