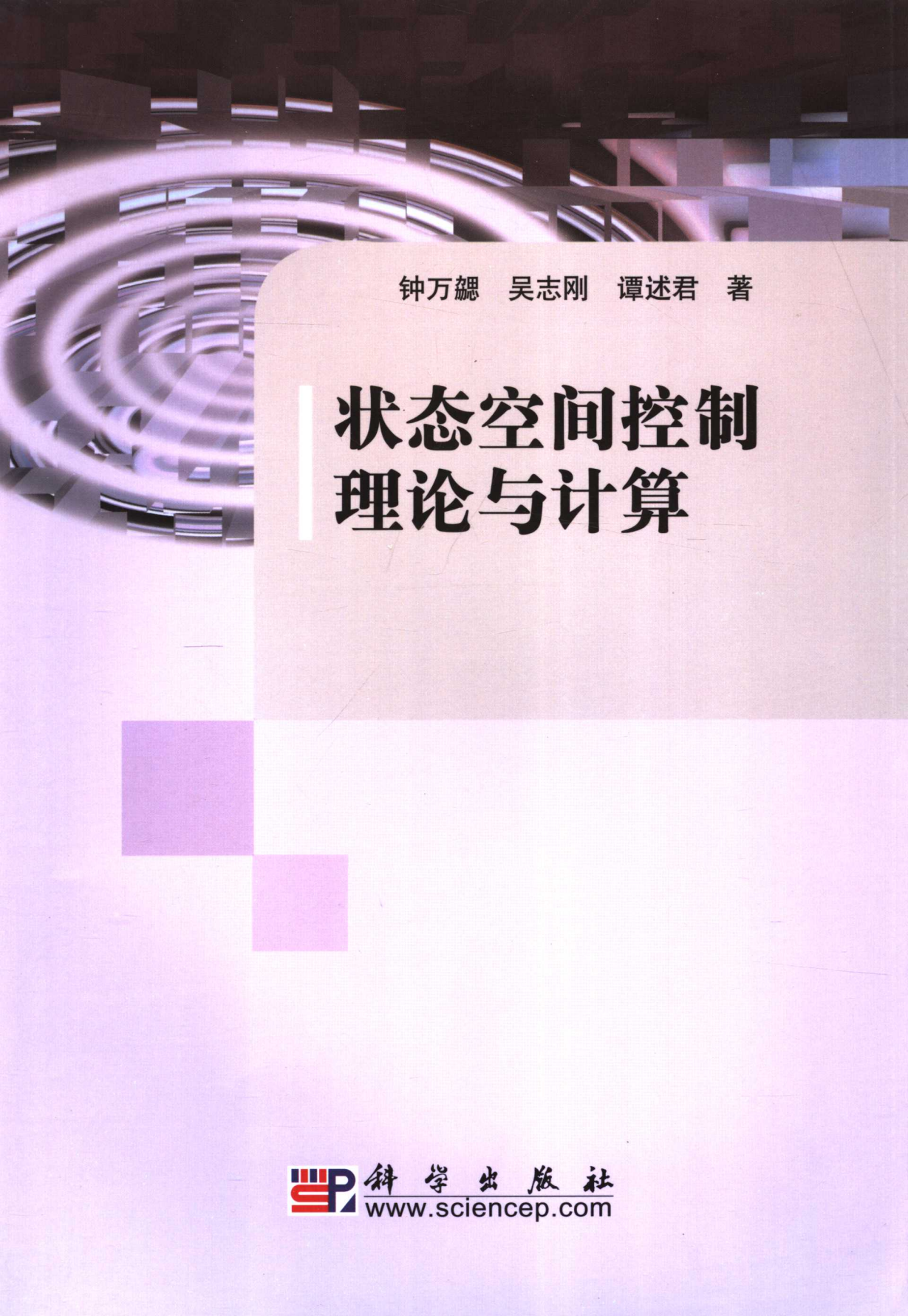




钟万勰 吴志刚 谭述君 著

状态空间控制 理论与计算

 科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

状态空间控制理论与结构力学模拟关系的数学基础是 Hamilton 理论体系,在这个体系下,二者的成果可以交叉运用.全书分为两部分:第一部分是对状态控制线性体系理论的求解,将结构力学中成熟的区段合并消元、子结构分析等技术结合精细积分法几乎可以求得最优控制、滤波、 H_∞ 范数等问题的精确解;第二部分讨论时变、非线性最优控制的保辛摄动近似求解,并将模拟理论进一步应用到饱和控制和分散控制等问题的求解.以精细积分方法贯穿全书是本书的一大特色.

