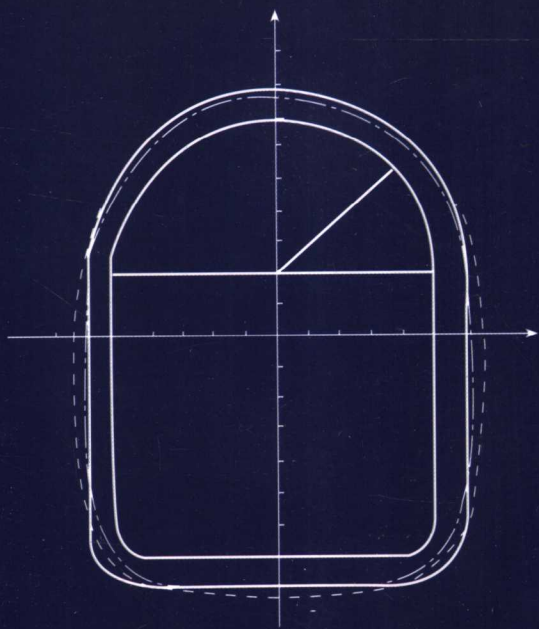


地下隧洞力学分析的复变函数方法

◎ 吕爱钟 张路青 著



科学出版社

www.sciencep.com

地下隧洞力学分析的复变函数方法

吕爱钟 张路青 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书利用平面弹性复变函数方法,对无限域孔口问题进行了深入研究,可以作为隧洞围岩力学分析的理论基础之一。第1~3章主要讨论了利用复变函数方法求解平面弹性孔口问题的基本知识;第4章和第5章分别给出了平面应变和非平面应变条件下单个隧洞问题的围岩力学分析;第6章讨论了不同侧压力系数和几何约束条件下的孔形优化问题;第7~10章讨论了多洞问题围岩应力场和位移场的 Schwarz 交替法求解及其在双洞位移反分析中的实际应用;第11章利用单洞问题的位移解,深入探讨了平面弹性条件下位移反分析对三个地应力分量、弹性模量和泊松比的反演唯一性问题。

本书可以供水电、矿山、交通、机械制造、板壳结构等工程的设计、施工或相关研究工作的工程师、科研人员和有关高等院校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

地下隧洞力学分析的复变函数方法/吕爱钟,张路青著. —北京:科学出版社,2007

ISBN 978-7-03-019000-0

I. 地… II. ①吕…②张… III. 地下-隧道工程-工程力学-复变函数
IV. U459.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 073653 号

责任编辑:胡 凯 刘凤娟/责任校对:钟 洋

责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年6月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2007年6月第一次印刷 印张: 13 1/2

印数: 1—2 000 字数: 241 000

定价: 38.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

吕爱钟教授和张路青博士所著的《地下隧洞力学分析的复变函数方法》一书即将与读者见面。该书是目前用复变函数方法解决孔口力学问题最前沿的一本学术专著。

平面弹性复变函数方法的经典著作当属前苏联 Мусхелишвили 所著的《数学弹性力学的几个基本问题》。山东科技大学陈子荫教授所著《围岩力学分析中的解析方法》中的平面弹性复变方法与 Мусхелишвили 的著作相比,更适合中国读者的阅读习惯,并增加了部分内容。《地下隧洞力学分析的复变函数方法》与以往其他著作和研究成果相比,很多内容的研究都更加系统和深入,书中给出了大量的计算实例使该书别具特色。

该书主要创新点如下:提出了求解地下隧洞映射函数的新方法;单个地下隧洞围岩力学分析的平面应变解法更具有一般性,并对算法中按常规方法计算隧洞远处应力和位移所出现的异常现象进行了数学处理;推导了在轴向应变等于任意常数情形下任意形状隧洞围岩应力分析的全应变问题复变函数方法;提出的孔形优化方法(一类几何反问题)为合理确定隧洞的最优断面形状提供了一条新途径;实现了双孔洞问题及多孔洞问题应力场和位移场分析的迭代求解方法。

