GAOKAO

徐语婧
2005 年浙江省高考状元

总主编／金　新　朱伯荣
本册主编／沈新权　吕峰波

GAOKAO JIUCUOBEN

高考纠错本

数学

名校名师精编　最新高考指南

浙江教育出版社

GAOKAO

数学

高考纠错本

总主编／金　新　朱伯荣
本册主编／沈新权　吕峰波

名校名师精编　最新高考指南

浙江教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考纠错本.数学/沈新权等编写.—杭州:浙江教育出版社,2005.9(2006.12 重印)

ISBN 7-5338-5835-2

Ⅰ.高… Ⅱ.沈… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 062161 号

责任编辑 金馥菊 **责任校对** 余晓克

责任印务 陆 江 **装帧设计** 张 磊

本册主编:沈新权 吕峰波

高考纠错本·数学

沈新权 吕峰波 主编

浙江教育出版社出版(杭州市天目山路 40 号 邮编 310013)

浙江印刷集团有限公司印刷 浙江省新华书店集团有限公司发行

开本 787×1092 1/16 印张 11.25 字数 238 千

2005 年 9 月第 1 版 2006 年 12 月第 3 次印刷

本次印数 0001-4000

ISBN 7-5338-5835-2/G·5805

定价:15.20 元

联系电话:0571-85170300-80928

e-mail: zjjy@zjcb.com 网址: www.zjeph.com

说　明

“纠错”是教学过程中的一个重要环节。实践证明,“纠错”是开发学生智力、提高学生能力的十分有效的活动。做好“纠错”,不仅能取得良好的教学效果,也能帮助学生取得优异的成绩。

近年来不少在全国各省市的中考、高考中取得优异成绩的学生,都不约而同地总结了这样一条经验:重视对错题的归纳整理,加强自我提醒式的复习是一种很有效的学法,能培养批判性思维,有效地进行思维的严密性、逻辑性训练。我们在调查中发现,考取优异成绩的同学都认为,“纠错”能在短期内有效提高自身的知识水平和应试技能。为此,我们精心设计编写了这套《高考纠错本》丛书。包括《语文》、《数学》、《英语》、《文科综合》、《理科综合》五册。

全套书突出思维训练,培养解题能力,发展解题思路,根据高考不同学科的考点(即错误点)的要求来划分章节,与一般教辅书相比,有着鲜明的特色。书中题型的设置一般与高考题型一致;例题一般选自近年来高考中出现的试题,也有省级重点中学和地市级的试题。考虑到实际的复习效果,酌情根据编写需要创设新题。每个考点(即错误点)下根据学生在实际中易犯的错误,归纳错误形式,并作为栏目设计,如“使用概念错误”、“逻辑错误”、“知识整合不当”等,针对每个章节的栏目,举例分析错误原因,帮助学生纠错,并在每个章节后面设置适当的同类型试题,供学生举一反三练习,巩固该知识点;书中叙述和分析说明的语言力求简洁、准确、鲜明、生动。

这套书2005年初版后引起了很好的社会反响,《今日早报》、《教育信息报》等媒体作了多次报道和评价,中国思维网等网站也展开了热烈讨论,一时供不应求,见不到而又急需本书的读者纷纷打电话给出版发行者。本着与时俱进的原则和一切为了广大读者的宗旨,我们对本书进行了认真的修订。

本书由沈新权设计体例,并由沈新权、吕峰波主编。参与本次修订的有:林进禄,第一章;许浩,第二章;陈云彪,第三章;王剑明,第四章;周赛君、李晓峰,第五章;沈志荣,第六、七章;曹必义,第八章;钟坚毅,第九章;邬佩弦,第十章;冯霄,第十一章;郑俊炜,第十二、二十章;吴旻玲,第十三、十五章;计振明,第十四章;刘舸,第十六、十八章;沈微微,第十七章;杨立公,第十九章。

本次修订由嘉兴一中沈新权、吕峰波两位老师负责统稿。

丛书编写组

2006 年 12 月

目录

MULU

第一篇 必修内容

第二篇 选修内容

第三篇 综合问题

参考答案

第一篇　必修内容

第一章　集合与简易逻辑

说　明

集合论是现代数学的重要基础，数学概念与推理都离不开逻辑. 高考试题以集合与逻辑为载体的，比重约占10%.

集合知识常见易错点：诸如集合表示法的混用；忽视集合元素的互异性；忽略空集；误用集合语言；忽略题目信息等. 简易逻辑常出现误用逻辑中的否定命题和对命题的误判等错误. 希望通过对本章的学习，避免不必要的错误，提高解题的准确率.

误点及纠错

1. 集合表示法的混用

【题例】 能够表示方程组$\begin{cases}x+y=7,\\x-y=1\end{cases}$的解集的是(　　).

A. $\{3,4\}$

B. $\{x=4,y=3\}$

C. $\{(x,y)\mid x=4$ 或 $y=3\}$

D. $\{(x,y)\mid x=4$ 且 $y=3\}$

E. $\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}\right.\right\}$

F. $\{(4,3)\}$

G. $\{(x,y)\mid(x-4)^2+(y-3)^2=0\}$

H. $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$

【纠错】 **错解**：选A,B,C,H.

