高职高专精品课程规划教材

GAOZHIGAOZHUANJINGPINKECHENGGUIHUAJIAOCAI

高等数学

经管分册

GaoDeng ShuXue

JingGuan FenCe

◆李以渝 兰华龙 主编

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高职高专精品课程规划教材

高等数学

（经管分册）

李以渝　兰华龙　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书是根据教育部全国高等职业教育《应用数学基础》基本要求和当前高职高专数学教学实际，并结合我们多年教学研究而编写的。本书的特点是简明扼要、深入浅出，便于学生学习，重视应用、联系实际，习题分为A(基础题)、B(提高题)、C(应用题、探究题)三种，便于分层教学。内容包括线性代数初步、线性规划、概率、应用统计。

本书系高职高专精品课程规划教材高等数学系列教材之一，本系列教材包括《高等数学(基础分册)》、《高等数学(工程分册)》、《高等数学(经管分册)》、《数学建模》四本。

本书可作为两年制或三年制高职高专各专业高等数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 经管分册/李以渝，兰华龙主编. —北京：北京理工大学出版社，2007.4

高职高专精品课程规划教材

ISBN 978-7-5640-1043-0

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李…②兰…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第045689号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京圣瑞伦印刷厂
开　　本 / 787毫米×960毫米　1/16
印　　张 / 8.75
字　　数 / 148千字
版　　次 / 2007年4月第1版　2007年4月第1次印刷
印　　数 / 1～6000册　　　责任校对 / 张　宏
定　　价 / 14.00元　　　责任印制 / 母长新

高等数学(经管分册)编写委员会

主　　编　李以渝　兰华龙

副 主 编　李耘侨　任树华　谭和平

编写人员　(以姓氏笔画为序)

兰华龙　刘少雄　任树华　李　应

李金丹　李传伟　李以渝　李耘侨

吴　鹏　赵志华　谭和平

策　　划　戴本文　薛厚明

序

对数学教育的新认识

1. 为什么我们要重视学习数学

为什么我们从小学开始直到大学要一直学习数学？主要的原因：

(1)文化基础

数学与语文两大学科代表着人类两大文化：科学文化与人文文化，数学是一门特殊的科学，数学精神、数学思想、数学方法中充分显示着一般科学精神、科学思想、科学方法．

(2)大脑开发

数学、语文及科学文化、人文文化又大体对应着我们人脑左右半脑：

人脑结构	知识特性	思维方式	学科	文化类型
左脑	分析性、逻辑性	逻辑思维	数学	科学文化
右脑	综合性、直观性	形象思维	语文	人文文化

数学学习对人脑发育有直接作用，对左右脑发展有全面作用．

(3)知识基础

数学知识已渗透于各种自然科学及许多社会科学之中，数学知识是我们学习各门科学的基础，语言、符号、图像、计算、估计、推理、建模等基本内容已渗透于我们日常生活与工作之中，数学成了我们的基本技能．

(4)智慧开发

数学又是最富智慧的科学，数学学习最显著的价值是培养人的思维能力，数学知识学习与解题训练中都能有意义地训练培养我们的逻辑思维与抽象思维、形象思维与直觉思维、辩证思维与系统思维；数学知识是智慧的结晶，会给我们以智慧的启迪(举个简单例子，请你思考“乘法的智慧”：同样两个数如 7 与 9，$7+9=16$，$7\times9=63$，为什么作乘法比作加法大许多？你想过没有，数学算法实际上等同于我们做事情一般方法；类似“记数法的智慧”、“坐标系的智慧”、“对数方法的智慧”、“函数的智慧”……)；非智力因素方面，数学学习是困难的、富于竞争的，可培养我们的主动性、责任感、自信心，以及顽强的毅力、一丝不苟的精神、

良好的学习习惯等个性品质.

2. 我们应该如何学习数学

(1)新的数学观

数学是一门特殊的科学,数学充分显示着一般科学精神、思想和方法;数学是一种文化,它属于甚至代表科学文化;数学是最富创新性的科学,数学的研究被视为人类智力的前锋;数学是推动人类进步的最重要的思维学科之一.