多孔洞的平面问题在力学上属于多连通域问题。国内外学者一直设法寻找一个行之有效的求解办法,但其工作只限于模拟实验上的定性分析和简单孔问题的一定布置方式。自 20 世纪 60 年代以来,国内外学者开始使用 Schwarz 交替法试图解决两圆孔问题和两椭圆孔问题,由于在迭代过程中两复应力函数过于复杂而只能完成 1 次或 1.5 次的迭代计算。以往研究仅限于圆孔、椭圆孔、裂缝等多连通域问题的研究,对于其他形状的双孔问题或多孔问题,除了该书作者外还未发现其他相关的文献。该书使用复变函数中的保角变换工具和 Schwarz 交替法对多连通域的孔洞问题进行了求解,着重讨论了任意多孔洞平面问题有效的解析算法。

该书中多孔洞问题的求解方法不但适用于地下工程中的多条平行隧洞的开挖问题,而且也适用于机械制造、压力容器设计及航空航天器械设计中的多孔洞设计问题。以两任意孔洞的高精度解析解为基础,作者还给出了位移反分析在三峡工程两工程试验洞的应用实例,获得了较为满意的反演结果。另外,书中还就地下工程中弹性位移反分析法所能反演出的参数个数进行了更加全面而深入的探讨。

在计算机高速发展的今天,数值方法无疑是解决岩石力学问题的强有力工具。

但解析方法是基础,如果这个基础不巩固,那么数值方法应用和发展的可信度就无从谈起。解析方法有助于探明问题的实质,而且可以验证数值方法的正确性,它与数值分析相结合则可以发展出许多有效的混合解、半解析解等。

书中理论分析严密,内容新颖丰富,很多研究内容都是全新的,填补了国内外空白。作者在《中国科学》、《Journal of Applied Mechanics》、《Journal of Engineering Mechanics》等重要杂志上发表的学术论文,说明作者的许多研究成果已经得到国内外同行专家的关注。相信本书的出版必将为岩石力学领域增添新的芬芳。

钱七虎

中国工程院院士、国际岩石力学学会副主席、
中国岩石力学与工程学会理事长

前 言

在一定条件下,地下隧洞围岩的应力分析在力学上可化归为无限平面中的孔口问题。平面弹性复变函数方法特别适合求解地下孔口问题,它是地下隧洞力学分析的理论起点。

弹性力学平面问题的应力解法最终归结为:在给定的应力边界条件下求解一个双调和方程(四阶偏微分方程)。在不采用复变函数方法时,它的解答一般都不可能直接求出,在具体求解问题时,一般只能采用逆解法或半逆解法。这就产生一种印象,好像求解主要靠试凑的办法,在边界形式或荷载分布稍微复杂的情形下显得难以着手。有了复变函数这种数学工具,则可以直接求出双调和方程的通解,然后再利用边界条件去确定具体问题的解。沿着这样的求解途径可发展出一套完整的解法。

本书第1章简述了平面弹性复变方法的基本知识;第2章着重讲述了平面弹性复变方法中的柯西积分解法,并给出了无限平板中带有孔洞问题的几个简单算例。

由第2章可以看出保角变换在平面弹性问题解法中的重要作用。变换的结果是把物理平面上一个给定的区域变成另一个像平面上具有简单边界形状的区域,如单位圆内或单位圆外。通过变换,虽然使得原问题的应力(位移)边界条件的形式变得复杂,但这样引起的麻烦,由于变换后得到更简单的边界几何形状而得到补偿。这种方法对于求解孔口问题特别有效,对于无限大弹性体内的单孔口问题尤为简单。有些形状比较复杂的孔口问题,如果不采用这种方法,几乎无法求得解析解,对于多孔口问题可结合 Schwarz 交替法进行求解,这是第7,8,9章的研究内容。

第2章用柯西面积分法求解了无限域中有一个简单形状的孔口问题,对于圆孔、椭圆孔映射函数是准确的,而对于正方形孔映射函数是近似的。对于许多有工程意义的孔口问题,不能像圆孔、椭圆孔那样仅由有限项组成准确的映射函数,实际计算时只能取泰勒级数的有限项求出实际孔形的近似映射函数,不用取太多的项就能很好地逼近实际的孔形。对于怎样寻找这种变换所需的映射函数,在第3章做了专门的讨论。