错误原因：选项H虽然是方程组的解，但它不表示集合；选项A是表示2个元素的集合；选项B是以两个方程为元素的集合；选项C是描述法表示的集合，其中的元素是直线 $x=4$ 和 $y=3$ 上的无数个点. 因$\begin{cases}x=4,\\y=3\end{cases}$是方程组的解，故选项F是原方程组用列举法表示的解集；选项D,E,G都是相互等价的原方程组用描述法表示的解集.

正解：正确答案为D,E,F,G.

2. 忽视集合元素的互异性

【题例1】 设集合$A=\{1,3,a\}$，$B=\{1,a^2-a+1\}$，且$A\supseteq B$，求a的值.

【纠错】 **错解**：∵　$A\supseteq B$，

∴　$a^2-a+1\in A$，

因此$a^2-a+1=a$，或$a^2-a+1=3$，

解得$a=1$，或$a=-1$，或$a=2$.

错误原因：忽视集合元素的互异性.

正解：经过检验，当$a=1$时，集合$A=\{1,3,1\}$，不符合集合元素的互异性，所以$a\neq1$；当$a=-1$时，集合$A=\{-1,1,3\}$，$B=\{1,3\}$；当$a=2$时，集合$A=\{1,2,3\}$，

$B=\{1,3\}$均满足题设，故 a 的值是 -1 或 2.

【题例 2】 已知集合 $A=\{x|(x-2)(x^2-2x+a)=0,x\in\mathbf{R}\}$，求集合 A 的所有元素的和.

【纠错】 **错解**：由 $(x-2)(x^2-2x+a)=0$，得 $x=2$，或 $x^2-2x+a=0$.

因为方程 $x^2-2x+a=0$ 的两根之和为 2，所以集合 A 的所有元素的和是 $2+2=4$.

错误原因：一是忽视集合元素的互异性，二是没有考虑方程 $x^2-2x+a=0$ 无实数根.

正解：当 $a=1$ 时，方程 $x^2-2x+a=0$ 的两个实数根都等于 1，则 $A=\{1,2\}$，A 的所有元素的和是 3；当 $\Delta>0$，即 $a<1$ 时，方程 $x^2-2x+a=0$ 有相异的两个实数根，此时，若 $a=0$，则 $A=\{0,2\}$，A 的所有元素的和是 2；若 $a<1$，且 $a\neq 0$，A 的所有元素的和是 $2+2=4$；当 $a>1$，则 $x^2-2x+a=0$ 无实数根，$A=\{2\}$，A 的所有元素的和是 2.

综上所述，当 $a>1$，或 $a=0$ 时，A 的所有元素的和是 2；当 $a<1$，且 $a\neq0$ 时，A 的所有元素的和是 4；当 $a=1$ 时，A 的所有元素的和是 3.

3. 忽略空集

【题例 1】 已知集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{x|ax=4\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

【纠错】 **错解**：将 $x=1$，或 $x=2$ 分别代入方程 $ax=4$，解得 $a=4$，或 $a=2$，所以实数 a 的取值范围是 $\{2,4\}$.

错误原因：未考虑空集是任何集合的子集.

正解：由 $B\subseteq A$，得 $B=\{1\}$，或 $B=\{2\}$，或 $B=\varnothing$. 实数 a 的值分别为 4，2，0. 所以实数 a 的取值范围是 $\{4,2,0\}$.

【题例 2】 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{x+1}{x-2}\leqslant 0\right.\right\}$，$B=\{x|x^2-(a^2+1)x+a^2<0\}$，且 $A\cap B=B$，求实数 a 的取值范围.

【纠错】 **错解**：集合 $A=\{x|-1\leqslant x<2\}$. 方程 $x^2-(a^2+1)x+a^2=0$ 的两个实数根为 $x_1=1$，$x_2=a^2$.

(1) 当 $|a|>1$ 时，集合 $B=\{x|1<x<a^2\}$，$A\cap B=B\Leftrightarrow B\subseteq A$， $\therefore$ $a^2\leqslant 2$，从而 $1<|a|\leqslant\sqrt{2}$ 成立；

(2) 当 $|a|<1$ 时，集合 $B=\{x|a^2<x<1\}\subseteq A$， $\therefore$ $|a|<1$ 成立.

综上所述，实数 a 的取值范围是 $a\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，且 $a\neq\pm1$.

错误原因：未考虑空集和任何集合的交集都是空集.

正解："空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，任何集合和空集的交集都是空集". 本题还应考虑情形(3)，当 $|a|=1$ 时，集合 $B=\varnothing$，也满足条件 $A\cap B=B$. $\therefore$ $|a|=1$ 成立. 因此，实数 a 的取值范围是 $a\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

4. 误用集合语言

【题例 1】 设集合
$A=\{x|x=(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，
$B=\{y|y=(4n\pm1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，求 A 与 B 的关系.

【纠错】 **错解**：$B\subseteq A$.

错误原因：误用集合语言.

正解：$A=B$. 可作如下证明：

设 $x\in A$，即 $x=(2n+1)\pi$，$n\in\mathbf{Z}$.

当 $n=2k$ 时，$x=(4k+1)\pi$，$x\in B$；

当 $n=2k-1$ 时，$x=(4k-1)\pi$，$x\in B$.

$\therefore$ $A\subseteq B$.

设 $y\in B$，即 $y=(4k\pm1)\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.

∵　$4k\pm1$ 是奇数，　∴　$y\in A$，

∴　$B\subseteq A$.

综上所述，可知 $A=B$.

