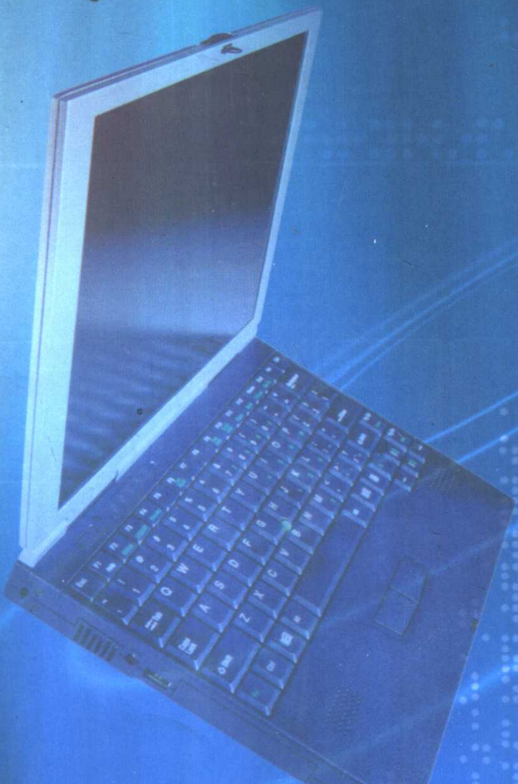
多目标决策方法

杨自厚　许宝栋　董　颖　编著



東北大學出版社
Northeastern University Press

多目标决策方法

杨自厚　许宝栋　董　颖　　编著

东北大学出版社

·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

多目标决策方法 / 杨自厚，许宝栋，董颖编著. — 沈阳：东北大学出版社，2006.12
ISBN 7-81102-295-8

Ⅰ. 多…　Ⅱ. ①杨…　②许…　③董…　Ⅲ. 多目标决策—研究　Ⅳ. C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 090121 号

内容简介

多目标决策一般包括多目标决策和多属性决策，是一门应用非常广泛的学科。目前，无论在理论上、方法上和应用方面都取得了迅速的发展。书中以方法和实例相结合，既介绍目前常用的多目标决策方法，又包含模糊多目标优化、多属性群体决策求解方法。

本书总结了编者多年来教学与科研的成果，既可作为高等学校有关专业高年级学生和研究生教材，也可为运筹学、管理科学、计算机科学、系统科学、信息科学与工程等各行各业，进行生产经营、生产计划、生产作业管理的高级管理人员和系统分析人员，应用计算机辅助决策提供参考。

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：12.625
字　　数：332 千字
出版时间：2006 年 12 月第 1 版
印刷时间：2006 年 12 月第 1 次印刷
责任编辑：任彦斌
封面设计：唐敏智
责任校对：李　叶
责任出版：杨华宁

定　　价：32.00 元

前　言

多目标决策问题，一般包括多目标决策和多属性决策问题，是一门应用非常广泛的学科，近二十年来，在国内外引起了极大的反响，在理论和应用方面都取得了迅速的发展。不论是在工程设计上，还是在管理、规划方面都得到了越来越多的应用。许多工程技术人员和管理工作者在各自工作中应用多目标决策方法获得了显著的成效，并提出许多新的方法，丰富了这一学科。

全书共分十一章，前三章介绍数学规划的基本概念，如线性规划、非线性规划以及整数规划。后八章对决策的基本理论、多目标最优化基本概念、求解非劣集的方法、有总体选好信息的求解方法、基于局部选好信息的交互式方法、多属性问题求解方法、模糊多目标优化问题、多属性群体决策方法展开了具体的分析和讨论。本书内容分原理与方法两方面，两者既有联系，又有一定的独立性，以便于不同类型的读者使用。

本书总结了编者几年来为系统工程研究生和各类专科班授课的教学经验，既可作为高等院校有关专业的高年级大学生和研究生教材，也可供运筹学、管理科学、计算机科学、系统科学、信息科学与工程等方面的学者、技术人员和管理人员参考。

