高校经典教材同步辅导

配套同济大学应用数学系主编的《微积分》

九章丛书

微积分

高教第二版

辅导及习题全解

下册

主编/孙怀东 杨富云

编写/九章系列课题组

■知识点窍 ■逻辑推理

■习题全解 ■全真考题

■名师执笔 ■题型归类

新版

人民日报出版社

高校经典教材同步辅导

微积分辅导及习题全解

（高教第二版·下册）

主编 孙怀东 杨富云

主审 [illegible] 杨

编写 九章系列[illegible]题组

赵志新 [illegible] 续

王 阳 [illegible] 伟

人民日报出版社

图书在版编目(CIP)数据

高校经典教材同步辅导·微积分(高教第二版·下册)/孙怀东,杨富云主编.—北京:人民日报出版社,2004.4

ISBN 7-80153-865-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①孙…②杨… Ⅲ.高校—教学参考资料

Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第030532号

高校经典教材同步辅导·微积分(高教第二版·下册)

主　　编:孙怀东　杨富云

责任编辑:安　申

封面设计:伍克润

出版发行:人民日报出版社(北京金台西路2号/邮编:100733)

经　　销:新华书店

印　　刷:北京顺天意印刷有限公司

字　　数:358千字

开　　本:787×960　1/16

印　　张:21.75

印　　数:3000

印　　次:2005年8月第1次印刷

书　　号:ISBN 7-80153-865-X/G·479

定　　价:23.80元(全五册·128.00元)

前　　言

本书是与同济大学应用数学系编写的“十五”国家级规划教材《微积分》(第二版)配套的学习辅导书。

《微积分》作为高等数学的重要组成的部分，是理工科学生必修的一门重要基础课，也是许多专业研究生入学考试的必考科目。微积分中的概念复杂多样，从基础的变量、函数和极限到复杂的导数、微分和积分，形成了一个无比精美的庞大系统，这个系统不仅内容丰富，更重要的是结构严密，无懈可击。作为进入大学阶段学习的第一门高等数学课程，许多同学在学习过程中感到微积分抽象、难懂，对基本概念以及定理结论在理解上感到困难，具体解题时，缺乏思路，难以下手。本辅导书旨在帮助广大同学更好地掌握微积分的基本概念和基本理论，综合运用各种解题的技巧和方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书主要有如下几个部分组成：

1. **基本要求**。结合每年考研大纲的要求，分别对各章知识点做了简练的概括，使读者在各章的学习过程中目标明确，有的放矢。

2. **内容提要**。阐述每一章中重要的性质定理、公式及结论，并对一些难于理解但又是大纲所要求的考研常涉及到的内容进行了详细的解释和归纳。目的是使学生用分析和提炼的方法去学习课本，掌握知识。

3. **本章知识网络图**。每章的知识网络图系统全面的涵盖了本章的知识点，使学生能一目了然地浏览本章内容框架结构，全面把握教材的理论体系。

4. **典型例题解析**。本书尽可能归纳了该课程所涉及的重要题型，这些题型都是在对历年考试和考研所涉及的题型进行深入分析后总结出来的，具有一定的代表性。

5. **课后习题全解**。教材中课后习题丰富、层次多样，许多基础性问题从多个角度帮助学生理解基本概念和基本理论，促其掌握基本解题方法。我们对教材课后的全部习题给了详细的解答。

6. **实验题解答**。鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，教材中编写了14个数学实验。我们对这些实验题给出了详细的解答和说明。由于思想的不同，实验题还有其他更好的解答，我们只是提供了一种参考解答，全书的实验题解答单列在本书的最后。