本书可作为高等院校力学与自动控制专业高年级本科生和研究生教材,也可供航空、航天、机械工程等相关领域的科研人员参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

状态空间控制理论与计算/钟万勰,吴志刚,谭述君著. —北京:科学出版社, 2007

ISBN 978-7-03-019195-3

I. 状… II. ①钟… ②吴… ③谭… III. 控制论 IV. 0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 091700 号

责任编辑:吕虹 赵彦超/责任校对:曾茹

责任印制:赵德静/封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2007 年 8 月第一次印刷 印张: 23 3/4

印数: 1—3 000 字数: 439 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

中行独复，以从道也。

——《易经·复卦·六四》

序 言

2005年6月3日，胡锦涛同志在中国科学院成立50周年座谈会上提出三点要求：“一是要进一步确立自主创新战略目标；二是要进一步加强国家自主创新体系建设；三是要进一步造就自主创新的人才队伍。”2006年1月9日，在科技大会上又指出：“自主创新能力是国家竞争力的核心……特别是在关系到国民经济命脉和国家安全的关键领域，真正的核心技术、关键技术是买不来的，必须靠自主创新。要把提高自主创新能力摆在全部科技工作的首位……”

航空航天是世界科技的前沿。20世纪90年代以来的历次战争表明，美军称霸全球，战争主导方是在超视距下进行打击的，对手几乎没有还手之力，信息、控制是导航与精确打击的关键。中国的崛起面临发展科技的强烈需求，面对禁运，方知核心高科技无法引进，高精度控制就不能进口，只有独立自主，自力更生，方能具备。“宜未雨而绸缪、毋临渴而掘井”，古有明训。感谢当年自力更生，艰苦奋斗的两弹一星，方有今日六方会谈的潇洒。

现代控制论所奠基的状态空间法的起点至少也应回溯到Hamilton正则方程体系。控制与力学本为一体，但控制理论已很少在工程力学课程中讲授了。两方面的理论体系与方法各有一套，学科交叉很不够。世界正在走向“灵巧”(smart)，而力学如不与控制理论相衔接，又何能“灵巧”。

经典分析力学是力学最根本的体系，也是优美的数学理论体系。Hamilton正则方程体系则是辛对偶变量、辛对偶方程的体系。近年来发展的分析结构力学与有限元，对控制理论同样有用。对非线性控制问题，有限元等离散方法是必须的。数值方法的需要则暴露了传统经典分析力学的局限性：

- 经典动力学奠基基于连续时间系统，但应用力学有限元、控制与信号处理等需要离散系统；
- 动力学总是考虑同一个时间的位移向量，但应用力学有限元需要考虑不同时间的位移向量；
- 动力学要求体系的维数自始至终不变，但应用力学有限元需要变动的维数；

- 经典动力学认为物性是即时响应的,但时间滞后是常见的物性,例如黏弹性、控制理论等.

分析结构力学是分析力学的一个新层次,由于紧密结合实际课题,发展前途是广阔的.尤其这是我国自己开辟的园地.“行成于思,毁于随”.随了多少年了,岂能总是随,该走自己的路了.

“科学计算已经同理论与实验共同构成当代科学研究的三大支柱”.2005年6月,美国总统信息顾问委员会(President's Information Technology Advisory Committee, PITAC)提供的报告“计算科学——保证美国的竞争力”,也强调指出了“计算科学已经成为与理论和物理实验同等的科学事业的第三根支柱”.