由于编者水平有限，书中一定有不少缺点和错误，恳请读者给予批评指正。

编　者

2005 年 12 月

符号说明

$v(\cdot)$	价值、价值函数或选好函数
$\varnothing$	空集
$\mathbf{0}$	零向量
$E(\cdot)$	期望值
$\sim$	无差于
$u(\cdot)$	效用、效用函数
$\succ$	优于
$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$	n 维向量（在规划问题中）
$\boldsymbol{f}=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_p(x))^{\mathrm{T}}$	p 维向量函数
$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \cdots, \boldsymbol{x}^p)^{\mathrm{T}}$	p 维属性（在效用理论中）
$\bar{I}=\{i \mid g_i(x)<0\}$	不起作用约束的序号的集合
$\nabla f(\boldsymbol{x})=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$	$f(\boldsymbol{x})$ 的梯度（行向量）
$F(X^*)$	非劣点集合（目标空间）
X^*	非劣解集合（决策空间）
$P(\boldsymbol{w})$	加权问题
$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$	两个 n 维向量的内积
$Q^{\prec}(\hat{\boldsymbol{x}})$	劣于 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的向量的集合
$\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$	模糊向量
$I=\{i \mid g_i(\boldsymbol{x})=0\}$	起作用约束的序号的集合
$f(\boldsymbol{x})$	向量 $\boldsymbol{x}$ 的函数
$Q^{\succ}(\hat{\boldsymbol{x}})$	优于 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 的向量的集合
$Q^{\sim}(\hat{\boldsymbol{x}})$	与 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 不可比较的向量的集合
$X_1 \cup X_2$	X_1 与 X_2 的并集
$X_1 \cap X_2$	X_1 与 X_2 的交集
$P(\varepsilon)$	ε-约束问题
d^+, d^-	正偏差和负偏差
$\boldsymbol{x} \in X$	$\boldsymbol{x}$ 属于集合 X
$\wedge, \vee$	最大算子，最小算子
$\succcurlyeq$	至少优于
$\mathrm{CI}(x)$	x 的闭包
$\mathrm{Co}(x)$	x 的凸包
CP	混合整数规划问题

D	容许方向锥或决策矩阵表
DEA	数据包络分析法
EMV	期望货币值
EMVI	信息的期望货币值
EMVP	有完全信息的期望货币值
F（X）	目标空间的可行域
GP	目的规划问题
ILP	线性整数规划问题
int（X）	X的内部
IP	整数规划问题
LD	线性对偶问题
LGP	线性目的规划问题
LP	线性规划问题
MOLP	多目标线性规划问题
NLP	非线性规划问题
R^n	n 维欧氏空间
S	下降方向集，有效方向集，或约束集合
TP	非劣试验问题
VOP	向量最优化问题（多目标优化问题）
X	决策空间可行域，或方案（结局）的集合
Y，Z	属性或目标分量的名称或可能值的集合

说明：文中的 VP 和 NP 是 VOP 和 NLP 的简写。

目　　录

第 1 章　线性规划

1.1　基本概念

线性规划是运筹学中最常用的方法之一，它不仅在军事、社会和经济等各个领域得到广泛的应用，而且在工业的生产管理、过程控制和工艺控制中也有很多实际应用。

1.1.1　线性规划问题举例

线性规划所处理的问题是，对于所研究的领域问题，选择一组变量，构成一个线性的评价函数（称为目标函数），在各变量相互关联的许多线性约束条件下，如何寻求一个解（称为最优解）使线性目标函数达到最优（极大值或极小值）。

【例 1-1】　某焊管厂从原料到产品的物流流向如图 1-1 所示。物流分两大部分，一是轧机部分，二是焊机部分。轧机系统由大轧钢机组和小轧钢机组组成。焊机系统由焊管和镀锌管组成。