本书在编写过程中，参考了高等教育出版社出版的《微积分学习辅导与习题选解》一书，在此深表感谢！

由于时间仓促和编者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者不吝批评指正。

编者

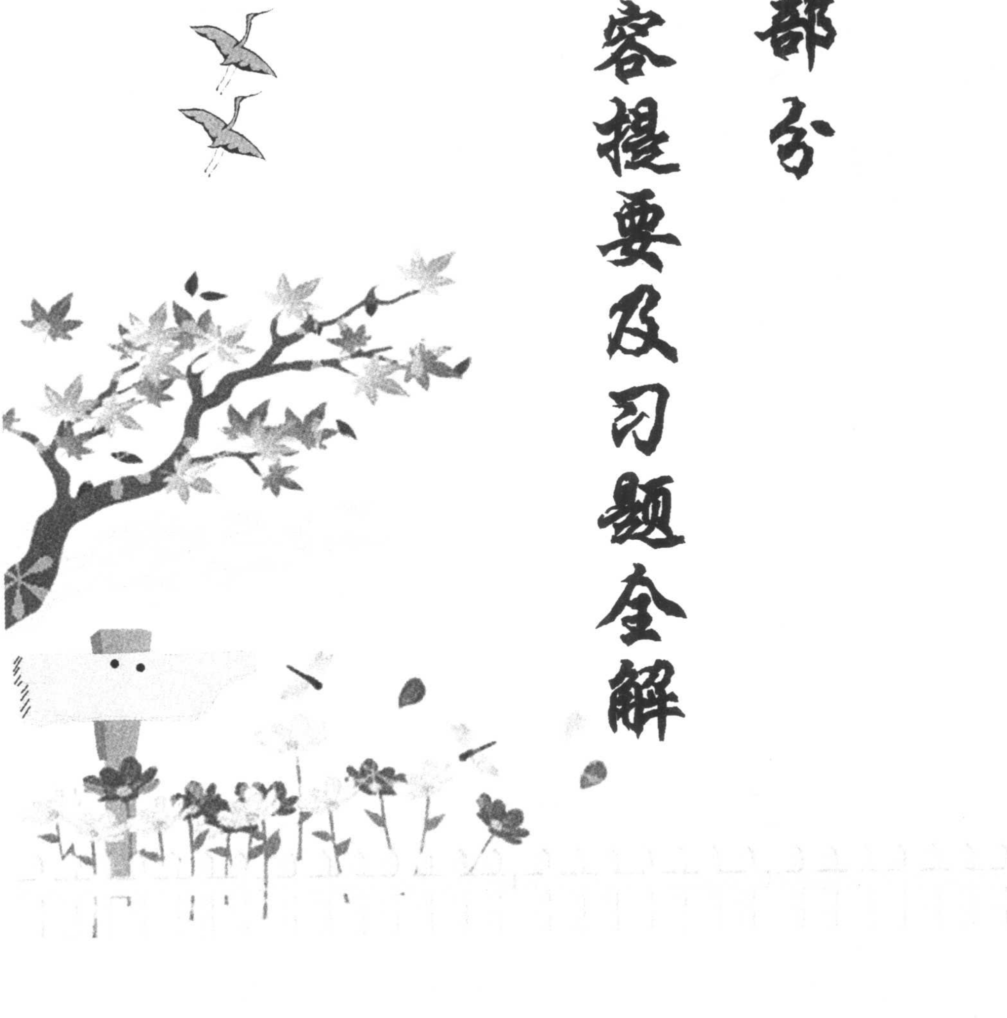
2005年6月

目　　录

第一部分　内容提要及习题全解

第二部分　实验题解答

第一部分 内容提要及习题全解



第五章　向量代数与空间解析几何

5.1　基本要求

1. 理解空间直角坐标系,理解向量的概念及其表示;

2. 掌握向量的运算(线性运算、数量积、向量积、混合积),了解两个向量垂直、平行的条件;

3. 理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式,掌握用坐标表达式进行向量运算的方法;

4. 掌握平面方程和直线方程及其求法;

5. 会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角,并会利用平面、直线的相互关系(平行、垂直、相交等)解决有关问题;

6. 会求点到直线、点到平面以及直线到平面的的距离;

7. 了解曲面方程和空间曲线方程的概念;

8. 了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程;

9. 了解空间曲线的参数方程和一般方程,会求空间曲线在坐标平面上的投影,并会求其方程.