应用需要数值结果.为了加深理解,本书尽量给出有关的算法与简单程序.充分发挥计算能力也是道.计算力学已是力学中最活跃的部分之一,是力学通向应用的桥梁.控制也必须计算方能通向应用,计算当然要莫基于理论的推进,反之,计算也给理论与应用做出许多推进.最优控制的理论给出了保守体系,故其各种近似分析皆应注意保辛.精细积分法既用于初值问题,又用于两端边值问题的积分.对于动力方程以及控制理论中的 Riccati 方程、椭圆函数等,精细积分都给出了几乎是计算机上的精确解.各种精细积分算法与辛本征问题的算法,是本书的另一个特点.在线性定常系统精细积分求解的基础上,本书又就时变非线性、时滞、饱和控制、自适应滤波以及分散控制等课题,分别进行了分析与计算的研讨.

全书包括正文14章及1篇附录,其中第1~6章由钟万勰撰写,第7章由钟万勰、吴志刚、谭述君撰写,第8章和第9章根据谭述君等的工作改写,第10章由吴志刚和谭述君撰写,第11章根据吴志刚和谭述君等的工作改写,第12章根据毛翎、张洪武和吴志刚等的工作改写,第13章和第14章根据吴志刚、高强等的工作改写.附录由谭述君和钟万勰撰写.全书由钟万勰、吴志刚、谭述君统稿.

本书强调走自己的路,发展辛体系.挑战传统,不可能成熟,尚祈有志同仁不吝赐教.

感谢自然科学基金(#10632030, #10421002, #10202004)及国家重点基础研究专项经费(#973-2005CB32170X)的支持.

钟万勰

2006年9月17日

一阴一阳之谓道.

——《易经·系辞》

目 录

绪论	1
0.1 齐次常微分方程与矩阵指数的计算	4
0.2 非齐次常微分方程	6
0.3 精度分析	7
0.4 关于时变系统与非线性系统的讨论	8
参考文献	9
第1章 分析动力学与分析结构力学	11
1.1 单自由度弹簧-质量系统的振动	11
1.1.1 Lagrange 体系的表述	12
1.1.2 Hamilton 体系的表述	13
1.1.3 Hamilton 对偶方程的辛表述	14
1.1.4 单自由度系统的作用量	15
1.1.5 单自由度线性系统的 Hamilton-Jacobi 方程及求解	16
1.1.6 通过 Riccati 微分方程的求解	17
1.1.7 Hamilton 体系的另一种推导	18
1.2 一维杆件的拉伸分析	18
1.2.1 Lagrange 体系的表述及最小总势能原理	19
1.2.2 Hamilton 体系的表述	20
1.2.3 对偶方程的辛表述	21
1.2.4 作用量	22
1.2.5 Hamilton-Jacobi 方程的求解	23
1.2.6 通过 Riccati 微分方程的求解	25
1.2.7 拉杆的有限元模型	26
1.2.8 Lagrange 括号	27
1.2.9 区段混合能及其偏微分方程	29
1.2.10 一维波传播问题	31
1.3 若干有关的一维课题	32
1.3.1 最小二乘法简介	32
1.3.2 离散坐标动力学的模型, Brown 运动	34

1.3.3 离散时间的 Kalman 滤波	36
1.3.4 一维预测模型	39
1.4 多自由度振动系统的求解	40
1.4.1 分离变量法, 本征问题	42
1.4.2 分析力学的推导	45
1.4.3 定常系统	46
1.5 Timoshenko 梁理论	46
1.6 分析结构力学	51
1.6.1 离散坐标的表述	52
1.6.2 等维数体系的 Poisson 括号与 Lagrange 括号	53
1.6.3 连续坐标的表述	58
1.7 正则变换的生成函数描述及辛描述	59
1.7.1 正则变换的生成函数描述	60
1.7.2 正则变换的辛描述	63
1.8 定常系统	65
1.8.1 定常线性系统的分离变量	66
1.8.2 Riccati 微分方程	67
1.9 结构力学有限元与保辛	69
1.9.1 变分原理与正则变换	69
1.9.2 区段混合能的偏微分方程	72
1.9.3 区段混合能系数矩阵的微分方程组, Riccati 微分方程	73
1.9.4 有限元离散系统与保辛	74
1.9.5 离散链式结构的传递求解	74
1.9.6 不同维数的体系	76
参考文献	77
第 2 章 状态空间控制理论	78
2.1 线性系统的状态空间描述	78
2.1.1 系统的输入-输出描述与状态空间描述	79
2.1.2 单输入-单输出系统的状态空间描述	83
2.1.3 线性定常系统的积分	85
2.1.4 频域分析	88
2.1.5 线性定常系统的可控性与可观测性	88
2.1.6 线性变换	91