对于单个隧洞围岩应力分析的平面应变问题,可利用第2章的柯西积分方法进行求解。以往的工作大都在求出两个复应力解析函数即止,或者再求出孔边几个典型点的应力分量(这是能够容易做到的),而并未提供一套能进一步求出围岩内各点应力分量的公式。山东科技大学陈子荫教授的硕士研究生刘宏才(1987)在他的硕士论文中推导了讨论域内任一点应力分量的公式,并给出了相应的计算程序。该论文

所给出的公式和计算程序只限于映射函数的负幂次项取 8 项的情形。本书参照该文献推导出映射函数的负幂次项取任意项情形下的解,编制了应力和位移计算程序,以适用于最一般情况。另外,还对算法中按常规方法计算隧洞远处应力和位移所出现的异常现象进行了数学处理,以保证计算结果的正确。

第 4 章所进行的隧洞围岩力学分析是按平面应变来处理的,而依据平面应变问题的假设条件,要求隧洞的轴向必须为主应力方向。显然,能够完全满足这种受力状态的地下隧洞较少。实际的地下隧洞若开挖的方向并非为主应力方向,也就是说外载不垂直于隧洞的轴线,且此时隧洞的断面及外载沿轴线不变,并认为隧洞轴向应变等于零,Brady 称这样的问题为全平面应变问题。Brady(1978)提出了确定地下隧洞弹性围岩应力场的全平面问题的计算模型。采用复变函数的方法,陈子荫教授的硕士研究生范秋雁(1987)在他的硕士论文中,将此计算模型用于处理半圆拱形隧洞的围岩应力分析。本书作者吕爱钟将上述条件放宽,在第 5 章中推导了在轴向应变等于任意常数情形下任意断面形状隧洞围岩应力分析的复变函数方法,并编制了应力和位移计算程序。

第 6 章讲述了孔形优化的有关内容,这为合理确定隧洞的最优断面形状提供了一条途径。隧洞的开挖形状对地下工程的稳定性有很大的影响,这是工程实践中已经知道的事实,如何正确认识这个问题呢?由第 4,5 章可知,原始地应力作用下不同的隧洞开挖形状,可以产生不同的应力场。若开挖形状不当,在围岩中将产生非常大的应力集中,从而造成围岩的破坏,不利于隧洞的维护。从解决问题的方法来看,确定隧洞的最优开挖形状是固体力学中的一类反问题。当已知了岩体的力学参数,并假定应力场所必须满足的预定条件,而把隧洞的开挖形状视为待求的未知量时,这是一类几何反问题,在固体力学中,这就是孔形优化所研究的内容。

由不同优化准则下的孔形优化研究可知,本书作者吕爱钟(1996)所提出的孔形优化准则是一个最优的优化准则,即以孔边绝对值最大的切向应力最小为优化准则来寻找最优的孔洞形状。用该准则所得的孔形在孔边可获得最小的应力集中,作者为此编制了相应的计算程序。在第 6 章最后一节还讨论了洞边不出现拉应力条件下的隧洞孔形优化,从而确定隧洞的最优开挖形状。隧洞最优开挖形状的确定方法是在围岩始终为弹性的假定下进行的,所得的最优开挖形状在洞边可获得最小的应力集中,这样可以最大限度地防止围岩的破坏。若原始地应力较大,可能再好的隧洞开挖形状也不能避免围岩的破坏,围岩产生塑性区是不可避免的。通过计算发现,与其他形状的隧洞比较,按弹性假定求出的最优洞形,它的塑性区面积也为最小。

在地下工程稳定性分析和设计中,还经常会遇到可以视为平面应变假定的两平行洞问题。及多平行洞问题多孔洞的平面问题在力学上属于多连通域问题。国内外学者一直设法寻找一个行之有效的求解办法,但其工作只限于模拟实验上的

