高等职业专科学校教学用书

线性代数基础教程

主　编　李友彪
副主编　李胜峰　陈修成

哈尔滨地图出版社

高等职业专科学校教学用书

线性代数基础教程

XIANXING DAISHU JICHU JIAOCHENG

主　编　李友彪

副主编　李胜峰　陈修成

哈尔滨地图出版社

·哈尔滨·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数基础教程/李友彪主编. 一哈尔滨:哈尔滨地图出版社,2007.6

ISBN 978-7-80717-629-9

Ⅰ.线… Ⅱ.李… Ⅲ.线性代数一高等学校:技术学校一教材 Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第090049号

哈尔滨地图出版社出版发行
(地址:哈尔滨市南岗区测绘路2号　邮编:150086)
哈尔滨庆大印刷厂印刷
开本:850 mm×1 168 mm　1/32　印张:7.25　字数:198千字
2007年6月第1版　2007年6月第1次印刷
ISBN 978-7-80717-629-9
印数:1～1 000　定价:15.00元

前　言

本书是根据全国高等职业教育数学教学大纲的基本要求编写的高职教学用书.本书吸收了其他同类教材的优点，在体系和内容上做了全新的规划.

本书的主要内容有行列式、矩阵及其运算、n维向量、线性方程组、相似矩阵与矩阵的对角化、二次型、线性空间.其中第二章、第四章、第五章由大兴安岭职业学院的李友彪老师编写，第三章、第六章及习题答案由大兴安岭高级中学的李胜峰老师编写，第一章、第七章由大兴安岭职业学院的陈修成老师编写.

考虑到各专业的特点和基本要求，我们在编写过程中注意到以下几点：

1. 全书以矩阵为主线展开全部内容.在熟练掌握了矩阵的各种运算及其性质以后，后面的各章节中讨论的问题都可利用矩阵这一有力工具。

2. 本书在编写过程中，注意在内容上由浅入深、由易到难，将知识逐步展开，在方法上由基础到灵活不断提高与加强.

全书参考学时为56学时，前6章参考学时为48学时.

本书可作为高等职业教学用书，也可作为工程技术人员参考用书。

编　者

2007年6月

目　录

第 1 章　行列式 …… (1)
1.1　二阶与三阶行列式 …… (1)
1.2　逆序数与对换 …… (5)
1.3　n 阶行列式的定义 …… (8)
1.4　行列式的性质 …… (12)
1.5　行列式按行(列)展开 …… (18)
1.6　克拉默法则 …… (26)
第 2 章　矩阵及其运算 …… (35)
2.1　矩阵的概念 …… (35)
2.2　矩阵的运算 …… (39)
2.3　可逆矩阵 …… (48)
2.4　矩阵的分块 …… (53)
2.5　初等变换与初等矩阵 …… (61)
2.6　矩阵的秩 …… (69)
第 3 章　n 维向量及向量空间 …… (78)
3.1　n 维向量组的线性相关性 …… (78)
3.2　向量组的秩 …… (91)
3.3　向量空间 …… (97)
第 4 章　线性方程组 …… (112)
4.1　线性方程组的一般概念 …… (112)
4.2　解线性方程组 …… (114)
4.3　齐次线性方程组解的结构 …… (124)

4.4　非齐次线性方程组解的结构 …………………………… (133)
第 5 章　相似矩阵与矩阵的对角化………………………… (143)
5.1　向量的内积、长度及正交性 …………………………… (143)
5.2　方阵的特征值与特征向量 ……………………………… (150)
5.3　相似矩阵 ………………………………………………… (156)
5.4　对称矩阵的对角化 ……………………………………… (159)
第 6 章　二次型……………………………………………… (166)
6.1　二次型及其标准形 ……………………………………… (166)
6.2　化二次型为标准形 ……………………………………… (172)
6.3　正定二次型和正定矩阵 ………………………………… (181)
第 7 章　线性空间…………………………………………… (189)
7.1 线性空间的定义与性质 ………………………………… (189)
7.2　维数、基与坐标 ………………………………………… (194)
7.3　基变换与坐标变换 ……………………………………… (196)
7.4　线性变换 ………………………………………………… (200)
7.5　线性变换的矩阵表示式 ………………………………… (203)
参考文献……………………………………………………… (224)

第1章　行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质及其计算方法. 此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以上面方程的两端，然后相减，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2$；

消去 x_1，得 $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_{21}=a_{11}b_2-b_1a_{21}$。

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1b_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \tag{2}$$

(2)式中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1)中的位置，排成二行二列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表(3)所确定的二阶行列式.并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{4}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(4)的元素,简称为元.元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行;第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(4)的 (i,j) 元.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆.把 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为主对角线,把 a_{12} 到 a_{21} 的连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两个元素之积减去副对角线上的两个元素之积所得的差.利用二阶行列式的概念,(2)式中 x_1,x_2 的分子也可写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

那么(2)式可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意这里的分母 D 是由方程组(1)的系数确定的二阶行列式(称系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系

数 a_{11}，a_{21}所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1，b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22}所得的二阶行列式.