【题例 2】　设集合

$A=\left\{s\,\middle|\,s=\sin\frac{k\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$，

$B=\left\{t\,\middle|\,t=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{6}\right),k\in\mathbf{Z}\right\}$，那么 A ____ B（在横线上写上你认为最恰当的符号）.

【纠错】　**错解 1**：由 $t=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{6}\right)=-\sin\frac{k\pi}{6}\neq\sin\frac{k\pi}{6}$，因此，$A$ 与 B 的关系是 $A\neq B$.

错解 2：由 $t=-s$，则 $A=-B$.

错误原因：误用集合符号.

正解：观察角 $\theta=\frac{k\pi}{6}$ 的终边位置，可知 $A=\left\{0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，所以 $B=\left\{0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$，因此 $A=B$.

【题例 3】　（2006·湖南卷理）设函数 $f(x)=\frac{x-a}{x-1}$，集合 $M=\{x\mid f(x)<0\}$，$P=\{x\mid f'(x)>0\}$. 若 $M\subsetneqq P$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(0,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

【纠错】　**错解**：$f'(x)=\frac{a-1}{(x-1)^2}$.

若 $a>1$，则 $M=(1,a)$，$P=\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq1\}$

∴　$M\subsetneqq P$；

若 $a=1$，则 $M=\varnothing$，　∴　$M\subsetneqq P$；

若 $a<1$，则 $M=(a,1)$，$P=\varnothing$，

∴　不满足条件.

因此 $a\geqslant1$. 选 D.

错误原因：没有弄清“真包含于”与“包含于”的区别.

正解：当 $a=1$ 时，$M=P=\varnothing$，

因此，$a>1$. 选 C.

【题例 4】　设 A，B，C 是不共线的三点，集合 $M=\{$过 A，B 两点的圆$\}$，$N=\{$过 A，C 两点的圆$\}$，求 $M\cap N$.

【纠错】　**错解**：$M\cap N=\{A\}$.

错误原因：误用集合语言，将集合 $M\cap N$ 的元素误为两圆的交点 A.

正解：$M\cap N$ 的元素是既过 A，B 两点的圆，又过 A，C 两点的圆，所以 $M\cap N=\{\triangle ABC$ 的外接圆$\}$.

【题例 5】　设集合

$A=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，

$B=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，

$C=\{x\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，试判断集合 A，B，C 的关系.

【纠错】　**错解**：$A=B=C$.

错误原因：误认为集合 A，B，C 中的 y 和 x 之间的关系式相同，则这些集合相等. 集合 A 表示抛物线 $y=x^2+1$ 上的点的集合；集合 B 是函数 $y=x^2+1$ 的值域，即 $B=\{y\mid y\geqslant1\}$；集合 C 是函数 $y=x^2+1$ 的定义域，即 $C=\mathbf{R}$. 所以，不可能有 $A=B=C$.

正解：集合 A 与 B，A 与 C 是不同类型的集合，不存在任何包含关系，而 $B\subsetneqq C$.

【题例 6】　设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{x\mid x\subseteq A\}$，试用列举法表示集合 B.

【纠错】　**错解 1**：$B=\{a,b\}$.

错解 2：$B=\{a,b\}$，或 $B=\{a\}$，或 $B=\{b\}$，或 $B=\varnothing$.

错误原因：不理解集合中的符号语言.

正解：集合 B 是以集合 A 的子集为元素构

成的集合，所以 $B=\{\{a,b\},\{a\},\{b\},\varnothing\}$.

【题例 7】 设 $f(n)=2n+1, n\in \mathbf{N}, P=\{1,2,3,4,5\}$，$Q=\{3,4,5,6,7\}$. 记 $\hat{P}=\{n\in \mathbf{N}\mid f(n)\in P\}$，$\hat{Q}=\{n\in \mathbf{N}\mid f(n)\in Q\}$，求 $(\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P})$.

【纠错】 **错解**：由题意得 $\hat{P}=\{1,3,5\}$，$\hat{Q}=\{3,5,7\}$，

$\therefore\ (\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P})=\{3,7\}$.

错误原因：没有弄清 $\hat{P}$ 和 $\hat{Q}$ 的元素组成.

正解：$\hat{P}$ 是由 $f(n)\in P$ 的自然数 n 组成的集合. 令 $2n+1=1,3,5$，得 $n=0,1,2$.

$\therefore\ \hat{P}=\{0,1,2\}$.

同理，$\hat{Q}=\{1,2,3\}$.

从而 $(\hat{P}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{Q})\cup(\hat{Q}\cap \complement_{\mathbf{N}}\hat{P})$

$=\{0,3\}$.

5. 忽略元素信息

【题例 1】 已知集合

$A=\{(x,y)\mid y=-x^2+nx-1\}$，

$B=\{(x,y)\mid x+y=3, 0\leqslant x\leqslant 3\}$. 若 $A\cap B$ 是单元素集，求实数 n 的取值范围.

【纠错】 **错解**：$\because\ A\cap B$ 是单元素集，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y=-x^2+nx-1, \\ x+y=3 \end{cases}$ 只有一组解，

即 $\Delta=0$，解得 $n=3$，或 $n=-5$.

错误原因：忽略了集合 B 中的条件 $0\leqslant x\leqslant 3$，从而导致错误.