定性分析和简单孔问题的一定布置方式。自 20 世纪 60 年代以来,国外学者(V. G. Ukadgaonker, R. W. Zimmerman)开始使用 Schwarz 交替法试图解决两圆孔问题和两椭圆孔问题,由于在迭代过程中两复应力函数过于复杂而只能完成 1 次或 1.5 次的迭代计算。本书作者曾对任意尺寸和任意布置方式下的两圆孔进行了 Schwarz 交替法求解的研究,但也仅完成 2 次迭代计算。另外,计算发现:迭代次数的增加使计算结果迅速收敛。然而,较少的迭代次数是难以满足高精度要求的。T. J. Kim 等和 I. W. Yu 等曾对含有多个圆形夹杂物的平面弹性问题进行了 Schwarz 交替法的研究。似乎仅 H. Hasebe 等(1997)利用复变函数方法对较复杂双孔问题进行了混合边值问题的研究,但他们所提出的方法仅适用于对称的双连通域问题。

由上述研究状况可以看出,已有的研究仅限于圆孔、椭圆孔、裂缝等多连通域问题。对于其他形状的双孔问题或多孔问题,除本书作者外,至今还没有看到其他有关的文献出现。由于多连通域不可能单值地保角映射到单连通域,以致将孔外域映射到单位圆域的求解方法不能直接用于多连通域问题的求解。为此,本书准备使用复变函数中的保角变换工具和 Schwarz 交替法对多连通域的孔洞问题进行求解,着重讨论任意多孔洞平面问题的有效解析算法。

在第 7 章中介绍了 Schwarz 交替法的基本原理,并利用该法对两圆形隧洞进行了应力求解。由计算可知:当两孔洞相距很近时,由 1 次迭代求出的围岩应力不能满足精度要求,其结果与精确解相差甚远;2 次迭代结果的精度远远高于 1 次迭代结果的精度;对于两圆形隧洞这样简单的问题,即使没有采用保角变换的方法进行求解,迭代过程中的两复应力函数也可以解析地表达出来。尽管这样,在消除两圆孔周边多余边界条件的过程中,需要将两复应力函数在建立于两个圆孔中心的局部坐标系之间反复进行坐标变换,坐标变换使迭代过程中两复应力函数的复杂程度迅速增加,并且 2 次迭代后完全显式的两复应力函数已经变得十分冗长。本书作者张路青认为,这也许是国外一些学者利用 Schwarz 交替法仅对两圆孔问题求解 1 次或 1.5 次迭代的原因之一。

第 8 章讨论了任意形状双洞应力场及位移场的求解。由于每次求解必须在映射平面上进行,为消除孔边的多余面力必须将两复应力函数或孔边坐标点分别在两个局部坐标系和两个相应的映射坐标系之间进行反复变换。为了进行这样的变换,需要引入映射函数的逆函数(称为逆映射函数)。对于两复杂形状孔洞问题的求解,由于孔洞形状的复杂性,映射函数和逆映射函数比圆孔、椭圆孔复杂得多,所以其求解过程也比两圆孔问题复杂得多,即使完成 1 次迭代都是十分困难的。作者认为,这也许是未曾发现涉及复杂形状多连通域问题复变函数解法相关文献的主要原因。

从解题过程将可清晰地看出:Schwarz 交替法求解任意形状双洞问题的主要

困难有两个:一是求解单洞问题时,求出的两个复应力函数是在映射像平面表示的,当孔形复杂时,这两个复应力函数也相当复杂,所以直接根据这两个复应力函数难以解析地求出在另一个拟开挖孔洞周边的多余面力;二是如何将复杂的多余面力表示为简单的形式(例如级数形式),以利于方便地进行柯西积分,使后续迭代求解顺利进行。所以如何求出多余面力,并将多余面力表示为简单的形式是 Schwarz 交替法得以实现的关键。

对于复杂形状的双洞问题,由于映射函数和逆映射函数的引入,直接对两复应力函数进行坐标变换是不可行的。为此,作者张路青使用坐标点变换的方法来获得一个孔的开挖在另一假定的孔边所引起的多余面力。由于多余面力分布函数可用以 2π 为周期的复变函数来表示,所以作者将多余面力用复数级数来逼近,以使多余面力的形式变得简单,这为 Schwarz 交替法迭代求解的顺利进行提供了重要保证。