(2)新的数学教育观

现代社会,数学的技术作用日益突出,学校教育随之强调数学的技术作用,数学教师也习惯于数学教育就是数学知识、数学方法的教育.但许多学生却认为学大量复杂的数学以后没有用,因而学数学兴趣不大、动力不足.对于大多数学生,现实情况确如日本著名数学教育家米山国藏所指出的:学生进入社会后,几乎没有机会应用他们在学校所学到的数学知识,因而这种作为知识的数学,通常在学生出校门不到一两年就忘掉了.他认为学数学的意义在于:不管人们从事什么业务工作,那种铭刻于头脑中的数学精神和数学思想方法,却长期的在他们的生活和工作中发挥着重要作用. 笔者则进一步认为,由新的数学观有新的教育观:数学教育的意义、价值不仅在于数学知识和方法的教育,还在于通过数学知识、方法的教育向促进人脑发育发展、培养人的科学文化素质、发展包括人的思维能力、创新能力在内的人的聪明智慧,数学学习能为人一生的可持续发展提供动力,原因正在于培养了人的这些素质.

(3)新的数学素质教育观

相应有新的数学素质教育观,即数学课程的素质教育应有"数学素质"与"一般素质"的双重意义.数学素质即数学观念、数学思维、数学语言、数学技能及应用能力等数学学科素质;一般素质包括思想素质、文化素质、思维素质、创新素质、审美素质等人的综合素质的各重要方面. 新的数学素质观,是重视数学(学科)素质教育并努力使其扩展为人的一般素质、全面素质. 如我们重视数学知识、方法学习同时重视探讨这些数学知识、方法背后的一般意义,在数学学习中主动感受其科学文化、进行思维开发和智慧发展,即:

数学知识→科学知识、一般知识

数学方法→科学方法、一般方法

数学思维→科学思维、一般思维

数学精神→科学精神、一般精神

数学创造→科学创造、一般创新

数学之美→科学之美、世界之美

……

(4)高职高专高等数学教育观

高职高专培养的是生产、服务一线的技术工人,这些岗位对高等数学的要求

不高，而能否胜任工作、能否有发展能力，更在于人的素质. 相应，高职高专高等数学教材（以及教法）不应是大学高等数学的“压缩版”，要有自己的特色. 这就是：高等数学的学科性、理论性可以适当减弱，而突出应用数学思想方法、探究式学习，和重点突出素质教育.

3. 关于本教材的编著

本教材是高职高专精品课程规划教材高等数学系列教材（《高等数学（基础分册）》《高等数学（工程分册）》《高等数学（经管分册）》《数学建模》）之一，是我们针对当前高职高专数学教学实际，总结自己多年高等数学教学、研究的实践与经验，参考国内外多种优秀教材，并融入上述数学教育理念的结果.

本教材是编委会全体老师共同努力的结果. 特别是请到了西南交通大学杨宁教授审阅了全书，在此一并表示谢意.

对于本书的不当之处，敬请读者指正.

李　以　渝

四川工程职业技术学院　教授

教育部高等学校教学指导委员会　委员

2007 年 1 月 10 日

目　录

第一章　线性代数初步

行列式与矩阵是现代工程技术中的重要数学工具之一，应用非常广泛. 本章将介绍线性代数的基本概念——矩阵和行列式的概念及其运算，并用它们求解线性方程组，解决一些实际问题.

§1.1　矩阵的概念与运算

［**先行问题**］在工程技术、经济工作和现实生活中有大量与数表有关的问题.

1.1.1　矩阵的概念

引例　顺达公司生产甲、乙、丙三种产品，它们的生产成本由原材料费用、人工费用和其他费用三项构成. 表 1—1 给出了每种产品的每项费用的预算.