为了确定各种产品的计划安排，设有 n 种产品，x_j 为第 j 种最终产品的产量（t/年），并要分析环境的约束，建立约束方程，确定计划安排的目标函数。

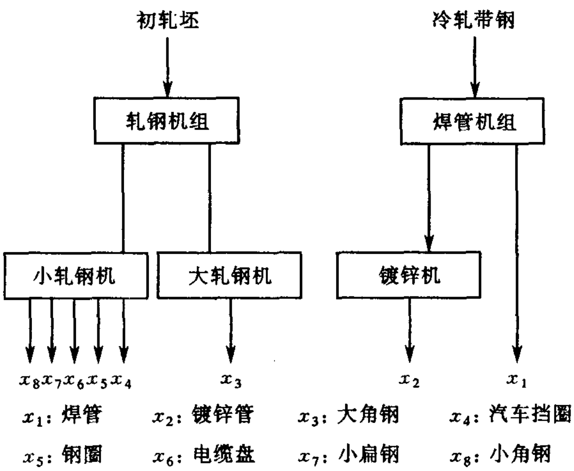


图 1-1　原料到产品的物流流向

① 生产能力约束。设 g_j 为第 j 种产品的生产率，t/h；r_j 为 J 机组的作业率；T 为年日历时间 h；则对第 J 机组有

$$\sum_{j \in J} \frac{x_j}{g_j} = r_j T \qquad J = 1, 2, \cdots$$

② 物流平衡约束。由于供应焊管厂的坯料和冷轧带钢是充分的，可以不用建立其约束关系。对于焊管和镀锌管加工工序，设有如下约束：

$$x_1 \geqslant \alpha x_2$$

式中　α——比例系数。

③ 能源约束。设使用的煤气有限制。若产品 j 的煤气单耗为 q_j，煤气供应上限为 Q，则有

$$\sum_j q_j x_j = Q$$

④ 产品产量约束。应考虑市场等对产品产量的要求，设产品 j 的上、下限为 u_j 和 d_j，则有

$$u_j \geqslant x_j \geqslant d_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

⑤ 设安排产品的目标是使利润最大。可以认为单位产品的利润系数为常数，并设 j 产品的利润系数为 c_j 元/t，则目标函数为

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots = \sum_j c_j x_j$$

这样，可以得到如下线性规划模型：

$$\begin{aligned}
&\max f(\boldsymbol{x}) = \max\left(\sum_j c_j x_j\right)\\
&\text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1\\
&\qquad\qquad \vdots\\
&a_{m1} + a_{m2} + \cdots + a_{mn} \leqslant b_m\\
&u_j \geqslant x_j \geqslant d_j,\ j = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}$$

【例 1-2】　转炉合金计算。

转炉吹炼结束后，用副枪测定吹止温度和碳浓度，并取样分析，得到吹止成分。在钢水向钢包出钢过程中进行合金化，即加入各种铁合金，把钢水从吹止成分调整到目标出钢成分。

转炉合金计算的目的是在钢水合金化中，计算达到目标出钢成分所需的各种合金投入量，并使成本最低。

① 首先计算钢水所要加入的第 i 种元素量 b_i。设需要 C，Si，Mn，Cr 四种元素，则

$$b_i = \frac{F_i - E_i}{\varepsilon_i} G, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

式中　F_i——目标出钢中第 i 种成分，由钢种的制造标准值决定；

E_i——第 i 种吹止元素成分，由取样分析得出；

ε_i——第 i 种元素的收得率，利用各种元素的标准收得率和各炉次实际收得率，进行加权平均得出；

G——目标出钢量（生产计划值）。

② 按钢种要求加入的元素量，计算要求加入的合金。设用七种合金：高碳锰铁、低碳锰铁、高碳铬铁、低碳铬铁、硅铁、硅锰、细粒碳，x_j，$j = 1, \cdots, 7$ 分别为其所需加入量；a_{ij} 为第 j 种合金中第 i 元素的含量的百分比；c_j 为第 j 种合金的单位成本，则可以构成如下线性规划模型：

$$\min f(\boldsymbol{x}) = \min\{c_1 x_1 + \cdots + c_7 x_7\} = \min \sum_j c_j x_j$$

$$\text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{17}x_7 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{27}x_7 = b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{37}x_7 = b_3,$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \cdots + a_{47}x_7 = b_4,$$
$$x_j \leqslant \alpha, \quad j \in l$$
$$x_j \leqslant \beta, \quad j \in m$$
$$x_j \leqslant r, \quad j \in p$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,2,\cdots,7$$