正解：$\because\ A\cap B$ 是单元素集，

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y=-x^2+nx-1, \\ x+y=3 \end{cases}$ 只有一组解，

即方程 $x^2-(n+1)x+4=0$ 在 $0\leqslant x\leqslant 3$ 内仅有一解. 设 $f(x)=x^2-(n+1)x+4$，其图象与 x 轴在区间 $[0,3]$ 上有且只有一个公共点. 因此，有下列三种情形：

(1) 当 $f(0)\cdot f(3)<0$ 时，得 $n>\dfrac{10}{3}$；

(2) 当 $f(3)=0$，且 $0\leqslant\dfrac{n+1}{2}\leqslant 3$ 时，得 $n=\dfrac{10}{3}$；

(3) 当 $\Delta=0$，且 $0\leqslant\dfrac{n+1}{2}\leqslant 3$ 时，解得 $n=3$.

综上所述，n 的取值范围是 $n\geqslant\dfrac{10}{3}$，或 $n=3$.

【题例 2】 已知集合

$S=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-3}{x-2}=a+1\right\}$，

$T=\{(x,y)\mid(a^2-1)x+(a-1)y=15\}$. 若 $S\cap T=\varnothing$，求实数 a 的值.

【纠错】 **错解**：由 $\dfrac{y-3}{x-2}=a+1$，

得 $y-3=(a+1)(x-2)$. ①

$\therefore\ S\cap T=\varnothing$ 就是直线①和直线 $(a^2-1)x+(a-1)y=15$ ②平行，从而 $a=-1$.

错误原因：一是忽略了 $\dfrac{y-3}{x-2}=a+1$ 中的隐含条件 $x-2\neq 0$，集合 S 应当是直线①除去点 $P(2,3)$ 的集合；二是忽略了当 $a=1$ 时，集合 $T=\varnothing$，并不表示直线.

正解：由 $\dfrac{y-3}{x-2}=a+1$，

得 $y-3=(a+1)(x-2)$，且 $x\neq 2$，

因此，集合 S 应当是直线①除去点 $P(2,3)$ 的点集. 要使 $S\cap T=\varnothing$，

(1) 当 $a\neq 1$ 时，直线②和①平行，由此得 $a=-1$；直线②过点 P，将点 $P(2,3)$ 坐标代入方程②，解得 $a=-4$，或 $a=\dfrac{5}{2}$.

(2) 当 $a=1$ 时，$T=\varnothing$ 也符合题意.

综上所述，实数 a 的值可取 $1,-1,-4,\dfrac{5}{2}$.

6. 误用逻辑中的否定

【题例 1】 请写出命题"若同位角相等，

则两直线平行"的否定形式.

【纠错】 **错解**:"若同位角不相等,则两直线不平行."原命题的否定形式为真命题,但原命题也为真命题,与真值表不符.因为一个命题的否定形式,其真值与原命题必相反;而命题的否命题,是把原命题的条件和结论同时否定,其真值与原命题没有必然联系.此命题为"若 p 则 q"的形式,其否定形式为"若 p 则 $\neg q$".

错误原因:混淆命题的否定和命题的否命题.

正解:"若同位角相等,则两直线不平行".

【题例 2】 请写出命题"奇数是质数"的否定形式.

【纠错】 **错解**:"奇数不是质数".

错误原因:命题"奇数是质数",省略了全称名词"所有",命题全称应为"所有的奇数是质数".全称肯定命题的形式是:"所有 s 是 p",其否定形式应是:"至少有一个 s 不是 p".

正解:所以命题"奇数是质数"的否定形式为"至少有一个奇数不是质数".

【题例 3】 请写出命题"一组对边平行的四边形是平行四边形"的否定形式.

【纠错】 **错解**:"一组对边平行的四边形不是平行四边形".

错误原因:命题中的"是"应为"都是",其否定为"不都是".

正解:命题的否定形式为"一组对边平行的四边形不都是平行四边形".

【题例 4】 请写出命题"a、b 都是奇数,则 $a+b$ 是偶数"的逆否命题.

【纠错】 **错解**:"$a+b$ 不是偶数,则 a 或 b 是偶数".

错误原因:"a、b 都是奇数"的否定应为"a、b 不都是奇数",也就是说,a、b 可以是分数、无理数,而"a 或 b 是偶数"却限制了 a、b 的取值,简单地把奇数的否定看成是偶数.

正解:原命题的逆否命题为"$a+b$ 不是偶数,则 a、b 不都是奇数".

7. 命题的误判

【题例 1】 请判断命题"不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集是 $\{x|x<-2$,或 $x>3\}$"的真假.若是复合命题,请写出其构成形式和简单命题.

【纠错】 **错解**:是"p 或 q"形式的命题.其中 p:不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集是 $\{x|x<-2\}$;q:不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集是 $\{x|x>3\}$.由于命题 p 与 q 均为假命题,其复合命题为假命题.

错误原因:对命题含有逻辑联结词"或"的误解.命题中虽含有逻辑联结词,但此逻辑联结词连接的是两个开语句,合并作为命题的结论.

正解:此命题的构成形式应为"这 s 是 p"的形式,是简单命题,是真命题.

【题例 2】 A 是 B 的充要条件,B 的充分条件是 C,则 A 是 C 的什么条件?

【纠错】 **错解**:因为 $A\Leftrightarrow B$,$B\Rightarrow C$,所以 $A\Rightarrow C$.因此 A 是 C 的充分不必要条件.