第 8 章所提出的简单交替算法是针对任意形状双洞在任意布置方式下的平面弹性应力边值问题,相应的基本公式推导过程适用于所有双孔洞的平面弹性问题,并都可使 Schwarz 交替法的迭代计算顺利进行。由于所提出的简单交替算法有效且计算迅速,所以可根据具体的精度要求进行任意次迭代求解,并可获得满意的计算结果。

据对国内外文献的不完全调查,同时考虑二个以上孔洞相互影响下解析算法的研究是非常少的,只有 A. E. Green(1940)利用级数展开的方法对多个圆孔问题进行了研究,并给出了不同尺寸圆孔任意布置方式下应力场的一般解,R. C. J. Howland(1939)给出了板中包含一组圆孔下的应力函数。然而,上述研究仅限于圆形孔洞问题,并且其研究成果是在一定的限制条件下得到的。对于其他孔形下多孔问题解析算法的研究,至今还未曾见有文献报道。从第 8 章 Schwarz 交替法的解题过程来看,对于任意形状和布置方式下的多孔洞(二个以上)问题也可以用这种交替法进行迭代求解,但遇到的技术困难会更大。第 9 章在获得基本公式及完成计算程序后,作者张路青给出了相应的精度分析,其中包括与三个并排布置等尺寸圆孔问题精确解的对比、复杂形状的三个孔洞对称布置下的对称性检验等。另外,本书还给出了两个算例:一是四个并排布置等尺寸圆形引水洞的应力计算;二是讨论了椭圆孔附近的多个小圆孔布置方式对椭圆孔周边应力集中程度的影响程度。

针对地下工程中经常会遇到两平行洞室的开挖问题,如采矿工程中的两平行巷道、交通工程中的两平行隧洞等,本书在第 10 章给出了利用双洞平面位移解的反分析方法。如果在待开挖洞附近有现成的其他洞室(如勘探洞或地质探洞等),则可向拟开挖洞附近布置测点,以便观测相应的开挖位移。利用位移反分析来反演岩体的力学参数具有一定的可靠性,以往的理论研究与应用大都限于单条隧洞

的情形,利用两条隧洞的位移反分析很少有人涉及。当两隧洞相距较近时,进行位移反分析必须考虑两条隧洞开挖的相互影响,这就是第 10 章重点考虑的内容。就计算过程而言,第 10 章的位移反分析比单条隧洞的位移反分析复杂一些。从理论来讲,若两条隧洞相距较近且不同期开挖,第 10 章的方法应该优于以往的方法。第 10 章最后还给出了双洞位移反分析在三峡工程两工程试验洞的应用实例,其中对垂直试验洞洞轴的水平地应力分量和岩体的弹性模量进行了反演计算,并获得了较为满意的反演结果。

自 20 世纪 70 年代以来,位移反分析法逐步发展起来并取得了令人瞩目的研究成果,由于它可得到工程设计所关心的原始地应力和围岩力学参数,并具有一定的可靠性而日益被现场工程师们所看好。但是,位移反分析法自其产生以来就存在着参数反演唯一性的问题,所以应当慎重考虑待反演参数的个数以避免出现反演结果的多解性。本书作者吕爱钟在 1987~1988 年曾对这一问题进行了较为系统的研究,给出了参数可辨识条件,并得出了以下结论:弹性位移反分析不能辨识出地应力和围岩力学性质所有参数;地应力和弹模不能同时为要辨识的未知量;量测点的布置对参数的可辨识性有影响,若量测位置选择不当,可使某些参数本来为可辨识的而由此导致为不可辨识的。当时对围岩弹性参数及地应力可辨识性的探讨时考虑的不够全面,具体表现在:没有考虑剪切地应力的作用,并认为剪切地应力等于零。本书第 11 章没有这些人为假定,就地下工程中弹性位移反分析法所能反演出的参数个数进行了全面深入的探讨。