例 1　求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解　由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 =- 21,$$

因此

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} =- 3.$$

1.2　三阶行列式

定义 1.1　设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & K & a_{2n} \\ M & M & M & M \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{matrix} \tag{5}$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

(6)式称为数表(5)所确定的三阶行列式.

上述定义表明三阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,把 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的连线定义为主对角线,a_{13}, a_{22}, a_{31} 的连线定义为副对角线,而在上述的每一个乘积项中三个元的连线共有三条.则乘积的符号遵循的对角线法则是:在三个元的三条连线中若有一条与主对角线平行,则其对应的乘积项的符号为正号;若有一条与副对角线平行,则其对应的乘积项的符号为负号.(参看图 1.1)

事实上三条连线中有且只有一条与主对角线或副对角线平行.

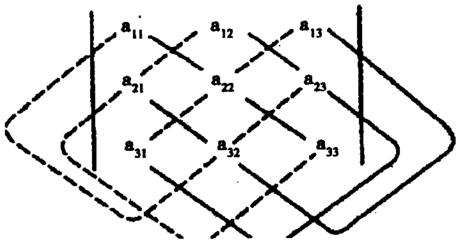

图 1.1

例 2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 2 & 1\\ -3 & 4 & -2\end{vmatrix}$$

解　按对角线法则,有

$$\begin{aligned}D&=1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)\\&\quad+(-4)\times(-2)\times 4-1\times 1\times 4\\&\quad-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3)\end{aligned}$$

$$=-4-6+32-4-8-24=-14$$

例 3 求解方程

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0$$

解 方程左端的

$$\begin{aligned}D&=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12\\&=x^2-5x+6\end{aligned}$$

由 $3x^2-5x+6=0$,解得 $x=2$ 或 $x=3$.

1.2 逆序数与对换

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式,为研究四阶及更高阶行列式,本节先介绍有关逆序数的知识,然后引出 n 阶行列式的概念.

先看一个例子.

引例 用 1,2,3 三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这个问题相当于说,把三个数字分别放在百位、十位与个位上,有几种不同的放法?

显然,百位上可以从 1,2,3 三个数字中任选一个,所以有三种放法;十位上只能从剩下的两个中任选一个,所以有两种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有一种放法.因此,共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

这六个不同的三位数是:

123,231,312,213,132,321.

在数学中，把考察的对象，例如上例中的 1,2,3 叫做元素. 上述问题就是：把三个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

对于 n 个不同的元素，也可以提出类似的问题：把 n 个不同的元素排成一列，共有几种不同的排法？

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(也简称排列).

n 个不同元素的所有排列的种数，通常用 p_n 表示. 由引例的结果可知 $p_3=3\cdot 2\cdot 1=6$.

仿照引例的取法及高中学过的有关排列组合的知识可得出计算 p_n 的公式是：

$$p_n = n\cdot(n-1)\Lambda\Lambda 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(例如对于 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有一个逆序. 一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数.

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列. 下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序. 设

$$p_1 p_2 \Lambda p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，如果比 p_i 大的且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就说 p_i 这个元素的逆序数是 t_i. 全体元素的逆序数之和

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

即这个排列的逆序数.

例 1 求出列 35214 的逆序数.

解 在排列 35214 中,

3 排在首位,逆序数为 0;

2 的前面比 2 大的数有两个,即 3 和 5,故逆序数为 2;

5 是最大的数,逆序数为 0;

1 的前面比 1 大的数有三个:3,2,5,故逆序数为 3;

4 前面比 4 大的数有一个 5,故逆序数为 1,于是这个排列的逆序数为 $t=0+2+3+0+1=6$.

为了研究 n 阶行列式的性质,先来讨论对换以及它与排列的奇偶性的关系.

在排列中,将任意两个元素对调,其余的元素不动,这种作出新排列的过程叫做对换.将相邻两个元素对换,叫做相临对换.

定理 1 一个排列的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

先证相邻对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_t\, a\, bb_1\Lambda b_m$,对换 a 与 b,变为 $a_1\cdots a_t\, b\, ab_1\,\Lambda\, b_m$. 显然 $a_1,\cdots,a_t;b_1,\Lambda,b_m$ 这些元素的逆序数经对换并不改变,而 a,b 两个元素的逆序数改变为:当 $a<b$ 时,经过换后 a 的逆序数增加 1 而 b 的逆序数不变;当 $a>b$ 时,经过对换后 a 的逆序数不变而 b 的逆序数减少 1,故排列 $a_1\cdots a_t\, a\, bb_1\Lambda\, b_m$ 与排列 $a_1\cdots a_t\, b\, ab_1\Lambda\, b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1\cdots a_t\, a\, b_1\,\Lambda b_m\, bc_1\,\Lambda\, c_n$,把它作 m 次相临对换变成 $a_1\cdots a_t\, abb_1\,\Lambda\, b_m\, c_1\,\Lambda\, c_n$,再做 $m+1$ 次相临对换,变成 $a_1\cdots a_t\, b\, b_1\,\Lambda\, b_m\, ac_1\Lambda\, c_n$. 总之,经过 $2m+1$ 次相临对换,排列