错误原因:对充分条件和必要条件的理解不透彻.

正解:根据充分条件的概念,"B 的充分条件是 C"指的是"C 是 B 的充分条件",即 $C\Rightarrow B$.所以 A 是 C 的必要不充分条件.

【题例 3】 已知命题 p:方程 $x^2+4ax-4a+3=0$ 有实数根,命题 q:抛物线 $y=x^2-(a-1)x+a^2$ 和 x 轴有公共点,命题 r:不

等式 $x^2+2ax-2a<0$ 的解集不是空集. 若这三个命题至少有一个为真,求实数 a 的取值范围.

【纠错】 错解:

命题 p 真 $\Leftrightarrow \Delta_1=16a^2-4(-4a+3)\geqslant 0$,

解得 $a\leqslant -\frac{3}{2}$,或 $a\geqslant \frac{1}{2}$.

同理,命题 q 真,则 $\Delta_2\geqslant 0$,

解得 $-1\leqslant a\leqslant \frac{1}{3}$.

命题 r 真,则 $\Delta_3\geqslant 0$,即 $a\leqslant -2$,或 $a\geqslant 0$.

这三个命题至少有一个为真,就是 $\Delta_1\geqslant 0$,且 $\Delta_2\geqslant 0$,且 $\Delta_3\geqslant 0$,

得 $a\in(-\infty,-2]\cup\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

错误原因:将三个命题至少有一个为真,误判为三个命题都真.

正解1:三个命题至少有一个为真,

则 $\Delta_1\geqslant 0$,或 $\Delta_2\geqslant 0$,或 $\Delta_3\geqslant 0$.

由 $\Delta_1\geqslant 0$,得 $a\leqslant -\frac{3}{2}$,或 $a\geqslant \frac{1}{2}$;

由 $\Delta_2\geqslant 0$,得 $-1\leqslant a\leqslant \frac{1}{3}$;

由 $\Delta_3\geqslant 0$,得 $a\leqslant -2$,或 $a\geqslant 0$.

综上所述,实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

正解2:若"这三个命题至少有一个为真"不成立,则此三个命题都假,从而

$$\begin{cases}\Delta_1<0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},\\ \Delta_2<0\Leftrightarrow a<-1,\text{或 } a>\frac{1}{3},\\ \Delta_3<0\Leftrightarrow -2<a<0,\end{cases}$$

即 $-\frac{3}{2}<a<-1$. 因此使这三个命题至少有一个为真的实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup[-1,+\infty)$.

整合训练

一、选择题

1. 集合 $A=\{a^2,a+1,-1\}$,$B=\{2a-1,|a-2|,3a^2+4\}$,$A\cap B=\{-1\}$,则 a 的值是(　　).

A. -1　　B. 0 或 1

C. 2　　D. 0

2. 设集合

$A=\left\{\frac{n}{m}\middle| m\in\mathbf{N}^*,n\in\mathbf{N}^*,n<m\leqslant 6\right\}$,则 A 中元素的个数为(　　).

A. 15　　B. 12

C. 11　　D. 10

3. "$|2x-3|\leqslant 3$ 成立"的一个既不充分也不必要条件是(　　).

A. $x=1$　　B. $0<x<1$

C. $x<5$　　D. $x=5$

4. 在 $\triangle ABC$ 中,"$\angle A>\angle B$"是"$\sin A>\sin B$"成立的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. 已知集合 $A=\{x|f(x)=0\}$,$B=\{x|g(x)=0\}$,$C=\{x|f(x)g(x)=0\}$,那么(　　).

A. $C=A\cup B$　　B. $C=A\cap B$

C. $C\subseteq A\cup B$　　D. $C\subseteq A\cap B$

二、填空题

6. 设 a,b,c 是非零实数,则 $M=\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}$ 的值所组成的集合为________.

7. 由实数$-a$，$|a|$，$\sqrt{a^2}$，a，$-\sqrt[3]{a^3}$组成的集合最多含有______个元素.

8. 已知$A=\{x\in \mathbf{R}\mid x^2-2(p+2)x+p^2=0\}$，且$A\cap(0,+\infty)=\varnothing$，则实数$p$的取值范围是____________.

9. 命题"三条直线两两相交"的否定形式是________________.

10. 命题"末位是0的整数能被5整除"的否命题是________________.

11. 命题"a，b都是整数，则$a+b$是整数"的逆否命题是________________.

12. 已知a，b，c三条线段，则"a，b，c能组成三角形"是"$a+b>c$"的____________条件.

三、解答题

13. 已知集合$A=\left\{x\in \mathbf{Z}\,\middle|\,\frac{12}{x}\in \mathbf{Q},x\neq 0\right\}$，

$B=\left\{y\in \mathbf{Z}\,\middle|\,\frac{12}{y}\in \mathbf{Z},y\neq 0\right\}$.

(1) 试判断集合A，B是有限集还是无限集；

(2) 试判断-1，8，$\frac{1}{2}$是否属于这两个集合.

14. 已知集合$A=\{-3,4\}$，$B=\{x\mid x^2-2px+q=0\}$，$B\neq\varnothing$，且$B\subseteq A$，求实数p，q的值.