式中　α，β，γ——根据钢种表得出的 l，m，p 品种合金使用的限制量。

【例 1-3】　高炉合理配料。

高炉生产要消耗各种原料、燃料、动力和辅助材料，生产出所要求的铁水，并得到副产品煤气。要求合理配合各种原燃料，使生产费用最小，铁水质量符合要求。

设入炉的原料有烧结矿 x_1、铁矿石 x_2、锰矿 x_3、碎杂铁 x_4、石灰石 x_5、燃料有焦炭 x_6、喷吹煤粉 x_7、富氧 x_8、入炉热风 x_9、冷风量 x_{10}、输出煤气 x_{11}，则可构造如下数学模型：

目标函数：成本最小

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{10}x_{10} - c_{11}x_{11}$$

式中　c_i——各种原、燃料的单位费用。

约束条件：高炉生产条件比较复杂，影响因素很多，下面列出几种：

① 生铁产量。设 a_{1j} 为第 j 种原料的出铁系数，则有

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = \xi_1 w_1$$

式中　w_1——生铁产量；

　　ξ_1——修正系数。

② 炉渣量约束。设 a_{2j} 为第 j 种原料的出渣系数，则有

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 + a_{26}x_6 + a_{27}x_7 = \xi_2 w_2$$

式中　w_2——出渣量；

　　ξ_2——修正系数。

③ 生铁中锰含量约束。设 a_{3j} 为第 j 种原料中的锰含量系数，则有

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leqslant b_1 w_1$$

式中　b_1——生铁中允许锰含量。

④ 生铁中磷含量约束。设 a_{4j} 为第 j 种原料中的磷含量系数，则有

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \leqslant b_2 w_1$$

式中　b_2——生铁中允许磷含量。

⑤ 铁中硫含量约束。类似有

$$a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 + a_{56}x_6 + a_{57}x_7 \leqslant b_3 w_1$$

式中　a_{5j}——第 j 种原料中含硫系数；

　　b_3——生铁中允许含硫量。

其他还有炉渣碱度约束，O_2，H_2，N_2，C 平衡约束；煤气产量约束等。

1.1.2 二维线性规划的几何图解

对于实际问题，所建立的线性规划模型一般有许多变量和约束方程式，需用计算机求解。为了说明线性规划方法的基本概念，这里用二维线性规划问题，从图解法入手，这对于理解一般线性规划问题的求解方法是很有帮助的。

【例 1-4】 设有线性规划模型

$$\min f(\boldsymbol{x}) = -0.4x_1 - 0.3x_2 \tag{1-1a}$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \leqslant 400 \tag{1-1b}$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 500 \tag{1-1c}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0 \tag{1-1d}$$

求最优解(最优解决策方案)。

① 找出满足约束条件的区域。如图 1-2 所示，横坐标为 x_1，纵坐标为 x_2。AB 线左侧表示式(1-1b)约束；BC 线下侧表示式(1-1c)约束，纵坐标右侧和横坐标上侧表示式(1-1d)约束。所以第一象限的 $ABCO$ 多边形包含的区域是同时满足约束方程(1-1a)~(1-1d)的区域，这称为该线性规划问题的可行域 X，在可行域中的每一个解都是一个可行解(可行方案)，X 是可行解(可行方案)的集合。

② 确定最优解。求解该线性规划，就是在可行域 X 中找出使目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 取极小值的点。

目标函数 $f(\boldsymbol{x}) = -0.4x_1 - 0.3x_2$ 是 x_1 和 x_2 的线性函数，当为 $f(\boldsymbol{x})$ 取不同数值时，它代表一簇平行的直线，称为等值线。例如，$f(\boldsymbol{x}) = 0 = -0.4x_1 - 0.3x_2$ 是一条通过原点的直线。在任一点的目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的梯度为

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = (-0.4,\ -0.3),$$

是目标函数在该点的最速上升方向，而

$$-\nabla f(\boldsymbol{x}) = (0.4,\ 0.3)$$

是最速下降方向，如图 1-2 所示。使 $f(\boldsymbol{x})$ 在可行域 X 中沿最速下降方向移动到可行域的边界(B 点)，即得到使 $f(\boldsymbol{x})$ 取极小值的点。

在 B 点：$\hat{x}_1 = 100$，$\hat{x}_2 = 300$ 是本题的最优解，目标函数的极小值时 $f(\hat{\boldsymbol{x}}) = -130$。