2.1.7 传递函数的状态空间实现	92
2.1.8 对偶原理	93
2.1.9 离散时间控制	94
2.2 稳定性理论	95
2.2.1 Liapunov 意义下的运动稳定性	96
2.2.2 Liapunov 稳定性分析	97
参考文献	98
第 3 章 状态估计与预测	100
3.1 状态最优估计的三类问题	100
3.2 预测及其精细积分	102
3.2.1 预测问题的数学模型	103
3.2.2 单自由度系统的预测	104
3.2.3 多自由度系统的预测	106
3.2.4 时程精细积分	107
3.2.5 Liapunov 方程的精细积分	111
参考文献	118
第 4 章 Kalman 滤波	119
4.1 线性估计问题的提法	119
4.1.1 离散时间滤波模型	120
4.1.2 连续时间滤波模型	120
4.2 离散时间线性系统的 Kalman 滤波	121
4.3 连续时间线性系统的 Kalman-Bucy 滤波	124
4.4 区段混合能	128
4.4.1 区段合并消元	129
4.4.2 区段矩阵及区段向量的微分方程	131
4.4.3 Riccati 方程解的物理意义	134
4.5 Riccati 微分方程的精细积分	135
4.6 Riccati 微分方程的分析解	139
4.7 单步长滤波微分方程的求解	141
4.7.1 滤波方程的分析法及单步长积分	144
4.7.2 单步长积分的计算公式	148
4.7.3 精细步长滤波的 Taylor 展开	150
4.7.4 单步长内的区段合并	153

4.7.5 滤波方程的全程积分	156
4.7.6 数值算例	158
参考文献	161
第5章 最优平滑	162
5.1 连续时间线性系统的最优平滑	163
5.2 区段混合能法及平滑解的微分方程	165
5.3 区段混合回代求解——平滑均值及其均方差阵的算式	169
5.4 三种平滑的算法	172
5.4.1 固定区间平滑	172
5.4.2 固定点平滑	173
5.4.3 固定滞后平滑	173
参考文献	174
第6章 最优控制	175
6.1 未来时段线性二次最优控制理论	175
6.2 稳定性分析	179
6.2.1 可控性与可测性的 Gram 矩阵	179
6.2.2 Riccati 矩阵的正定性	181
6.2.3 稳定性分析	184
6.3 线性二次最优控制的计算	186
6.3.1 Riccati 微分方程的求解	187
6.3.2 状态微分方程的积分	188
6.4 量测反馈最优控制	189
参考文献	190
第7章 H_∞ 鲁棒控制	191
7.1 鲁棒控制简介	191
7.2 H_∞ 状态反馈控制	193
7.2.1 扩展 Rayleigh 商	196
7.2.2 区段混合能	197
7.2.3 精细积分	200
7.2.4 算法	201
7.3 H_∞ 鲁棒滤波	204
7.3.1 对偶方程的求解	208
7.3.2 扩展 Rayleigh 商	208

7.3.3 区段混合能	210
7.3.4 精细积分	212
7.3.5 算法	213
7.4 整个时段量测反馈控制的综合变分原理	214
7.4.1 扩展 Rayleigh 商	216
7.4.2 状态估计的方差阵	216
7.4.3 算法	217
7.5 参数 γ 对 H_∞ 控制系统动态特性的影响	219
7.5.1 参数 γ 对控制系统初始扰动响应的影响	222
7.5.2 参数 γ 对控制系统持续干扰抑制效果的影响	223
7.5.3 参数 γ 对控制系统 H_2 范数的影响	224
7.6 进一步的考虑	224
参考文献	225
第 8 章 线性时变控制系统的保辛摄动求解	226
8.1 基本方程	226
8.2 基于区段混合能的求解方法	228
8.2.1 区段混合能求解理论	228
8.2.2 混合能矩阵的保辛摄动	230
8.2.3 算法设计与分析	234
8.3 基于传递矩阵的求解方法	234
8.3.1 传递矩阵求解理论	235
8.3.2 传递矩阵的保辛摄动	235
8.4 区段混合能方法和传递矩阵方法之间的联系	236
8.5 数值算例	237
8.6 时变系统预测问题的保辛积分	241
参考文献	243
第 9 章 非线性最优控制系统的保辛摄动求解	244
9.1 基本方程	244
9.2 迭代方程的构造	245
9.3 基于区段混合能的保辛摄动方法	247
9.3.1 区段混合能求解方法	247
9.3.2 保辛摄动	249
9.4 数值算例	252

