高联考研

2008年 高联考研

数学【理工类】

练习题集粹

高等数学篇

○主编 潘鑫

国家行政学院出版社

2008年高联考研

数学

练 习 题 集 粹

高等数学篇

主编　　潘　鑫

国 家 行 政 学 院 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学练习题集粹. 高等数学篇/潘鑫主编. —北京:国家行政学院出版社,2007
ISBN 978-7-80140-592-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. 潘… Ⅲ. 高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 076835 号

书　　名	数学练习题集粹 · 高等数学篇
作　　者	潘　鑫
责任编辑	李锦慧
出版发行	国家行政学院出版社
	(北京市海淀区长春桥路 6 号　100089)
电　　话	(010)88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2007 年 7 月北京第 1 版
印　　次	2007 年 7 月北京第 1 次印刷
开　　本	787 毫米 × 1092 毫米　16 开
印　　张	26
字　　数	680 千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-592-0/O · 50
定　　价	36.00 元

前 言

本书是作者积累了十几年考研辅导的材料和经验，依据最新硕士研究生入学考试数学大纲编著而成。

作者经过多年精心研究与筛选，设计与编排了近1500道典型练习题。为了帮助考生通过演练真正巩固学习成果，本书中不选已考试题。

本书具有以下鲜明特点：

1. 独创性与实用性。本书许多题属于作者原创，所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中讲授了许多新的解题方法、技巧，能让考生最大程度地提高解题速度和正确率。

2. 条理清楚、重点突出，技巧性强。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理，均通过试题的形式予以强化，尤其是考生感到比较难理解和掌握的问题，按本书中所给的思路、方法去分析，问题会迎刃而解。

3. 针对性强，覆盖面广。书中试题涵盖了新大纲考查的所有知识点；还分析总结了一些在一般教材上并没有作为定理或结论出现，但在研究生入学考试中却可直接使用的内容。

4. 步骤清晰、解答详细，思路开阔。本书对每一道题都进行了详细的解答；有些题目还提供了多种解法，以便考生开阔解题思路，从而提高考生的应试水平。

本书中每一道题在知识点的涵盖和解题的方法技巧上都极具典型性；考生如果能把书中的题目加以研读、练习，能够更加全面系统地掌握所学知识，迅速提高综合解题能力，在考试中一定能取得好成绩。

在本书出版过程中，国家行政学院出版社的李锦慧作为本书的责任编辑，作了认真细致地工作，在此表示感谢。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处，敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

潘鑫

2007 年 7 月

目　　录

上篇　高等数学练习题集粹

下篇　高等数学练习题详解

上 篇

高等数学练习题集粹

第一章　函数、极限、连续

§1.1　函数

一、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，则

(A) 当 $f'(x)$ 为单调函数时，$f(x)$ 一定是单调函数．

(B) 当 $f(x)$ 是单调函数时，$f'(x)$ 一定为单调函数．

(C) 当 $f'(x)$ 为偶函数时，$f(x)$ 一定为奇函数．

(D) 当 $f(x)$ 为奇函数时，$f'(x)$ 一定为偶函数．

2. 函数 $f(x)=xe^{-x^2}(2-\cos x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是

(A) 有界的偶函数．　(B) 无界的偶函数．

(C) 有界的奇函数．　(D) 无界的奇函数．

3. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续奇函数，且满足 $|f(x)|\leqslant M$，其中常数 $M>0$，则函数 $F(x)=\int_0^x te^{-t^2}f(t)\,dt$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的

(A) 有界奇函数．　(B) 有界偶函数．

(C) 无界偶函数．　(D) 无界奇函数．

4. 已知实数域 R 上的函数 $f(x)$ 为单调增加函数，$g(x)$ 为单调减少函数，下列复合函数单调减少的是

(A) $f[-g(x)]$．　(B) $g[f(x)]$．　(C) $f[f(x)]$．　(D) $g[g(x)]$．

二、填空题

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(e^x+x^n)}{\sqrt{n}}$，则 $f(x)$ 的定义域是________．

6. 设函数 $y=f(u)=\sqrt{1-u^2}$，$u=\varphi(x)=\begin{cases}x^2+x-1, & x\leqslant 0,\\ \ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=$________．

7. 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=$________．

三、解答题

8. 求常数 k 及函数 $g(x)$，使函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x^2}+k, & x\geqslant 0,\\ g(x), & x<0\end{cases}$ 为连续的奇函数．

9. 设 $f(x)$ 当 $x\to 1$ 时极限存在，在 $[0,1]$ 上可积，并且恒有

$$f(x)=3x^2+4x-2\int_0^1 f(x)\,dx-3\lim_{x\to 1}f(x),$$

求 $f(x)$．

10. 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\,dx+2\int_0^1 f(x)\,dx$，求 $f(x)$．

11. 已知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且满足 $f(x)=3x-\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f^2(x)\,dx$，求 $f(x)$．

12. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$f(x) = 3x^2 + 1 + \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x,\quad g(x) = -x + 6x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导, $f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$,且

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h\sin x)}{f(x)}\right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{\sin x - x\cos x}{x}}, x \in (0,\frac{\pi}{2}),$$

（Ⅰ） 求 $f(x)$； （Ⅱ） 求证: $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 有界.

