涂晓青 李捷 杜之韩 白淑敏● 编著

经济管理数学基础

JINGJI GUANLI SHUXUE JICHU

西南财经大学出版社

涂晓青 李捷 杜之韩 白淑敏●编著

经济管理数学基础

JINGJI GUANLI SHUXUE JICHU

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济管理数学基础/涂晓青,李捷,杜之韩,白淑敏编著.—成都:西南财经大学出版社,2007.5

ISBN 978-7-81088-696-3

Ⅰ.经… Ⅱ.①涂…②李…③杜…④白… Ⅲ.经济数学—高等学校—教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 049058 号

经济管理数学基础

涂晓青　李捷　杜之韩　白淑敏　编著

责任编辑:黄霞
封面设计:杨红鹰
责任印制:王艳

出版发行:	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址:	http://www.xcpress.net
电子邮件:	xcpress@mail.sc.cninfo.net
邮政编码:	610074
电　　话:	028-87353785　87352368
印　　刷:	成都市书林印刷厂
成品尺寸:	170mm×240mm
印　　张:	25
字　　数:	485 千字
版　　次:	2007 年 5 月第 1 版
印　　次:	2007 年 5 月第 1 次印刷
印　　数:	1—5000 册
书　　号:	ISBN 978-7-81088-696-3
定　　价:	39.80 元

前言

《经济管理数学基础》是一本为高等财经类大学本科学生撰写的教材，其内容涵盖了教育部颁布的高等财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲中线性代数和概率统计部分的全部基本要求(即大纲中不带 * 号的内容)，并略有拓宽，可以满足普通高等财经院校及成人院校经济、管理类专业对本课程的要求．

编者编写本教材的立意是：采用最有利于学生接受的内容体系，从较低的教学起点出发，讲清本课程最低限度要求中的最基本问题．希望这样一种安排能使包括成人院校学生和因本课程内容艰深而却步的自考生在内的所有学生们都从本书中有所收获．

本书分上、下两篇，上篇为线性代数，由涂晓青、李捷编写；下篇为概率论与数理统计，由杜之韩、白淑敏编写．

本书的编写得到西南财经大学经济数学系、成人教育学院领导以及经济数学系长期从事概率论与数理统计课程教学的同事们的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢．虽然作者已为本书作了很大的努力，但限于水平，难免出现纰漏乃至谬误，恳请同仁、读者一经发现及时指正．

编著者

2007 年春于光华园

目录

上篇　线性代数

下篇　概率论与数理统计

上　篇

线性代数

第一章　行列式

行列式理论是线性代数的重要组成部分，是研究线性方程组的有力工具，它在生产实际和经济管理中有着广泛的应用.本章从行列式的概念出发，介绍行列式的性质和计算方法，并提供求解一类线性方程组的方法 —— 克莱姆(Gramer)法则.

§1.1　n 阶行列式的定义

一、排列中的逆序与逆序数

为了获得 n 阶行列式的定义，需介绍排列及其有关的概念.

定义 1.1　把 n 个不同的自然数 $1,2,\cdots,n$ 排成一个有序数组

$$i_1 i_2 \cdots i_n$$

称为 n **级排列**，简称**排列**.

例如，12345，42351 是 5 级排列，21458673 是 8 级排列.

一般地，n 级排列的总数为 $n!$ 种.例如 3 级排列的总的排列方法有 $3! = 6$ 种，即 123；132；213；231；312；321.

定义 1.2　在一个 n 级排列 $i_1 \cdots i_s \cdots i_t \cdots i_n$ 中，如果 $s < t$ 时，$i_s > i_t$，即一对数的前后位置与大小顺序相反，则称数对 i_s 与 i_t 构成一个**逆序**.一个 n 级排列中逆序的总数，称为 n 级排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如，在 5 级排列 42351 中，构成逆序的数对有 42，43，41，21，31，51 共 6 个.故 $\tau(42351) = 6$.在 n 级排列 $123\cdots n$ 中，没有构成逆序的数对，故 $\tau(123\cdots n) = 0$.

我们称这种逆序数为零的排列为 n 级**自然排列**.

如果一个 n 级排列的逆序数为偶数,则称之为**偶排列**,显然5级排列42351是偶排列.如果一个 n 级排列的逆序数为奇数,则称之为**奇排列**,如5级排列24135是奇排列,因为 $\tau(24135)=3$.

定义 1.3 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中,如果其中某两个数 i_s 和 i_t 互换位置,其余各数位置不变,就得到一个新排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$,这样的互换称为排列的一次**对换**,记作 (i_s,i_t).特别地,若互换的是相邻的两个元素,则称为**相邻对换**.

例如:

$$42351 \xrightarrow{(3,1)} 42153$$

对换有如下重要性质:

定理 1.1 对换改变排列的奇偶性.

证明 (1) 如果对换是相邻对换,在排列

$$i_1i_2\cdots i_si_t\cdots i_n$$

中,将 i_s 与 i_t 对换,得

$$i_1i_2\cdots i_ti_s\cdots i_n$$

因为对换后除了 i_s 与 i_t 外,其余任意两数间的序数都未动,所以当 $i_s<i_t$ 时,对换后排列仅增加1个逆序,当 $i_s>i_t$ 时,对换后排列仅减少1个逆序.因此经相邻对换后排列的逆序数增加或减少1个,故相邻对换改变排列的奇偶性.