参考文献	256
第 10 章 离散系统分析与控制	257
10.1 线性连续系统的精细离散化	257
10.2 离散系统线性二次最优控制	261
10.3 离散系统的 H_∞ 控制	264
参考文献	275
第 11 章 时滞系统最优控制	277
11.1 连续时间的时滞系统	277
11.2 离散时间的一维时滞系统	278
11.2.1 线性二次最优控制	279
11.2.2 时滞 Kalman 滤波	280
11.2.3 量测反馈最优控制	281
11.2.4 一般时滞系统的处理	281
11.3 多维时滞控制系统	282
11.3.1 多维时滞系统的线性二次最优控制	283
11.3.2 连续时滞控制系统的离散	284
11.4 离散方法的数值检验	288
11.5 时滞系统的 H_∞ 控制和滤波	292
11.5.1 时滞系统的 H_∞ 全信息控制	293
11.5.2 时滞系统的 H_∞ 滤波	295
参考文献	300
第 12 章 输入饱和系统的非线性最优控制	301
12.1 问题描述	301
12.2 标准的二次规划问题	302
12.2.1 线性互补问题及 Lemke 算法	303
12.2.2 自由设计变量的二次规划问题	303
12.3 参变量变分原理与对偶方程	304
12.4 离散时间最优控制的饱和分析	307
12.5 对偶方程求解和二次规划	308
12.6 容许控制变量空间为封闭凸曲面的情况	310
参考文献	311
第 13 章 系统的自适应滤波与参数估计	312
13.1 参数识别问题的提法	313
13.2 参数识别的递推计算	315

13.3 区段混合能矩阵	318
13.4 数值算例	319
参考文献	323
第 14 章 大系统的 H_∞ 分散控制	324
14.1 大系统 H_∞ 分散控制的模型	324
14.2 子系统 H_∞ 控制的本征解与广义 Rayleigh 商	326
14.3 Riccati 微分方程的精细积分及全部本征解	328
14.4 本征解的正交归一及展开定理	329
14.5 最优参数的计算——模态综合	331
14.6 数值例题	334
参考文献	336
附录 A 发展基于精细积分的（最优）控制系统程序库	338
A.1 线性二次（LQ）最优控制	339
A.1.1 定常控制器的情形	341
A.1.2 时变控制器的情形	342
A.1.3 变性能指标设计	346
A.2 Kalman-Bucy 滤波微分方程的求解	347
A.2.1 定常滤波器的情形	348
A.2.2 时变滤波器的情形	349
A.3 连续控制系统的离散化	351
A.4 总结	354
参考文献	355
附录 B 精细积分方法的 MATLAB 程序示例	356
结束语	357

Contents

Introduction	1
0.1 Homogeneous ODE and computation of matrix exponential	4
0.2 Inhomogeneous ODE	6
0.3 Precision analysis	7
0.4 Discussions on time-variant and non-linear systems	8
References	9
Chapter 1 Introduction to analytical dynamics and analytical structural mechanics	11
1.1 Vibration of a SDOF mass-spring system	11
1.1.1 Description in the Lagrange system	12
1.1.2 Description in the Hamilton system	13
1.1.3 Symplectic description via the Hamilton duality equations	14
1.1.4 Action function of a SDOF system	15
1.1.5 Hamilton-Jacobi equation and the solution of a SDOF system	16
1.1.6 Solution via the Riccati differential equation	17
1.1.7 Alternative derivation by means of the Hamilton system	18
1.2 Extension analysis of a rod in one dimension	18
1.2.1 Description in the Lagrange system, the principle of minimum potential energy	19
1.2.2 Description in the Hamilton system	20
1.2.3 Symplectic description via the duality equations	21
1.2.4 Action function	22
1.2.5 Solution of the Hamilton-Jacobi equation	23
1.2.6 Solution via the Riccati differential equation	25
1.2.7 Finite element model of a rod	26
1.2.8 Lagrange bracket	27
1.2.9 Interval mixed energy and its PDE	29
1.2.10 One-dimensional wave propagation equation	31
1.3 Some related problems in one dimension	32
1.3.1 Introduction of the least square method	32