本书第 1~6 章由吕爱钟撰写,第 7~11 章由张路青撰写,其中有些章节的内容参考了山东科技大学陈子荫教授编著的《围岩力学分析中的解析方法》一书。本书第 3,6~11 章大部分内容都是本书作者的研究成果,而第 4,5 章中的部分内容借鉴和引用了刘宏才高工和范秋雁教授的研究成果。

本书的很多内容为国家自然科学基金和山东省、煤炭部自然科学基金项目的研究成果,其中有些项目是在山东科技大学陈子荫教授的主持下完成的。书中有些内容是本书作者张路青博士论文(导师为杨志法教授)的研究内容。在此,作者对陈子荫教授、杨志法教授、范秋雁教授和刘宏才高工表示深深的谢意。本书的出版得到国家自然科学基金(50279018)在出版经费方面的大力支持,作者不胜感谢。

由于作者水平所限,如有不当之处,恳请读者不吝赐教。

作 者

2005 年 3 月

目 录

序

前言

1	平面弹性复变方法的基本知识	1
1.1	双调和函数的复变函数表示	1
1.2	应力分量和位移分量的复变函数表示	1
1.3	$\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的确定程度	2
1.4	边界条件的复变函数表示	3
1.5	有限多连通域和无限域中 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的形式	3
1.6	保角变换与正交曲线坐标	5
2	平面弹性复变方法的柯西积分解法	8
2.1	平面弹性复变方法基本解法概述	8
2.2	柯西积分解法产生的渊源	8
2.3	单连通域中的柯西积分公式	8
2.4	用于单位圆域的公式及 Harnack 定理	9
2.5	无限平板中带有有一个孔洞问题的几个简单算例	11
2.5.1	解题的基本过程及基本公式	11
2.5.2	无限平板中一半径为 R 圆孔的解	13
2.5.3	无限平板中含有一椭圆孔的单向拉伸	16
2.5.4	无限平板中含有一正方形孔的单向拉伸	22
3	地下隧洞(巷道)映射函数的近似求法	27
3.1	概述	27
3.2	以 Laurent 级数为基础的复合形法	28
3.2.1	确定映射函数的基本原理和步骤	28
3.2.2	映射函数的约束条件	30
3.2.3	程序及计算实例	31
3.3	以 Schwarz-Christoffel 积分公式为基础的混合罚函数法	34
3.3.1	多角形逼近法的基本原理及基本公式	35
3.3.2	最优化方法确定映射函数的原理及步骤	38
3.3.3	程序及计算实例	40

3.3.4 结语	41
3.4 非圆形巷道封闭整体式支护映射函数确定的新方法	43
3.4.1 引言	43
3.4.2 只考虑支护横断面内边界时映射函数的确定方法	44
3.4.3 同时考虑支护横断面内外边界时映射函数的确定方法	47
3.4.4 结语	49
4 地下隧洞(巷道)围岩的力学分析——平面应变问题	50
4.1 概述	50
4.2 复应力函数 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 的求解公式	51
4.3 由 $\varphi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 求围岩内任一点的应力分量	59
4.4 应力计算中异常现象的处理及应力计算程序和实例	62
4.4.1 应力计算中异常现象的处理	62
4.4.2 应力计算程序和实例	65
4.5 隧洞开挖所引起的围岩位移	67
4.5.1 隧洞位移的解法	67
4.5.2 位移计算中异常现象的处理及位移计算程序	72
5 地下隧洞(巷道)围岩的力学分析——非平面应变问题	74
5.1 概述	74
5.2 基本假设及基本方程	74
5.3 ϵ_z 为非零常数时平面问题的复变函数解法	77
5.3.1 应力的求解	77
5.3.2 位移的求解	78
5.3.3 结语	80
5.4 反平面问题的复变函数解法	80
5.5 地应力主向与巷道轴线具有交角时围岩的应力分析	83
5.5.1 基本原理及公式	83
5.5.2 程序及算例	86
5.5.3 结语	93
6 孔形优化——隧洞最优断面形状的确定	94
6.1 概述	94
6.2 以应力第一不变量不变为条件的孔形优化——调和孔	97
6.3 以孔边切向应力为预定条件的孔形优化	100
6.3.1 孔边切向应力达到极大值的证明	100
6.3.2 求解孔边切向应力的基本公式	100
6.3.3 确定最优孔形的原理	101