14. 设 $f(x)$ 是多项式,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 3$,求 $f(x)$.

§1.2 数列的极限

一、选择题

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 不存在,则

（A） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 必存在.

（B） $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n$ 必不存在.

（C） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ 必存在.

（D） $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ 必不存在.

2. 数列 $\{x_n\}$ 收敛于实数 a 等价于

（A） 对任给 $\varepsilon > 0$,在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内有数列的无穷多项.

（B） 对任给 $\varepsilon > 0$,在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内有数列的有穷多项.

（C） 对任给 $\varepsilon > 0$,在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 外有数列的无穷多项.

（D） 对任给 $\varepsilon > 0$,在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 外有数列的有穷多项.

3. 设 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty} z_n$

（A） 存在且等于零.

（B） 存在但不一定等于零.

（C） 不一定存在.

（D） 一定不存在.

4. 设 $x_n \leqslant a \leqslant y_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$,则 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$

（A） 都收敛于 a.

（B） 都收敛,但不一定收敛于 a.

（C） 可能收敛,也可能发散.

（D） 都发散.

5. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,则下列正确的是

（A） $x_n > y_n$.

（B） $\forall n, x_n \neq y_n$.

（C） 存在 N,使得 $n > N$ 时, $x_n > y_n$.

（D） x_n 与 y_n 大小关系不确定.

二、填空题

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin a + \sin(a+\frac{b}{n}) + \cdots + \sin(a + \frac{n-1}{n}b)}{n}$（$n$ 为正整数）= ________.

7. 设 $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n =$ ________.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} + \dfrac{\ln(1+\frac{2}{n})}{n+\frac{1}{2^2}} + \cdots + \dfrac{\ln(1+\frac{n}{n})}{n+\frac{1}{n^2}}\right] =$ ________.

9. 设$f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}=$ ________.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+e^x}dx=$ ________.

11. 设函数$f(x)=n^2e^{\frac{x}{n}}-(1+n)x$,若$f(x)$在$x=\xi_n$处取得极值,则$\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n=$ ________.

12. 设$f(x)$在x_0处可导,$x_n=\sin\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0-x_n)}{\sin(\frac{1}{n})}=$ ________.

三、解答题

13. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}[\tan(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n^2})]^{n^2}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

14. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})(x>0)$.　　15. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^3(\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{n})$.

16. 求下列$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$:

(1) $x_n=n[e(1+\frac{1}{n})^{-n}-1]$;　　(2) $x_n=n[(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3n}}-e^{\frac{1}{3}}]$.

17. 设$x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

18. 设$x_n=\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

19. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}[\sqrt{n^2-1}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}]$.

20. 求$\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})\sin\frac{\pi}{n^2}+(1+\frac{2}{n})\sin\frac{2\pi}{n^2}+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})\sin\frac{(n-1)\pi}{n^2}]$.

21. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

22. 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内可导,且$f(0)=1,f'(0)=2$,求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}$.

23. 设$f(0)=0,f'(0)=1$,求$\lim\limits_{n\to\infty}[f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})]$.

24. 已知二元函数$f(x,y)$满足$f(x,y)=y+2\int_0^x f(x-t,y)dt$,$g(x,y)$满足

$$\frac{\partial g}{\partial x}=1,\frac{\partial g}{\partial y}=-1,且g(0,0)=0,$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{f(\frac{1}{n},n)}{g(n,1)}]^n$.

25. 设$a_0=0,a_{n+1}=1+\sin(a_n-1)(n=0,1,2,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

26. 设$g_1,g_2,g_3,\cdots$是使不等式$0<g_n<1,(1-g_n)g_{n+1}>\frac{1}{4}(n=1,2,3,\cdots)$成立的任何数,求$\lim\limits_{n\to\infty}g_n$.

27. 设$x_0>0,x_{n+1}=\ln(1+x_n)$,求:(Ⅰ) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$;　(Ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}x_n}{x_n-x_{n+1}}$.