1.3.2	Discrete-time dynamic model, the Brown motion	34
1.3.3	Discrete-time Kalman filtering	36
1.3.4	One-dimensional model for prediction	39
1.4	Solution of a MDOF system	40
1.4.1	Method of separation of variables, eigenvalue problem	42
1.4.2	Derivation via the analytical mechanics theory	45
1.4.3	Time-invariant systems	46
1.5	Timoshenko beam theory	46
1.6	Analytical structural mechanics	51
1.6.1	Description in discrete coordinates	52
1.6.2	Homogeneous dimensional systems, Poisson bracket and Lagrange bracket	53
1.6.3	Description in continuous coordinates	58
1.7	Symplectic description and generating function description of canonical transformation	59
1.7.1	Generating function description of canonical transformation	60
1.7.2	Symplectic description of canonical transformation	63
1.8	Time-invariant systems	65
1.8.1	Separation of variables for a time-invariant system	66
1.8.2	The Riccati differential equation	67
1.9	Structural mechanics, finite element and conservation of symplecticness	69
1.9.1	Variational principles and canonical transformation	69
1.9.2	PDE of interval mixed energy	72
1.9.3	ODEs of the coefficient matrices of interval mixed energy, Riccati differential equation	73
1.9.4	Finite element discretized systems and conservation of symplecticness	74
1.9.5	Transfer solution for a discrete chain structure	74
1.9.6	Systems with inhomogeneous dimensions	76
	References	77
Chapter 2	State space control theory	78
2.1	State space description of linear systems	78
2.1.1	Input-output description and state space description	79

2.1.2	State space description of SISO system	83
2.1.3	Integration of linear time-invariant systems	85
2.1.4	Frequency domain analysis	88
2.1.5	Controllability and observability of linear time-invariant systems	88
2.1.6	Linear transformation	91
2.1.7	State space realization of transfer functions	92
2.1.8	Duality principle	93
2.1.9	Discrete-time control	94
2.2	Stability theory	95
2.2.1	Liapunov motion stability	96
2.2.2	Analysis of Liapunov stability	97
	References	98
Chapter 3	State estimation and prediction	100
3.1	Three problems of state estimation theory	100
3.2	Prediction and its precise integration method	102
3.2.1	Mathematical model for prediction	103
3.2.2	Prediction of SDOF systems	104
3.2.3	Prediction of MDOF systems	106
3.2.4	Precise time step integration	107
3.2.5	Precise integration of Liapunov equation	111
	References	118
Chapter 4	Kalman filtering	119
4.1	Introduction of linear state estimation	119
4.1.1	Discrete-time filtering model	120
4.1.2	Continuous-time filtering model	120
4.2	Kalman filtering of discrete-time linear systems	121
4.3	Kalman-Bucy filtering of continuous-time linear systems	124
4.4	Interval mixed energy	128
4.4.1	Interval combination	129
4.4.2	ODEs of the coefficient matrices and vectors of interval mixed energy	131
4.4.3	Physical significance of solution to Riccati equation	134
4.5	Precise integration method for Riccati differential equation	135
4.6	Analytical solution of Riccati differential equation	139