由以上两变量的几何图形法，可以直观地得出如下结论：

① 线性规划的可行域是凸多边形。

② 最优解在可行域的顶点(以后称为极点)，有时可能在可行域的某条边上，后者称为多重最优解。

例如，在例 1-4 中，如约束条件不变，而目标函数变为

$$f(\boldsymbol{x}) = -0.4x_1 - 0.2x_2$$

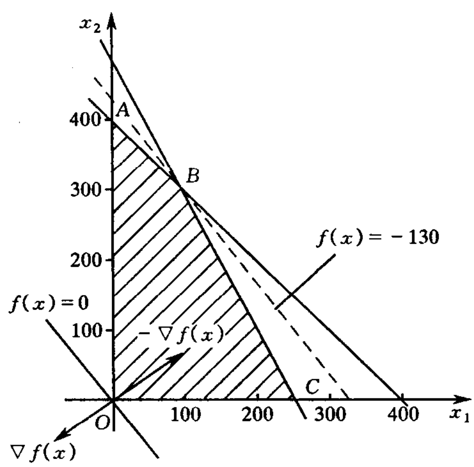


图 1-2 线性规划问题的可行域

则目标函数的系数与约束式(1-1c)的系数成比例，即目标函数的等值线与 BC 直线平行，故在 BC 直线上的解均为最优解。

③ 如果约束条件设置不合理，则会出现无可行解。例如，在例 1-4 中增加一个满足约束

$$x_1 \geqslant 400 \tag{1-2}$$

满足式(1-1)的约束，要求在 X_1 区域内，而满足式(1-2)，要求在 X_2 区域内(如图 1-3 所示)，但 X_1 和 X_2 没有相交部分，即没有解能同时满足 X_1 和 X_2 的约束，即没有可行域，故问题无可行解。

④ 如果约束条件所确定的可行域 X 如图 1-4 所示，而目标函数仍如例 1-4，由于可行域无界，$f(\boldsymbol{x})$沿最速下降方向可以无限减小，这时问题有无界解。

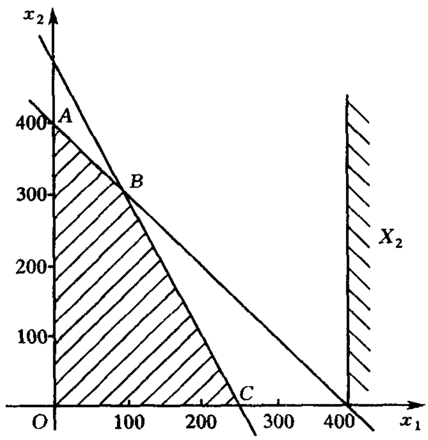


图 1-3　无可行解的情况

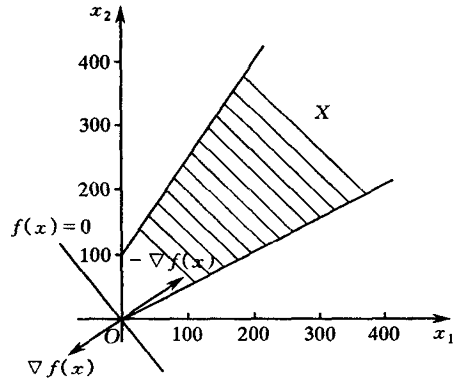


图 1-4　可行域无界的情况

1.1.3　线性规划的标准形式

(1) 线性规划的标准形式

选择一组决策变量 x_1，x_2，…，x_n，使目标函数

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1-3a}$$

为极小值。约束条件是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \qquad i = 1,2,\cdots, m \tag{1-3b}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{1-3c}$$

写成矩阵形式，为

$$\text{LP} \qquad \min f(\boldsymbol{x}) = \min \boldsymbol{cx} \tag{1-4a}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1-4b}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant 0 \tag{1-4c}$$