15. (1) 已知集合

$A=\{y\mid y=-x^2+3x-2,x\in \mathbf{R}\}$，

$B=\{y\mid y=x^2-x,x\in \mathbf{R}\}$，求$A\cap B$；

(2) 已知集合$A=\{(x,y)\mid y=-x^2+3x-2,x\in \mathbf{R}\}$，

$B=\{(x,y)\mid y=x^2-x,x\in \mathbf{R}\}$，

求$A\cap B$.

16. 请写出命题"不等式$x^2-3x+2\geqslant 0$的解集是$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$"的否定形式.

17. 请判断命题"$\{x\mid x<2$，或$x>3\}$是不等式$x^2-5x+6>0$的解集"的逆命题的真假，并判断其是否为复合命题. 若是，请说明其构成和构成它的简单命题.

18. 请写出下列命题的否定形式，并判断其真假：

(1) p：能被3整除的数能被9整除；

(2) p：相似三角形是全等三角形；

(3) p：有些三角形是直角三角形.

第二章　函数

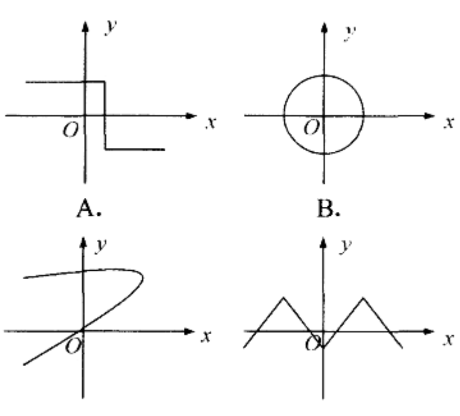
说　明

根据2006年全国高考数学考纲，本章高考考试内容有：映射，函数，函数的单调性，反函数，互为反函数的图象之间的关系，指数概念的扩充，有理数幂的运算性质，指数函数，对数，对数的运算性质，对数函数，函数应用举例. 本章内容特点是概念性强，常常由于对概念的不理解，如对函数的定义没有理解，造成对函数图象的不理解；不重视函数的定义域，造成求值域、判断单调性和奇偶性等错误；不重视函数的单调性的研究，从而造成求函数的最值时的错误等等.

误点及纠错

1.　忽视函数是映射的理解

【题例】　下列图象可能是函数 $y=f(x)$ 的图象的是(　　).



【纠错】　**错解**：选 A，B，C.

错误原因：函数本质是映射，对于函数 $y=f(x)$，在取值范围内的每一个 x 的值，按照某种对应法则，y 有且只有唯一的值和它对应. 故选项 A，B，C 都错误.

正解：选 D.

2.　忽视对函数的定义域的研究

【题例 1】　求函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$，$x\in(1,+\infty)$ 的值域.

【纠错】　**错解**：$f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}$

$=1+\dfrac{3}{x-1}$.

∵　$\dfrac{3}{x-1}\neq 0$，

∴　值域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

错误原因：忽视了函数的定义域，只是按照对应法则求值域.

正解：$f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}=\dfrac{x-1+3}{x-1}$

$=1+\dfrac{3}{x-1}$.

∵　$x\in(1,+\infty)$，　∴　$\dfrac{3}{x-1}>0$，

∴　值域为 $(1,+\infty)$.

【题例 2】　下列函数，哪些函数与函数 $y=2x-1$ 是同一个函数？

(1)　$y=\dfrac{4x^2-1}{2x+1}$；

(2)　$y=2x-1$　$(x>0)$；

(3)　$u=2v-1$；

(4)　$y=\sqrt{(2x-1)^2}$.

【纠错】　**错解**：选(1)(2)(4).

错误原因：没有考虑函数定义域及对应法则.

正解：(1)的函数定义域为

$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，(2)的函数定义域为$(0,+\infty)$，而原函数的定义域为$\mathbf{R}$，所以(1)、(2)的函数与原函数不同.(4)函数的定义域相同，但函数的解析式不同，即对应法则不同，故只有(3)与原函数相同.

3.　忽视对奇函数与偶函数的定义的理解

【题例 1】　判断函数

$f(x)=(1-x)\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$的奇偶性.

【纠错】　**错解**：∵　$\frac{x+1}{1-x}\geqslant 0$，

∴　$-1\leqslant x<1$，

∴　$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，

∴　$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$=f(x)$，

所以函数$f(x)$为偶函数.

错误原因：忽视了对函数定义域对称性的考察.

正解：∵　$\frac{x+1}{1-x}\geqslant 0$，　∴　$-1\leqslant x<1$，

所以函数的定义域不关于原点对称，

所以函数$f(x)$为非奇非偶函数.

【题例 2】　判断函数$f(x)=\frac{\sqrt{2-x^2}}{|x+2|-2}$的奇偶性.

【纠错】　**错解**：

∵　$f(-x)=\frac{\sqrt{2-(-x)^2}}{|2-x|-2}$，

∴　$f(x)\neq f(-x)$，$f(-x)\neq -f(x)$，

所以函数$f(x)$为非奇非偶函数.

错误原因：没有对函数的解析式进行化简，也没有考察函数的定义域.

正解：先求出函数的定义域为

$[-\sqrt{2},0)\cup(0,\sqrt{2}]$，

然后化简函数得$f(x)=\frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$，则$f(-x)=-f(x)$，所以函数$f(x)$为奇函数.

4.　忽视对函数的单调性的研究

【题例 1】　已知函数$f(x)=-x^2+2ax+1$在区间$[-1,1]$上有最大值为4，求实数a的值.