6.3.4	孔形的基本要求及设计变量的确定	102
6.3.5	算例	103
6.3.6	结语	108
6.4	地下巷道最优开挖形状的确定方法	109
6.4.1	洞边不出现拉应力前提下的巷道孔形优化	109
6.4.2	最优的巷道开挖形状可保证围岩的破坏程度最小	110
6.4.3	结语	113
7	多孔洞问题平面解析算法的初步研究	115
7.1	概述	115
7.2	Schwarz 交替法的基本原理	116
7.3	两圆形隧洞的 Schwarz 交替法应力求解	117
7.4	应力计算结果的精度分析	120
7.4.1	由孔边多余面力来衡量迭代结果的精度	121
7.4.2	多余面力对围岩应力状态的影响程度	122
7.4.3	利用对称性来检验迭代结果的精度	123
7.5	不同条件下的围岩应力状态	123
7.6	结语	126
8	任意形状双孔洞问题应力场及位移场的求解	127
8.1	任意形状双孔洞问题 Schwarz 交替法求解存在的困难	127
8.2	逆映射函数的确定	128
8.3	逆映射函数的精度分析	129
8.4	只存在洞 1 时两复应力函数的求解	131
8.5	多余面力的求解思路	135
8.6	利用坐标点变换来确定洞 2 周边的多余面力	136
8.7	$f_{12}(\sigma_2)$ 的级数逼近	137
8.8	反面力 $-\sum_{k=-L}^L D_k \sigma_2^k$ 作用下只存在洞 2 时复应力函数的求解	138
8.9	Schwarz 交替法求解应力场	138
8.10	求解位移场的基本公式	139
8.11	收敛精度的讨论	141
8.11.1	多余面力的逼近精度	142
8.11.2	利用洞边的多余面力进行精度分析	143
8.11.3	多余面力对围岩应力的影响程度	145
8.11.4	利用洞边的环向应力及位移进行精度分析	146
8.12	交替法与有限单元法计算结果的比较	147

8.12.1	应力结果的比较	147
8.12.2	位移结果的比较	148
8.13	交替法与精确解的比较	149
8.14	两平行隧洞在不同荷载和布置方式下的应力集中	150
8.15	结语	153
9	任意断面形状多孔洞问题应力场的求解	154
9.1	概述	154
9.2	Schwarz 交替法求解多孔洞问题的基本原理	154
9.3	应力场分析的基本公式	155
9.4	Schwarz 交替法与已有精确解的对比	157
9.5	三洞室对称布置时围岩应力计算及精度分析	159
9.6	四相邻引水隧洞的围岩应力计算	160
9.7	多个小圆孔布置方式对椭圆孔孔边应力集中的影响	162
9.8	结语	167
10	两相邻隧洞围岩位移解析解在位移反分析中的应用	168
10.1	概述	168
10.2	原理、方法及算例	169
10.2.1	测点与测点位移	169
10.2.2	阻尼最小二乘法位移反分析原理	169
10.2.3	两个算例的研究	170
10.3	在三峡工程两工程试验洞的应用	172
10.3.1	工程地质条件	172
10.3.2	位移测点布置及位移量测	175
10.3.3	反演结果	176
10.3.4	分析与讨论	177
10.4	结语	178
11	弹性位移反分析唯一性的探讨	179
11.1	引言	179
11.2	参数可辨识性条件	179
11.3	单条隧洞存在时的位移解	180
11.4	反演唯一性的探讨	182
11.4.1	参数反演唯一性的一般性讨论及结论	182
11.4.2	$g_i(z)(i=1,2,\dots,6)$ 间线性相关性的判断方法	184
11.4.3	圆形隧洞条件下参数反演的唯一性	185
11.4.4	椭圆形隧洞条件下参数反演的唯一性	188