§1.3　函数的极限

一、选择题

1. 下列命题正确的是

(A)　设 $f(x)$ 为有界函数，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

(B)　设 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=a\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\infty$.

(C)　设 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\cdot\beta(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

(D)　设 $\alpha(x)$ 为无界函数，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

2. 下列命题正确的是

(A)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant g(x)$.

(B)　若 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(C)　若 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$，$\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

(D)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$

(A)　$e^{-\frac{1}{6}}$.　　(B)　$e^{\frac{1}{6}}$.　　(C)　e^{-6}.　　(D)　∞.

4. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，当自变量 x 由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$ 时，记 Δy 为 $f(x)$ 的增量，dy 为 $f(x)$ 的微分，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta x}$ 等于

(A)　-1.　　(B)　0.　　(C)　1.　　(D)　∞.

5. 设 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+\alpha(x)y'+\beta(x)y=1$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，其中 $\alpha(x)$，$\beta(x)$ 为连续函数，则

(A)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}$ 不存在.　　(B)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}$ 存在且为零.

(C)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}$ 存在且为 1.　　(D)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{y(x)}$ 存在且为 2.

6. 设曲线 $y=ax^2$ 与 $y=\ln x$ 相切，则 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2e}}[1+(x-a)]^{\frac{1}{\sin(x-a)}}$ 等于

(A)　1.　　(B)　e.　　(C)　0.　　(D)　a.

7. 设 $R_n(x)=e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}\right)$，则对任意固定的 x，有 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=$

(A)　1.　　(B)　∞.　　(C)　0.　　(D)　不确定.

二、填空题

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}}=$ ________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=$ ________.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^{\mu}x}{x^2}(\mu\in\mathbf{R})=$ ________.

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})\ln(1+x)}{(1-\cos\sqrt{x})^2\sin x}=$ ________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}=$ ________.

13. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}(1+x\ln x)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^2\sin x}=$ ________.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+(1-\cos x)\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cos\dfrac{1}{x}+\ln(1+x^2)}{(e^{x^2}-1)(1+\cos x)}=$ ________.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\cos\dfrac{1}{x}+e^{\sin^2 x}-1}{\ln(1+x^2)}=$ ________.

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan(x-\ln x\cdot\sin x)=$ ________.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin^2\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=$ ________.

20. $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan x\right)=$ ________.

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)=$ ________.

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x-3)e^{-\frac{2}{x}}-x\right]=$ ________.

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x\right]=$ ________.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\arctan(x-t)\,dt}{\sin 3x\cdot\ln(1+2x)}=$ ________.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x^2}\int_{\frac{x}{2}}^{x}\dfrac{e^{xt}-1}{t}dt=$ ________.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}dt=$ ________.

27. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n}{3+n}\right)^{-2n}=k$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx+x^3\sin\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x^2)}=$ ________.

28. 设 $f(x)$ 具有连续导数,且 $f(0)=0,f'(0)=6$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^3}f(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^3}=$ ________.

29. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^\alpha}=1$,其中 $\alpha>0,c>0$ 为常数,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-cx}\int_0^x e^{cs}f(s)\,ds}{f(x)}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

30. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$ ________.

31. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数,点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $f(x)$ 上的拐点,则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-2f(x_0)+f(x_0-\Delta x)}{(\Delta x)^2}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

32. 设 $f(x)=\int_0^x(t^2-2t+3)\,dt$,则 $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{f(x+\alpha)-f(x-\alpha)}{\alpha}=$ ________.

33. 设可导函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 $f(x)>0,f'(x)>0$(区间端点单侧导数为正值),若已知 $f(a)=A$,则 $\lim\limits_{b\to a^+}\dfrac{\ln f(b)-\ln f(a)}{f(b)-A}=$ ________.

34. 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f'(a)=1$,则 $\lim\limits_{x\to a}(x-a)\dfrac{f(a-x)-f(a)}{\ln x-\ln a}=$ ________.

35. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续导数,则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{4x^2}\int_{-x}^{x}[f(x+t)-f(t-x)]\,dt=$ ________.

36. 设函数 $f(x)$ 二阶可导,则 $\lim\limits_{k\to 0}\left[\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(p+k+h)-f(p+k)-f(p+h)+f(p)}{hk}\right]=$ ________.

37. 设$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$存在,又$f(x_0)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f(x_0+\frac{1}{x})}{f(x_0)}\right]^x=$ ________.

38. 设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在,且$\lim\limits_{x\to\infty}[3xf(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}[4f(x)+5]$都存在,则$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=$ ________.

39. 设$f(x)=\dfrac{1}{|a|+ae^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=$ ________;$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ $=$ ________.