(2) 如果对换不是相邻对换,在排列

$$i_1i_2\cdots i_sa_1a_2\cdots a_ki_t\cdots i_n$$

中,将 i_s 与 i_t 对换,得

$$i_1i_2\cdots i_ta_1a_2\cdots a_ki_s\cdots i_n$$

该排列可以看成由原排列中的 i_t 依次和前面的数作 $k+1$ 次相邻对换,变成

$$i_1i_2\cdots i_ti_sa_1a_2\cdots a_k\cdots i_n$$

后,再让 i_s 依次和它后面的数作 k 次相邻对换得到的,即对换后的排列可由原排列经 $2k+1$ 次相邻对换得到.所以非相邻对换亦改变排列的奇偶性.

综上所述:对换改变排列的奇偶性.

进一步可以证明,任意一个 n 级排列,经过有限次对换总可变成自然排列.而且还有如下结论:

定理 1.2 在所有 n 级排列中,奇排列和偶排列的个数相同,各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

二、二阶、三阶行列式

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.为此,我们回顾初等代数中二、

三元线性方程组的求解过程,从中引出二、三阶行列式的概念.

设含有两个未知量 x_1,x_2 的二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\end{cases} \tag{1-1}$$

利用加减消元法,当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,得到惟一解

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 &= \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{aligned} \tag{1-2}$$

为便于研究,我们可以将(1 - 2) 式的分母记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**.其中横排称为**行**,纵排称为**列**.

二阶行列式的计算方法可用图 1 - 1 来帮助记忆.

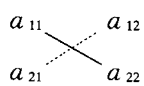

图 1 - 1

图 1 - 1 说明二阶行列式的值等于实线上两个元素乘积与虚线上两个元素乘积的差.例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

利用上述定义,(1 - 2) 式中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1-4}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{1-5}$$

因此,对二元线性方程组(1 - 1),在行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{1-6}$$

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

解 根据二元线性方程组的求解公式(1－6),有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

于是方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-1}{1} = -1, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

类似地,为求解含三个未知量 x_1, x_2, x_3 的三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1-7}$$

我们记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \tag{1-8}$$

称为**三阶行列式**.

在(1－8)式中,元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 所在的对角线称为**主对角线**,a_{13}, a_{22}, a_{31} 所在的对角线称为**副对角线**.

三阶行列式的计算方法可用图 1－2 来帮助记忆.

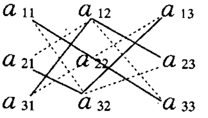

图 1－2

图 1－2 表明:沿各实线上三个元素的乘积取正号;沿虚线上三个元素的乘积取负号.它们的代数和就是三阶行列式(1－8) 的值.

由此关于三元线性方程组(1 - 7)，当行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时，如果记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

则方程组(1 - 7)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1 - 9}$$

一般地，称 D 为方程组(1 - 7)的**系数行列式**，而 D_1, D_2, D_3 是分别把 D 中的第 1 列、第 2 列、第 3 列中的各数换成常数项 b_1, b_2, b_3 构成的.

例 2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解　$$\begin{aligned} D &= 2\times2\times2+(-1)\times1\times3+4\times(-1)\times1-3\times2\times4 \\ &\quad -1\times1\times2-2\times(-1)\times(-1) \\ &= -27 \end{aligned}$$

例 3　当 x 为何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$.

解　$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= 3\times5\times2+2\times3\times(-1)+2\times1\times x-(-1)\times5\times2 \\ &\quad - x\times3\times3-2\times1\times2 \\ &= 30-7x \\ &= 2 \end{aligned}$$

解得 $x=4$.

故当 $x=4$ 时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & x \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2$.

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = a \\ -x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 - x_2 + x_3 = c \end{cases}$$

解 由系数行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & -1 \\ b & 1 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(a+c), \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ -1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 2(a+b)$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & c \end{vmatrix} = 2(b+c)$$

故方程组有惟一解,由(1－9)式可知

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{1}{2}(a+c) \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{1}{2}(a+b) \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{1}{2}(b+c) \end{cases}$$

三、n 阶行列式的定义

实际中,除了二、三阶行列式外,常常还会遇到阶数较高的行列式,为此我们需要定义更具普遍意义的 n 阶行列式.

再来考察三阶行列式(1－8).由

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

容易看到三阶行列式具有如下特征:

(1) 三阶行列式表示所有位于不同行不同列的3个元素乘积的代数和.3个元素的乘积称为行列式的项,可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \tag{1-10}$$

$j_1j_2j_3$ 为3级排列，当 $j_1j_2j_3$ 遍取了3级排列时，即得到三阶行列式的所有项(不包含符号)，共为 $3! = 6$ 项.

(2) 每一项都带有符号.项中行下标成自然排列时，如果其列下标 $j_1j_2j_3$ 为偶排列，项(1-10)取正号；如果 $j_1j_2j_3$ 为奇排列，项(1-10)就取负号.因此，称 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 为行列式的一般项.

所以三阶行列式可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中“$\sum\limits_{j_1j_2j_3}$”表示遍取所有3级排列 $j_1j_2j_3$ 时，对一般项

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

求和.

显然，二阶行列式也符合这些特征，并可记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

根据二、三阶行列式的特征，我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j = 1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-11}$$

称为 n **阶行列式**(其中横排称为**行**，纵排称为**列**，元素 a_{ij} 的第一下标和第二下标分别表示元素所处的行和列，称为**行标**和**列标**)，它表示为所有取自不同行及不同列的 n 个数乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-12}$$

的代数和.各项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号当行标依次构成自然排列时，若列标构成的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列，(1-12)式取正号；若 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列，(1-12)式取负号.即 n 阶行列式