表 1—1　预算表　　百元

生产成本＼产品	甲	乙	丙
原材料费用	10	30	20
人工费用	3	4	5
其他费用	1	2	3

将上表中主要关心的数据按原来次序排列成矩形数表，并加上括号以表示这些数据(一个整体)，就得到一个矩形数表 $\begin{pmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

如果该公司 2005 年各季度产品的计划生产数如表 1—2 所示：

表 1—2　顺达公司 2005 年各季度产品计划生产数　　台

产品＼季度	1	2	3	4
甲	400	450	450	400
乙	200	260	240	220
丙	580	620	600	600

同样，由这些数据可得矩形数表$\begin{pmatrix} 400 & 450 & 450 & 400 \\ 200 & 260 & 240 & 220 \\ 580 & 620 & 600 & 600 \end{pmatrix}$.

定义 由$m\times n$个数$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成$m$行$n$列的矩形数表用括号将其括起来，称为$m\times n$矩阵，通常用大写字母$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\cdots$表示，即$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，简记为$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中$a_{ij}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$的第$i$行第$j$列处的元素.

特殊矩阵：

(1)行数与列数相等的矩阵称为方阵.如$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$称为$n$阶方阵.

(2)当$m=1,n>1$时，称为行矩阵.如$A=(2 \quad 4 \quad 5 \quad 3)$.

(3)$m>1,n=1$称$\boldsymbol{A}$为列矩阵.如$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix}$.

(4)零矩阵：所有元素都是0的矩阵，记作$\boldsymbol{O}_{m\times n}$或$\boldsymbol{O}$.

(5)n阶单位矩阵$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$，不加区别时表示为$\boldsymbol{E}$或$\boldsymbol{I}$.

(6)n阶对角矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

(7)n阶上三角矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$.

n 阶下三角矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

1.1.2　矩阵的运算

1. 同型矩阵与矩阵的相等

定义　如果两个矩阵的行数相同,列数也相同,就称它们是同型矩阵.

定义　如果两矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵,且它们对应的元素相等,即　$a_{ij}=b_{ij}$　$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

2. 矩阵的加法、减法与数乘

定义　如果两矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵,k 为数.规定

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的加法:$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$;

k 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘:$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$;

负矩阵:$-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$;

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的减法:$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$.

不难验证,上述运算满足下面八条运算律:

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵,k,l 为常数,则有

(1)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;　　(5)$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;　　(6)$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})$;

(3)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;　　(7)$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$;

(4)$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;　　(8)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

例 1-1　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$、$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

解　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3+5 & 2+4 \\ 4+2 & 5+(-4) \\ 6+3 & 7+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$;

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 9\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & \frac{9}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}.$$

例 1－2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 6\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$满足 $2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 $\boldsymbol{X}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

[**课堂练习**]设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & 2 & 6\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$满足 $3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

3. 矩阵乘法

[**先行问题**]先看一个实例，设有甲、乙、丙三种产品，其中 2001、2002 两年的销售量用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示，其成本、销售价用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{甲} & \text{乙} & \text{丙}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1\,000 & 4\,000 & 3\,000\\ 700 & 3\,550 & 4\,000\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ 2001\text{ 年}\\ 2002\text{ 年}\end{array},\quad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{成本} & \text{销售价}\end{array}\\ \begin{pmatrix}3 & 3.5\\ 4 & 4.4\\ 6 & 6.8\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲}\\ \text{乙}\\ \text{丙}\end{array}$$

分别求两年成本总额和销售总额.

2001 年成本总额为＝1 000×3＋4 000×4＋3 000×6＝37 000；

2001 年销售总额为＝1 000×3.5＋4 000×4.4＋3 000×6.8＝41 500；

2002 年成本总额为＝700×3＋3 550×4＋4 000×6＝40 300；

2002 年销售总额为＝700×3.5＋3 550×4.4＋4 000×6.8＝45 270

用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表达上述计算结果，即

$$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{成本总额} & \text{销售总额}\end{array}\\ \begin{pmatrix}37\,000 & 41\,500\\ 40\,300 & 45\,270\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ 2001\text{ 年}\\ 2002\text{ 年}\end{array}$$

定义 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，规定

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}$$

其中
$$c_{ij}=(a_{i1}\quad a_{i2}\quad \cdots \quad a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\cdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+b_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj},$$
$$(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

请注意：$\boldsymbol{A}$ 的列数 $=\boldsymbol{B}$ 的行数，$\boldsymbol{AB}$ 的行数 $=\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{AB}$ 的列数 $=\boldsymbol{B}$ 的列数.