【纠错】　**错解**：

∵　$f(x)=-(x-a)^2+1+a^2$，

∴　$1+a^2=4$，$a=\pm\sqrt{3}$.

错误原因：忽视了二次函数在某个特定的区间上单调性的讨论.

正解：$f(x)=-(x-a)^2+1+a^2$.

(1)　当$a\in[-1,1]$时，$1+a^2=4$，

解得$a=\pm\sqrt{3}$(舍去)；

(2)　当$a\in(1,+\infty)$时，$f(x)$在区间$[-1,1]$上是增函数，所以$f(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值为$f(1)$，$f(1)=2a=4$，$a=2$；

(3)　当$a\in(-\infty,-1)$时，$f(x)$在区间$[-1,1]$上是减函数，所以$f(x)$在区间$[-1,1]$上的最大值为$f(-1)$，$f(-1)=-2a=4$，$a=-2$.

综上所述，$a=\pm 2$.

【题例 2】　已知函数$y=f(x)$的定义域为$(-1,1)$，在定义域上是减函数，且满足$f(1-a)-f(a^2-1)<0$，求实数a的取值范围.

【纠错】　**错解**：

∵　$y=f(x)$在定义域上是减函数，

由$f(1-a)-f(a^2-1)<0$，

可得$f(1-a)<f(a^2-1)$.

则$1-a>a^2-1$，　∴　$-2<a<1$.

错误原因：只知函数单调性定义的顺推，而忽视定义的逆用.另外没有考虑函数定义域.

正解:依题意有 $f(1-a)<f(a^2-1)$,由函数的单调性和函数的定义域,得

$-1<a^2-1<1-a<1$.

解这个不等式组得 $0<a<1$.

【题例 3】 (2006·北京卷理)已知 $f(x)=\begin{cases}(3a-1)x+4a, & x<1,\\ \log_a x, & x\geqslant 1\end{cases}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数,则实数 a 的取值范围是( ).

A. $(0,1)$ B. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

C. $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)$ D. $\left[\frac{1}{7},1\right)$

【纠错】 **错解**:要使函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减,只需 $3a-1<0$,

即 $a<\frac{1}{3}$.

要使函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减,只需 $0<a<1$.

因此,$0<a<\frac{1}{3}$,选 B.

错误原因:只考虑函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$,$[1,+\infty)$ 上单调递减.

正解:要使函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递减,只需 $3a-1<0$,即 $a<\frac{1}{3}$.

要使函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单调递减,只需 $0<a<1$.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减,所以函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上的最小值需不小于函数 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上的最大值,即

$(3a-1)\times 1+4a\geqslant \log_a 1$,解得 $a\geqslant\frac{1}{7}$.

因此,$\frac{1}{7}\leqslant a<\frac{1}{3}$,选 C.

【题例 4】 根据函数单调性的定义,求证:函数 $f(x)=-x^3+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

【纠错】 **错解**:在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任取 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_2^3-x_1^3$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

$\because$ $x_1<x_2$, $\therefore$ $x_2-x_1>0$.

(1) 当 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 时,

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$,

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$;

(2) 当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 时,

$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$,

$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$.

综上所述,$f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=-x^3+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

错误原因:证明在某个区间上的函数单调性时,把区间分隔开证明不妥当.如:函数 $g(x)$,其图象如图 2-1 所示,$g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数,$g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上也是增函数,但不能认为 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

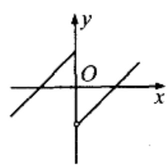


图 2-1

正解:在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上任取 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_2^3-x_1^3$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

$\because$ $x_1<x_2$, $\therefore$ $x_2-x_1>0$.

当 $x_1x_2\leqslant 0$ 时,有 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$

$=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$;

当 $x_1x_2>0$ 时，有 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$.

$\therefore\quad f(x_1)-f(x_2)$

$=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0$,

即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以函数 $f(x)=-x^3+1$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

5. 错用判别式法求值域

【题例】 求函数 $y=\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$ 的值域.

【纠错】 **错解**：函数变形整理，得

$(3y-2)x^2-(7y-3)x+(2y+2)=0.(*)$

$\because\quad \Delta=(7y-3)^2-4(3y-2)(2y+2)$

$=25(y-1)^2\geqslant0$,

解得 $y\in\mathbf{R}$，故函数的值域为 $\mathbf{R}$.

错误原因：一是运用判别式法求解，没有讨论二次项系数是否等于零，若二次项系数为零，则不能用判别式法求解. 二是未注意原函数的定义域，原函数的定义域为 $\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq2,且\ x\neq\dfrac{1}{3}\right\}$，需将 $x=2$ 和 $x=\dfrac{1}{3}$ 代入(*)，判断值域中有没有 $x=2$ 和 $x=\dfrac{1}{3}$ 对应的象. 若有 $x=2$ 和 $x=\dfrac{1}{3}$ 对应的象，且此时的 y 值当且仅当 $x=2$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$ 取到，则应把此时的 y 值从值域中删去.

正解 1：函数变形整理，得

$(3y-2)x^2-(7y-3)x+(2y+2)=0$.

(1) 若 $3y-2=0$，即 $y=\dfrac{2}{3}$ 时，有 $x=2$，与函数定义域矛盾，$\therefore\quad y\neq\dfrac{2}{3}$.