5.2　内容提要

5.2.1　向量的基本概念

1. 向量的定义　向量是既有大小、又有方向的量.

(1) 向量的几何表示　有向线段(与起点无关,称为自由向量).

(2) 向量的坐标表示　$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,其中 a_x、a_y、a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的投影. 以 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为起点、$M(x,y,z)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.

(3) 向量的分解表示　$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,其中 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$,$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

2. 向量的模与方向余弦

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,则向量的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$,$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$,

$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$,其中 α、β、γ 分别为 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角(称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角),

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

5.2.2 向量的运算

1. 向量的加法与数乘运算

向量的加法有平行四边形法则和三角形法则:

(1) 运算的代数表示:设

$$\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z),$$

则 (ⅰ) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$;

(ⅱ) $\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$.

线性运算律为

① 交换律 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$

② 结合律 $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}), \lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

③ 分配律 $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$

(2) 定理 1:设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$,则

$$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{R},\text{使得 } \boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a};$$

或 设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$,则

$$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

推论 对数轴 Ou 上的任意一点 P,轴上有向线段 $\overrightarrow{OP}$ 都可惟一地表示为 P 点的坐标 u 与轴上单位向量 $\boldsymbol{e}_u$ 的乘积

$$\overrightarrow{OP} = u\boldsymbol{e}_u.$$

空间直角坐标系中,三个坐标轴上正向的单位向量分别记为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$,则 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 的分解表达式为:$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$.

2. 数量积

数量积又称点积、内积。

(1) 定义 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

(2) 性质 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |a|^2, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$,

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}, (\lambda\boldsymbol{a}) \cdot (\mu\boldsymbol{b}) = (\lambda\mu)(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

(3) 向量的夹角 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$,

$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ 或 $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

$\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影 $\mathrm{Prj}_a \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|} = \boldsymbol{e}_a \cdot \boldsymbol{b}$.

3. 向量积

向量积又称叉积、外积。

(1) 定义　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\cdot\boldsymbol{e}_c$，其中 $\boldsymbol{e}_c$ 是同时垂直于 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的单位向量，并且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}_c$ 符合右手法则.

(2) 坐标表达式　设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

(3) 性质　$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$.

(4) 几何意义：(ⅰ) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 等于以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形面积；

(ⅱ) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 且 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{b}$.

4. 混合积

(1) 定义　$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

(2) 坐标表达式　设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$，则

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

(3) 性质

(ⅰ) $[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}]$.

(ⅱ) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $[\boldsymbol{abc}]=0$ 或存在一组不全为 0 的数 κ、λ、μ，使得 $\kappa\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

(4) 几何意义　$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ 等于以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

5.2.3　平面与直线及其方程

1. 平面的方程

(1) 点法式方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

(2) 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$，平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$.

2. 两平面间的关系：设 $\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，$\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则

(1) Π_1 与 Π_2 互相平行的充要条件是 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$；

(2) Π_1 与 Π_2 互相垂直的充要条件是 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；

(3) Π_1 与 Π_2 的夹角 θ 由下式确定

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

3. 点与平面的距离:设平面 Ⅱ:$Ax + By + Cz + D = 0$ 及 Π 外一点 $P(x_0, y_0, z_0)$,则 P 到 Π 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4. 直线的方程

(1) 一般方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$

其中直线方向向量为 $\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$.

(2) 对称式(点向式) 方程:$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$,

其中 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为直线的方向向量.

(3) 参数方程 $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$

其中 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$ 为直线的方向向量.