$$a_1\cdots a_t\, a\, b_1\,\Lambda\, b_m\, bc_1\,\Lambda\, c_n,$$

变成排列 $a_1\cdots a_t\, b\, b_1\,\Lambda\, b_m\, ac_1\Lambda\, c_n$.

所以这两个排列的奇偶性相反.

推论 **奇排列变成标准排列的对换次数为奇数，偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.**

证　由定理1知对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为0)，因此推论成立. 证毕.

1.3　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的结构. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{6}$$

容易看出：

(i)(6)式右边的每一项都恰好是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列. 因此，(6)式右端的任一项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里第一个下标(行标)排成标准次序123，而第二个下标(列标)排成 $p_1p_2p_3$，它是1,2,3三个数的某个排列. 这样的排列共有六种，对应(6)式右端共含六项.

(ii)各项的正负号与列标的排列对照：

带正号的三项列标排列是：123，231，312；

带负号的三项列标排列是：132，213，321.

经计算可知前三个排列都是偶排列，而后三个排列都是奇排列. 因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^t$，其中 t 为列标排列的逆序数.

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

其中 t 为排列 $p_1\ p_2\ p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，3 三个数的所有排列 $p_1\ p_2\ p_3$ 取和.

上面的形式可以推广到一般情形.

定义 3.1　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，并冠以符号 $(-1)^t$、得到形如

$$(-1)^t a_{1p_1}\ a_{2p_2} \Lambda\ a_{np_n} \tag{7}$$

的项，其中 $p_1\ p_2\ \Lambda\ p_n$ 为自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数. 由于这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如(7)式的项共有 $n!$ 项. 所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \Lambda\ a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ M & M & M & M \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}$$

简记作 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元. 按此定义的二阶、三阶行列式与 1.1 中用对角线法则定义的二阶、三阶行列式，显然是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值记号相混淆.

例 1　证明 n 行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & O & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\Lambda\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & N & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\Lambda\lambda_n;$$

其中未写出的元素都是 0.

证　第一式左端称为对角线行列式,其结果是显然的,下面只证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$,则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & N & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & N & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\Lambda a_{n1} = (-1)^t\lambda_1\lambda_2\Lambda\lambda_n.$$

其中 t 为排列 $n(n-1)\Lambda 2\cdot 1$ 的逆序数,故

$$t = 0+1+2+\Lambda+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}),$$　　证毕.

主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做上(下)三角形行列式,它的值与对角行列式一样.

例 2　证明下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ M & M & O & \\ a_{n1} & a_{n2} & \Lambda & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\Lambda a_{nn}$$

证　由于当 $j>i$ 时 $a_{ij}=0$，故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip}，其下标应有 $p_i\leqslant i$，即 $p_1\leqslant 1, p_2\leqslant 2, \cdots, p_n\leqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\Lambda p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\Lambda n$，所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^t a_{11}a_{12}\Lambda a_{nn}$. 此项的符号 $(-1)^t=(-1)^0=1$，故结论成立.

下面来讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^t a_{1p_1}\Lambda a_{ip_i}\Lambda a_{jp_j}\Lambda a_{np_n}$$

其中 $1\Lambda i\Lambda j\Lambda n$ 为自然排列，t 为排列 $p_1\Lambda p_i\Lambda p_j\Lambda p_n$ 的逆序数，对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 得

$$(-1)^t a_{1p_1}\Lambda a_{jp_j}\Lambda a_{ip_i}\Lambda a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\Lambda j\Lambda i\Lambda n$ 的逆序数为 r，则 r 为奇数；设新的列标排列 $p_1\Lambda p_j\Lambda p_i\Lambda p_n$ 的逆序数为 t_1，则

$$(-1)^{t_1}=-(-1)^t，故 (-1)^t=(-1)^{r+t_1}$$

于是

$$(-1)^t a_{1p_1}\Lambda a_{ip_i}\Lambda a_{jp_j}\Lambda a_{np_n}$$
$$=(-1)^{r+t_1}a_{1p_1}\Lambda a_{jp_j}\Lambda a_{ip_i}\Lambda a_{np_n}$$

这就表明，若对换乘积中两个元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变. 于是，经过若干次对换，使得列标排列 $p_1p_2\Lambda p_n$（逆序数为 t）变为自然排列（逆序数为 0）；行标排列则相应的从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\Lambda q_n$，其逆序数为 s，则有