40. 设$f(x)$在$(a,+\infty)$内可导,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$存在,则$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=$ ________.

41. 设$y=y(x)$是由方程$y^2+xy+x^2-x=0$确定的满足$y(1)=-1$的连续函数,则$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{y(x)+1}=$ ________.

42. 设$f(x)$为连续函数,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-e^x+1}{x}=a$, $F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)}{x^3}=$ ________.

43. 设函数$f(x)$与$g(x)$在$x=0$的某邻域可求任意阶导数,且满足$f''(x)+f'(x)g(x)+xf(x)=e^x-1$,$f(0)=1$,$f'(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x^4}=$ ________.

44. 已知$g(x)$是微分方程$g'(x)+\sin x\cdot g(x)=\cos x$满足初始条件$g(0)=0$的解,则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)}{x}=$ ________.

三、解答题

45. 求$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\lg(2008+x^2)^{\frac{1}{3}}}{2^x+\arcsin 2x}+(1+x)^x\right]$.

46. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+x}{x^2+1}\left(3+\cos\dfrac{3}{x}\right)$.

47. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

48. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

49. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{x^2}-1)(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{[\ln(1-x)+\ln(1+x)]\sin\dfrac{x}{1+x}}$.

50. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

51. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x^2\cdot\ln(1+\cos x)+e^{\sin^2x}-1}{\sin x\cdot\ln(1+\tan x)}$.

52. 求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

53. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x-x^2\cos^2x}{x^2\sin^2x}$.

54. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^{2x})-\cos(xe^{-2x})}{x^3}$.

55. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(e^{\sin x}-1)^4}{\sin^2x(1-\cos x)}$.

56. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

57. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^x-1-x)^2}{x\sin^3x}$.

58. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}-1+\frac{x}{2}\sin x}{\sqrt[6]{1+x^4}-1}$.

59. 求$\lim\limits_{x\to0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

60. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4\sin\frac{1}{x}+e^{x^3}-1}{\ln(1+\sin x-\tan x)}$.

61. 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

62. 求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$.

63. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}x^{x^x-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

64. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+a\sin bx)^{\frac{1}{x}}$.

65. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\sin\frac{x}{2}+\cos 2x)^{\frac{1}{x}}$.

66. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$,其中 $a>0,b>0,c>0$.

67. 求$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2^x+3^x+4^x}{3})^{\frac{1}{x}}$.

68. 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)\cdots(\sqrt[n]{x}-1)}{(x-1)^{n-1}}$.

69. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(2e^{\frac{x}{1+x}}-1)^{\frac{x^2+1}{x}}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x^2-2})^{x^2}$.

70. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}[\tan(\frac{\pi}{8}+x)]^{\tan 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

71. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sin\frac{\pi}{2}x}{x^2-3x+2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln\cos(\pi 2^x)}$.

72. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

73. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{2x^2-1}}$.

74. 求$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x-1}+xe^{\frac{1}{x}})$.

75. 求$\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan 2x^2)x^2$.

76. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

77. 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n})^{\frac{1}{x}}$.

78. 已知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$,求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

79. 设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x-1}=5$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$.

80. 设$f(x)$在$0<|x|<\delta$有定义,其中δ是一个正数,且$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\frac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}}=e$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$.

81. 设函数$f(x)$在$x=0$点处有$f(0)=0,f'(0)=-1$,求$\lim\limits_{x\to 0}[1+2f(x)]^{\frac{1}{\sin x}}$.

82. 设$f(x)$在$x=0$点的某邻域内可导,且当$x\neq 0$时$f(x)\neq 0$,已知$f(0)=0,f'(0)=\frac{3}{2}$,求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1-f(x))^{\frac{\sin x}{\ln(1+x^2)}}$.

83. 设函数$f(x)$具有二阶连续导数,且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,f''(0)=4$,求$\lim\limits_{x\to 0}[1+\frac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}$.

84. 设$f'(x)$连续,$f(0)=0,f'(0)\neq 0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\,dt}{x^2\int_0^x f(t)\,dt}$.