5. 两直线的关系:设 L_1:$\dfrac{x - x_0}{m_1} = \dfrac{y - y_0}{n_1} = \dfrac{z - z_0}{p_1}$,$L_2$:$\dfrac{x - x'_0}{m_2} = \dfrac{y - y'_0}{n_2} = \dfrac{z - z'_0}{p_2}$,则

(1)L_1 与 L_2 互相平行的充要条件是 $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$;

(2)L_1 与 L_2 互相垂直的充要条件是 $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$;

(3) 两直线的夹角 θ 由下式确定:

$$\cos\theta = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\ \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}};$$

(4)L_1 与 L_2 共面的充要条件是 $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$,其中点 $(x_1, y_1, z_1) \in L_1$,点 $(x_2, y_2, z_2) \in L_2$.

直线与平面的关系

设 L:$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$,$\Pi$:$Ax + By + Cz + D = 0$,则

(1)L 与 Π 互相平行的充要条件是 $mA + nB + pC = 0$;

(2) L 与 Π 互相垂直的充要条件是 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$;

(3) 直线与平面的夹角 φ,由下式确定:

$$\sin\varphi=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

6. 过直线的平面束方程

过直线 $L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 的平面束方程为

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

即 $$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)Z+(D_1+\lambda D_2)=0,$$

其中 λ 为参数.

5.2.4　曲面及其方程

1. 柱面与旋转曲面

(1) 柱面

平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线所形成的曲面叫做柱面,定曲线 C 叫做柱面的准线,动直线叫做柱面的母线.

只含 x、y 而缺 z 的二元方程 $F(x,y)=0$,在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面,其准线是:$\begin{cases}F(x,y)=0,\\z=0.\end{cases}$

类似地,$G(x,z)=0$ 与 $H(y,z)=0$ 分别表示母线平行于 y 轴与 x 轴的柱面.

(2) 旋转曲面

平面上的曲线 C 绕该平面上一条定直线 L 旋转而形成的曲面叫做旋转曲面,该平面曲线 C 叫做旋转曲面的母线,定直线叫做旋转曲面的轴.

平面曲线 $C:\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0.\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的曲面方程为:$f(\pm\sqrt{x_2+y_2},z)=0$;绕 y 轴旋转而成的曲面方程为:$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

2. 二次曲面

三元二次方程 $F(x,y,z)=0$ 表示的曲面叫做二次曲面.

椭球面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (a、b、$c>0$);

抛物面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$ (椭圆抛物面);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm z$ (双曲抛物面或马鞍面);

双曲面　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (单叶双曲面);

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\ (\text{双叶双曲面}).$$

5.2.5 曲线及其方程

1. 空间曲线及其方程

(1) 空间曲线 Γ 的一般方程

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

(2) 空间曲线 Γ 的参数方程

$$x=x(t),y=y(t),z=z(t).$$

2. 空间曲线在坐标面上的投影

以空间曲线 Γ 为准线，母线垂直于 xOy 面的柱面叫做 Γ 对 xOy 面的投影柱面，投影柱面与 xOy 面的交线 L 叫做 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

消去方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的变量 z，所得柱面 $H(x,y)=0$ 必包含了曲线 Γ，于是该柱面与 xOy 面的交线 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$ 必包含了 Γ 在 xOy 面上的投影曲线.

类似可得 Γ 在 yOz 面和 zOx 面上的投影曲线所满足的方程分别为

$$\begin{cases}R(y,z)=0\\x=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}T(x,z)=0\\y=0\end{cases}.$$

5.3 本章知识网络图

向量代数与平面解析几何
- 向量
  - 内积
  - 外积
  - 混合积
- 平面和直线
  - 平面 — 法向量
  - 直线 — 方向向量
  - 距离
  - 夹角
- 空间曲线和曲面
  - 曲线和曲面的表示
  - 二次曲面的分类

5.4　典型题型解析

例 1　设向量 $\boldsymbol{a}=\{3,-4,2\}$，轴 u 的正向与三个坐标轴的正向构成相等的锐角，试求：(1) 向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影；(2) 向量 $\boldsymbol{a}$ 与轴 u 的夹角.

【分析】　关键是求出 u 轴上的单位向量 $\boldsymbol{u}_0$，再计算有关所求量.