4.7	Single step solution of filtering differential equation	141
4.7.1	Analytical solution of filtering equation and single step integration	144
4.7.2	Algorithm for single step integration	148
4.7.3	Taylor series expansion for single step filtering	150
4.7.4	Interval combination in single step	153
4.7.5	Integration of filtering equation	156
4.7.6	Numerical examples	158
	References	161
Chapter 5	Optimal smoothing	162
5.1	Optimal smoothing of linear continuous-time systems	163
5.2	Interval mixed energy for smoothing differential equation	165
5.3	Algorithm for mean value and variance matrix computation	169
5.4	Three smoothing algorithms	172
5.4.1	Fixed-interval smoothing	172
5.4.2	Fixed-point smoothing	173
5.4.3	Fixed-lag smoothing	173
	References	174
Chapter 6	Optimal control	175
6.1	Linear quadratic optimal control of future time	175
6.2	Stability analysis	179
6.2.1	Controllability and Observability Gram matrix	179
6.2.2	Positive definiteness of Riccati matrix	181
6.2.3	Stability analysis	184
6.3	Computation for linear quadratic optimal control	186
6.3.1	Solution of Riccati differential equation	187
6.3.2	Integration of state differential equation	188
6.4	Measurement feedback optimal control	189
	References	190
Chapter 7	H_∞ robust control	191
7.1	Introduction of robust control	191
7.2	H_∞ state feedback control	193
7.2.1	Extended Rayleigh quotient	196
7.2.2	Interval mixed energy	197
7.2.3	Precise integration method	200

7.2.4	Algorithm	201
7.3	H_∞ robust filtering	204
7.3.1	Dual equation	208
7.3.2	Extended Rayleigh quotient	208
7.3.3	Interval mixed energy	210
7.3.4	Precise integration method	212
7.3.5	Algorithm	213
7.4	Variational principle for measurement feedback control	214
7.4.1	Extended Rayleigh quotient	216
7.4.2	Variance matrix of state estimation	216
7.4.3	Algorithm	217
7.5	Parameter γ 's influence on dynamic characteristics of H_∞ control systems	219
7.5.1	Influence on systems response to initial disturbance	222
7.5.2	Influence on systems response to persistent disturbance	223
7.5.3	Influence on systems H_2 norm	224
7.6	Further consideration	224
	References	225
Chapter 8	Solution for linear time-varying systems by symplectic conserva- tive perturbation method	226
8.1	Basic equations	226
8.2	Algorithm based on interval mixed energy	228
8.2.1	Interval mixed energy theory	228
8.2.2	Symplectic conservative perturbation of mixed energy matrices	230
8.2.3	Algorithm	234
8.3	Algorithm based on transition matrix	234
8.3.1	Transition matrix theory	235
8.3.2	Symplectic conservative perturbation of transition matrix	235
8.4	Relations between interval mixed energy and transition matrix	236
8.5	Numerical examples	237
8.6	Symplectic conservative integration for prediction of time-variant systems	241
	References	243
Chapter 9	Solution for nonlinear optimal control systems by symplectic conservative perturbation method	244
9.1	Basic equations	244

9.2	Iterative equations	245
9.3	Symplectic conservative perturbation method based on interval mixed energy theory	247
9.3.1	Interval mixed energy theory	247
9.3.2	Symplectic conservative perturbation	250
9.4	Numerical examples	252
	References	256
Chapter 10	Analysis and control of discrete time systems	257
10.1	Precise discretization of linear continuous time systems	257
10.2	Linear quadratic control of discrete time systems	261
10.3	H_∞ control of discrete time systems	264
	References	275
Chapter 11	Optimal control of time-delay systems	277
11.1	Continuous time-delay systems	277
11.2	One-dimensional discrete time-delay systems	278
11.2.1	Linear quadratic optimal control	279
11.2.2	Kalman filtering for time-delay systems	280
11.2.3	Measurement feedback optimal control	281
11.2.4	General time-delay systems	281
11.3	Multi-dimensional time-delay systems	282
11.3.1	Linear quadratic optimal control of multi-dimension time-delay systems	283
11.3.2	Discretization of continuous time-delay systems	284
11.4	Numerical test of discretization method	288
11.5	H_∞ control and filtering of time-delay systems	292
11.5.1	H_∞ full information control of time-delay systems	293
11.5.2	H_∞ filtering of time-delay systems	295
	References	300
Chapter 12	Nonlinear optimal control of systems with input-saturation	301
12.1	Introduction	301
12.2	Standard quadratic programming	302
12.2.1	LCP and Lemke algorithm	303
12.2.2	Quadratic programming with free variables	303
12.3	Parametric variational principle and dual equation	304
12.4	Saturation analysis of discrete time optimal control	307
12.5	Solution of dual equation and quadratic programming	308