如上例为 $\begin{pmatrix}1\,000 & 4\,000 & 3\,000\\ 700 & 3\,550 & 4\,000\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3.5\\4 & 4.4\\6 & 6.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}37\,000 & 41\,500\\40\,300 & 45\,270\end{pmatrix}$

例 1—3　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\\hdashline 0 & 3\\\hdashline 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)$，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$.

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}3 & -1\\\hdashline 0 & 3\\\hdashline 1 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c:c:c:c}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2 & -3\\0 & 6 & 3 & 0\\1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{BA}$ 无意义.

例 1—4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}$.

解　$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$.

例 1—5　设 $\boldsymbol{P}=(p_1\quad p_2\quad \cdots \quad p_n)$，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{PQ},\boldsymbol{QP}$.

解　$\boldsymbol{PQ}=p_1q_1+p_2q_2+\cdots+p_nq_n$，

$$\boldsymbol{QP}=\begin{pmatrix}q_1\\q_2\\\vdots\\q_n\end{pmatrix}(p_1\quad p_2\quad \cdots \quad p_n)=\begin{pmatrix}q_1p_1 & q_1p_2 & \cdots & q_1p_n\\q_2p_1 & q_2p_2 & \cdots & q_2p_n\\\vdots & \vdots & & \vdots\\q_np_1 & q_np_2 & \cdots & q_np_n\end{pmatrix}.$$

从上面的例子可以看出：

(1)矩阵乘法不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

(2)含零因子，即 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$；

(3)消去律不成立，即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq 0$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

不难验证，下面的运算律成立.

(1)乘法结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2)左分配律 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，右分配律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$;

(4) $\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$(单位 1).

利用矩阵可将线性方程组表示成矩阵方程,设 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}, \tag{1.1}$$

记系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$,未知量矩阵为 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,常数项矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$,则线性方程组(1.1)的矩阵形式为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$. (1.2)

例 1—6 设有 A,B,C 三国,它们的城市 A_1,A_2,A_3;B_1,B_2,B_3;C_1,C_2,C_3 之间的交通连接情况(不考虑国内交通)如图 1—1.

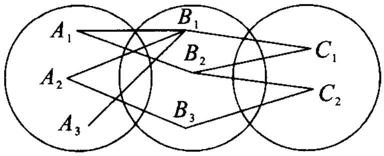

图 1—1 例 6 图

求 A,C 两国城市之间的交通连接条数.

解 根据上图,A 国和 B 国城市之间交通连接情况可用矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

表示,其中 $m_{ij}=\begin{cases} 1 & A_i\text{与 }B_j\text{连接}, \\ 0 & A_i\text{与 }B_j\text{不连接}. \end{cases}$

同样,B 国和 C 国城市之间的交通情况可用矩阵

$$\overline{\boldsymbol{N}}=\begin{array}{c} \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

表示,用 $\boldsymbol{P}$ 来表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 的乘积,那么可算出

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{MN}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\\2&1\end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{P}$ 正是 A,C 两国城市之间的交通连接条数矩阵.

4. 矩阵的转置

定义　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$,将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有行换成相应的列得到矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵. 即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

容易看出,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 为 $m\times n$ 矩阵;矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列处的元素 a_{ij},在 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 中则为第 j 行第 i 列处的元素.

可以证明,转置矩阵具有以下性质:

(1)$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;　　(2)$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3)$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;　　(4)$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 1—7　设 $\boldsymbol{A}=(1\quad -1\quad 2)$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}$,验证:$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解　因为 $\boldsymbol{AB}=(1\quad -1\quad 2)\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}=(9\quad 2\quad -1)$,所以 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}9\\2\\-1\end{pmatrix}$,

又　$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&4\\-1&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\2\\-1\end{pmatrix}$,

所以　$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

[**课堂练习**]

(1)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\-1&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&-1&1\\0&-2&-1&0\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

(2)设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 均为同阶可逆矩阵,则下列等式成立的是(　　).