【解】　设 u 轴上的单位向量为 $\boldsymbol{u}_0$，则

$$\boldsymbol{u}_0=\{\cos\alpha,\cos\alpha,\cos\alpha\}$$

于是　$3\cos_2\alpha=1$（方向角应满足 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）

解得

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{（注意 }\alpha\text{ 是锐角）}$$

$$\boldsymbol{u}_0=\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\}$$

$$(1)\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}_0=\frac{1}{\sqrt{3}}(3-4+1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2)\cos(\boldsymbol{a}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{u}_0)=\frac{\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2+(-4)^2+2^2}}=\sqrt{\frac{3}{29}}$$

$$(\boldsymbol{a}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{u}_0)=\arccos\sqrt{\frac{3}{29}}$$

例 2　已知 $|\boldsymbol{a}|=15$，$|\boldsymbol{b}|=25$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=20$，求 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

【分析】　此题型是一种典型题型. 由题设无法求出向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，因而无法先求向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 再求其模. 考虑到 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ 与 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 有密切的联系，利用这些关系可求出 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，从而可求出 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

【解】　由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=20$，可知 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，由此可得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-450$

又 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\,300$，所以得到

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=10\sqrt{13}.$$

例 3　求向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2},-1)$ 的模，方向余弦，方向角及与 a 同向的单位向量.

【解】　$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_x^2}=\sqrt{4}=2$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=-\frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{2\pi}{3}$$

$$\boldsymbol{a}_0 = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

例 4 已知 $\boldsymbol{a} = (1,5,3)$，$\boldsymbol{b} = (6,-4,-2)$，$\boldsymbol{c} = (0,-5,7)$，$\boldsymbol{d} = (-20,27,-35)$，求数 x, y, z 使向量 $x\boldsymbol{a}, y\boldsymbol{b}, z\boldsymbol{c}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 可构成封闭折线.

【解】 按题意，只要 $x + yb + zc + \boldsymbol{d} = 0$ 得

$$\begin{cases} x + 6y - 20 = 0 \\ 5x - 4y - 5z + 27 = 0 \\ 3x - 2y + 7z - 35 = 0 \end{cases}$$

解得 $x = 2, y = 3, z = 5$.

例 5 设 $\boldsymbol{a} = (3,-1,-2)$，$\boldsymbol{b} = (1,2,-1)$，求

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$；

(2) $(-2\boldsymbol{a}) \cdot 3\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a} \times 2\boldsymbol{b}$；

(3) $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦.

【解】 (1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) = 3$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k} = (5,1,7)$$

(2) $(-2\boldsymbol{a}) \cdot 3\boldsymbol{b} = -6(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = -18$

$\boldsymbol{a} \times 2\boldsymbol{b} = 2(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (10,2,14)$

(3) $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \dfrac{3}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{21}}$

例 6 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，问 λ 为何值时，向量 $p = \lambda\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}$ 与 $q = 3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ 共线？

【解】 $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} = (\lambda\boldsymbol{a} + 5\boldsymbol{b}) \times (3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$

$= 3\lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}) - \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + 15(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}) - 5(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b})$

$= (\lambda + 15)(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

因 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \neq 0$

故当 $\lambda = -15$ 时，$\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q} \neq 0$，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{q}$ 共线.

例 7 设 $\boldsymbol{a} = \{3,1,2\}$，$\boldsymbol{b} = \lambda\{y,3,6\}$，且 $\lambda \neq 0$，求 λ、y 使得 (1) $\boldsymbol{b}$ 为垂直于 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量；(2) $\boldsymbol{b}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 平行的单位向量.

【解】 (1) 由题设知：$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$，即 $\lambda\{3,1,2\} \cdot \{y,3,6\} = 0$

因此有 $y = -5$

又知 $|\boldsymbol{b}| = 1$，即 $\sqrt{\lambda^2(9 + 25 + 36)} = 1$，所以 $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{70}}{70}$.