85. 已知$f(x)$在点$x=6$的邻域内可导,且$\lim\limits_{x\to 6}f(x)=0,\lim\limits_{x\to 6}f'(x)=\lambda$,求

$$\lim_{x\to 6}\frac{1}{(6-x)^3}\int_6^x\left(t\int_t^6 f(u)\,du\right)dt.$$

86. 设$f(x,y)$是定义在区域$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$上的二元函数，$f(0,0)=0$，且在点$(0,0)$处可微，求

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\,\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}.$$

87. 设函数$f(t)$在$x=0$处可微，又设$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\left(\sin\dfrac{x}{\sqrt{5}}\right)^2, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{1}{5}, & x>0,\end{cases}$ 求：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)(1+x)^{-\frac{x+1}{x}}+\varphi(x)\int_{x^2}^{0}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2\varphi(x)}.$$

88. 设$\delta>0$，$f(x)$在$[-\delta,\delta]$上有定义，$f(0)=1$，且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)+\sin x\cdot f(x)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=0,$$

试判断极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot f(x)-\sin x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}$是否存在，若存在求此极限值.

89. 设$f(x)$为定义在$(-\infty,+\infty)$上，以$T>0$为周期的非负连续函数，且$\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=A$，求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}.$$

90. 设$f(t)=\mathrm{e}^t$，且$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=xf(\theta x)$，求：（Ⅰ） $\theta=\theta(x)$的表达式；（Ⅱ） $\lim\limits_{x\to 0}\theta$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta$.

91. 设$f(x)$具有二阶连续导数，且$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$，$f''(x)\neq 0$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

92. 设$f(x)$三阶可导，且$f'''(a)\neq 0$，且

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''[a+\theta(x-a)]}{2}(x-a)^2,\ 0<\theta<1,$$

求$\lim\limits_{x\to a}\theta$.

93. 设函数$f(x)$在$(-L,L)$连续，在$x=0$可导，且$f'(0)\neq 0$.

（Ⅰ） 证明：对任一给定的$0<x<L$，存在$0<\theta<1$，使

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{-x}f(t)\,\mathrm{d}t=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

（Ⅱ） 求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$.

94. 设函数$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$有n阶连续导数，且

$$f^{(k)}(x_0)=0,k=2,3,\cdots,n-1,\text{且}f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

当$0<|h|<\delta$时，

$$f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h),0<\theta<1,$$

求$\lim\limits_{h\to 0}\theta$.

95. 设函数$f(x)$在$(-1,1)$上具有一切阶导数，而在$x=0$处这些导数都不等于0，又设对$0<x<1$和自然数n，有泰勒展开式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n,0<\theta<1,$$

求$\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

96. 已知$f(x)$在$[0,+\infty)$上有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0$且$f''(0)>0$. 若$\forall x>0$，函数$u(x)$

表示曲线 $y=f(x)$ 在切点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，

（Ⅰ） 写出 $u(x)$ 的表达式；（Ⅱ） 求 $\lim\limits_{x\to0^+}u(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}u'(x)$．

§1.4 极限的逆问题

一、选择题

1. 设 a,b 都是常数，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(\int_0^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt+a\right)=b$，则

(A) a 可以任意，$b=0$． (B) a 可以任意，$b=-1$．

(C) $a=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$b=0$． (D) $a=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$b=-1$．

2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1-\cos\frac{1}{n}}-1}{\tan(n^{-k}\pi)}=a\neq0$，则

(A) $k=2$ 且 $a=\dfrac{1}{2\pi}$． (B) $k=-2$ 且 $a=\dfrac{1}{2\pi}$．

(C) $k=2$ 且 $a=-\dfrac{1}{2\pi}$． (D) $k=-2$ 且 $a=-\dfrac{1}{2\pi}$．

3. 使极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^k-\left(1+\frac{1}{x}\right)}=a\neq0$ 的充要条件是

(A) $k>1$． (B) $k\neq1$． (C) $k>0$． (D) 与 k 无关．

二、填空题

4. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-6x^2+1}-ax-b)=0$，则 $a=$ ______，$b=$ ______．

5. 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xe^{-x^2}-\sin x}{x^n}=A$，$A\neq0,\infty$，则 $n=$ ______，$A=$ ______．

6. 设 $a>0$，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{a^h-1}{h}=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$，则 $a=$ ______．

7. 设 n 为正整数，a 为某实数，$a\neq0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{2007}}{x^n-(x-1)^n}=\dfrac{1}{a}$，则 $n=$ ______，$a=$ ______．

三、解答题

8. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，试确定 a 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right)$ 存在，并求此极限．

9. 确定常数 a 的值，使极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{3+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\ln(1+ax)}{|x|}\right]$ 存在．

10. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+\alpha x^2+\beta x}{x^{2n}+1}$（$n$ 为自然数），试确定常数 α,β 的值，使 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$ 都存在．

11. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内二阶可导，且 $f''(0)\neq0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，又 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^\alpha-\sin x}=\beta\neq0$，求 α，β 的值．

12. 确定常数 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x+3x^2)+ax+bx^2}{x^2}=4$．