(2) 若 $3y-2\neq0$，即 $y\neq\dfrac{2}{3}$ 时，

$\because\quad x\in\mathbf{R}$,

$\therefore\quad \Delta=(7y-3)^2-4(3y-2)(2y+2)\geqslant0$,

$\therefore\quad (y-1)^2\geqslant0$，$\therefore\quad y\in\mathbf{R}$.

因为函数 $f(x)$ 的定义域为

$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq2,且\ x\neq\dfrac{1}{3}\right\}$,

将 $x=2$ 代入

$(3y-2)x^2-(7y-3)x+(2y+2)=0$,

可得 $y=1$.

将 $x=\dfrac{1}{3}$ 代入

$(3y-2)x^2-(7y-3)x+(2y+2)=0$，无解.

又 $\because$ 当 $y=1$ 时，方程 $(3y-2)x^2-(7y-3)x+(2y+2)=0$ 仅有解 $x=2$，故应将 $y=1$ 从值域中删去，因此，所求函数的值域为 $\left\{y\in\mathbf{R}\,\middle|\,y\neq\dfrac{2}{3},且\ y\neq1\right\}$.

正解 2：$y=\dfrac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$

$=\dfrac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(3x-1)}=\dfrac{2x+1}{3x-1}\ (x\neq2)$.

当 $x=2$ 时，$y=\dfrac{2x+1}{3x-1}=1$，故 $y\neq1$.

又函数 $y=\dfrac{2x+1}{3x-1}\neq\dfrac{2}{3}$,

所以所求函数的值域为

$\left\{y\in\mathbf{R}\,\middle|\,y\neq\dfrac{2}{3},且\ y\neq1\right\}$.

6. 错用指数函数、对数函数的性质

【题例 1】 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2-ax+1)$ 值域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

【纠错】 **错解**：$\Delta=a^2-4<0$,

解得 $-2<a<2$.

错误原因：对对数函数的性质不理解.

正解：因为函数 $f(x)$

$=\log_2(x^2-ax+1)$ 值域为 $\mathbf{R}$,

令 $u=x^2-ax+1$，要使 u 取遍区间 $(0,+\infty)$ 上的任意一个数，

所以 $\Delta=a^2-4\geqslant0$,

解得 $a\leqslant-2$，或 $a\geqslant2$.

【题例 2】 求函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-5x-3)$ 的单调区间.

【纠错】 **错解：** ∵ 当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

∴ $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-5x-3)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

错误原因： 忽视了当 $0<a<1$ 时，$f(x)=\log_a x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

正解： ∵ $2x^2-5x-3>0$，

∴ $x<-\frac{1}{2}$，或 $x>3$.

又函数 $g(x)=2x^2-5x-3$ 的对称轴为 $x=\frac{5}{4}$，

∴ $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上是减函数，且此时 $g(x)\in(0,+\infty)$.

∴ $g(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上是增函数，此时，$g(x)\in(0,+\infty)$.

又∵ $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

∴ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上是增函数，在区间 $(3,+\infty)$ 上是减函数.

【题例 3】 求函数 $f(x)=\log_a(a^x-1)$ $(a>0,a\neq1)$ 的定义域，并说明函数的单调性（不需要证明）.

【纠错】 **错解：** 由 $a^x-1>0$，得 $a^x>1$，

∴ 函数的定义域为 $(0,+\infty)$.

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

错误原因： 对指数函数与对数函数的性质理解不透彻.

正解： 由 $a^x-1>0$，得 $a^x>1$.

当 $a>1$ 时，$x>0$；当 $0<a<1$ 时，$x<0$.

所以所求函数的定义域为：当 $a>1$ 时，$x\in(0,+\infty)$；当 $0<a<1$ 时，$x\in(-\infty,0)$.

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

当 $0<a<1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是增函数.

7. 忽视对函数图象变换的理解

【题例】 先将函数 $f(x)=2^x$ 的图象向左平移一个单位长度得到图象 C_1，然后将图象 C_1 向上平移一个单位长度得到图象 C_2，作出图象 C_2 关于直线 $y=x$ 对称的图象 C_3，则图象 C_3 对应的函数解析式为（　　）.

A. $y=\log_2(x-1)+1$

B. $y=\log_2(x-1)-1$

C. $y=\log_2(x+1)+1$

D. $y=\log_2(x+1)-1$

【纠错】 **错解：** 选 A，C，D.

错误原因： 不理解函数图象的变换.

正解： 将函数 $f(x)$ 的图象按向量 $(-1,1)$ 平移，经平移后得到图象 C_2，则有 $\begin{cases}x'=x-1,\\y'=y+1,\end{cases}$ 其中点 (x',y') 为图象 C_2 上的点，点 (x,y) 为函数 $f(x)$ 图象上的点，

∴ $\begin{cases}x=x'+1,\\y=y'-1.\end{cases}$ 将它代入 $y=2^x$，

可得 $y'-1=2^{x'+1}$，即 $y'=2^{x'+1}+1$.

图象 C_2 关于直线 $y=x$ 对称的图象 C_3 是轴对称变换的一种特殊情形，说明图象 C_2 与图象 C_3 对应的函数是互为反函数，故选 B.

8. 忽视对反函数定义的理解

【题例】 已知函数 $f(x)=\sqrt{x-1}$，求函数 $y=f(x+1)$ 的反函数.

【纠错】 **错解：** ∵ $f(x)=\sqrt{x-1}$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=x^2+1$，