式中　$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$是 $m \times n$ 维系数矩阵；

$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$是 n 维行向量；

$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维列向量；

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量。

在一般情况下，我们讨论的是有可行解，而且不止一个可行解的情况。如果无可行解和只有一个可行解，就不存在最优化问题了。

实际问题中的约束条件多是“≤”或“≥”的形式，为了统一使用等式约束，就要进行处理。

1）引入松弛变量

对于“≤”的约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$$

引入所谓松弛变量 x_{n+j}，约束条件变成

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geqslant 0$$

2）引入剩余变量和人工变量

对于“≥”的约束条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i$$

引入所谓剩余变量 x_{n+i}，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geqslant 0$$

关于人工变量，将在 1.4 节讨论。

3）对于 $x \geqslant 0$ 的处理

如果问题中某一变量 x_k 无非负限制，则可引入辅助变量 x_k' 和 x''_k，令

$$x_k = x_k' - x_k'', \qquad x_k', \; x_k'' \geqslant 0$$

实际问题中，如果需要求极大值 $\max f(\boldsymbol{x})$，它可以化为求极小值问题

$$\min\{-f(\boldsymbol{x})\} = \min\{-\boldsymbol{cx}\}$$

(2) 基本定义

先介绍几个基本定义。

1）可行解

考虑线性规划问题 LP 的约束条件：

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \tag{1-5a}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \tag{1-6b}$$

满足约束条件(1-5)的线性规划问题的解，称为可行解。

2）基本矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，将 $\boldsymbol{A}$ 分解为

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \; \boldsymbol{N}] \tag{1-6}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为 m 列组成的非奇异矩阵，称为基本矩阵。因为假设问题有解，故 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个基本矩阵，简称基阵。

3）基本解

将 $\boldsymbol{x}$ 相应分解为 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_D \end{bmatrix}$，则约束可写成

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_D = \boldsymbol{b} \tag{1-7a}$$

$$x_B \geqslant 0, \quad x_D \geqslant 0 \tag{1-7b}$$

如果 $\boldsymbol{B}$ 是基本矩阵，则其逆存在，由(1-7a)得

$$x_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}x_D = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1-8}$$

当 $x_D = 0$ 时，$x_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，这称为基本解。相应地，$x_B$ 称为基本变量，x_D 称为非基本变量。

4) 基本可行解

基本解中，所有变量均满足非负约束的解，即

$$x_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0, \quad x_D = 0 \tag{1-9}$$

称为基本可行解。

5) 非退化的基本可行解

如果基本可行解的正分量 $x_f \geqslant 0$ 的个数为 m，则称之为非退化的基本可行解，否则称为退化基本可行解。

6) 最优解

使目标函数 $f(x)$ 为极小值的基本可行解，称为最优解。

1.2　单纯形法求解

单纯形法求解策略是：从一个已知的基本可行解出发，寻求使目标函数有较大下降的另一个基本可行解；因为基本解的个数是有限的，所以经过有限次迭代，一定能找到最优解。

为此，必须解决如下问题：

a. 如何确定初始的基本可行解；

b. 怎样由已知的基本可行解进行基本变量变换(简称换基)，才能得到一个改进的基本解使目标函数有较大的改进；

c. 按什么原则能保证所得到的新的基本解是可行的。

下面结合例 1-4 介绍单纯形法的解题步骤。

(1) 变成标准型

在约束方程中引入变量 x_3 和 x_4，使“$\leqslant$”不等式方程变为等式方程，于是得到标准形式(“$\geqslant$”、“=”约束方程在 1.4 节讨论)：

$$\min f(x) = -0.4x_1 - 0.3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \tag{1-10a}$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_x + x_3 = 400 \tag{1-10b}$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 500 \tag{1-10c}$$

$$x_j \geqslant 0 \quad j = 1, 2, 3, 4 \tag{1-10d}$$

(2) 确定初始基本可行解

对于“$\leqslant$”不等式约束方程组，在引入松弛变量的同时，就提供了一个初始基本可行解。例如将式(1-10)的约束方程写成向量形式为

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x_2 + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}x_3 + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}x_4 = \begin{pmatrix}400\\500\end{pmatrix}$$

并选基本矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，基本变量 $x_B = (x_3, x_4)^{\mathrm{T}}$，非基本矩阵 $\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$，非基本变量 $x_D = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$，并令 $x_D = 0$，则初始基本可行解为