11.4.5 复杂形状隧洞条件下参数反演的唯一性	190
11.5 结语	190
参考文献	192

1 平面弹性复变方法的基本知识

1.1 双调和函数的复变函数表示

在体力为常数的情形下,弹性力学平面问题的应力解法最终归结为:在给定的应力边界条件下求解一个双调和方程

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (1.1)$$

式(1.1)中的 U 为应力函数,它为一双调和函数。

如果体力可以不计,则用应力函数 U 表示的应力分量为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (1.2)$$

于是,按应力求解应力边界问题时,如果体力是常量,就可由偏微分方程(1.1)求解应力函数 U ,然后用式(1.2)可求出无体力情形下的应力分量。但这些应力分量在边界上应当满足应力边界条件,在多连通域的情况下,有时还须考虑位移单值条件。式(1.1)是偏微分方程,在不采用复变函数方法时,它的解答一般都不可能直接求出,在具体求解问题时,一般只能采用逆解法或半逆解法。这就产生一种印象,好像求解主要靠试凑的办法,在边界形式或荷载分布稍微复杂的情形下更显得难以着手。

然而,有了复变函数这种数学工具,可以直接求出式(1.1)的通解,然后再利用边界条件去确定具体问题的解,沿着这样的求解途径可发展出一套完整的解法。

1898年 Goursat 得出式(1.1)的通解为^[1,2]

$$U = \operatorname{Re}[\theta_1(z) + \bar{z}\varphi_1(z)] \quad (1.3)$$

于是可见,在常体力的平面问题中,应力函数 U 总可以用复数 z 的两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 来表示。

1.2 应力分量和位移分量的复变函数表示

两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 的具体形式一旦由边界条件确定下来之后,利用应力分量与应力函数的关系(式(1.2))、应力分量与应变分量的关系(物理方程)、应变分量与位移分量的关系(几何方程),就可以把应力和位移分量写成两个解析

函数以某种方式联系的表达式。

首先把应力分量用复变函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\theta_1(z)$ 来表示。为使应力分量的复变函数表达式写得简洁,通常不直接写成三个分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 各自的复变函数表示,而写成 $\sigma_x + \sigma_y$ 及 $\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}$ 的复变函数表示。当然,在这个基础上写出三个应力分量的各自的复变函数表示是没有困难的。

经推导,应力分量的复变函数表示为^[1,2]

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] \quad (1.4)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \theta_1''(z)] \quad (1.5)$$

引入另一个解析函数 $\psi_1(z)$, 并令 $\psi_1(z) = \theta_1'(z)$, 则式(1.5)改写为

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad (1.6)$$

把 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$ 称为复应力函数。

只要已知 $\varphi_1(z)$ 及 $\psi_1(z)$, 就可以把式(1.6)右边的虚部和实部分开,由虚部得出 τ_{xy} , 由实部得出 $\sigma_y - \sigma_x$ 。这样 $\sigma_y - \sigma_x$ 和式(1.4)给出的 $\sigma_x + \sigma_y$ 极易求得 σ_x 和 σ_y 。最终所得结果为

$$\tau_{xy} = \operatorname{Im}[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad (1.7)$$

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] - \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad (1.8)$$

$$\sigma_y = 2\operatorname{Re}[\varphi_1'(z)] + \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \quad (1.9)$$

经推导,位移分量的复变函数表示为^[1,2]

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} \quad (1.10)$$

$$(1.10) \text{ 式中 } \kappa = \begin{cases} 3-4\mu, & \text{平面应变,} \\ \frac{3-\mu}{1+\mu}, & \text{平面应力} \end{cases} : G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \text{ 其中 } E \text{ 为弹性模量, } \mu \text{ 为泊松比。}$$

1.3 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 的确定程度

在 1.2 节中讲到,若能得到满足给定边界条件的两个解析函数 $\varphi_1(z)$ 和 $\psi_1(z)$, 就可求出应力分量及位移分量。现在,要提出的问题是:不同的 $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ 是否对应不同的应力分量和位移分量? 答案是否定的,即 $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ 在一定范围内的改变可以得到相同的应力和位移。

可以证明:若只要求 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 相同,可以将 $\varphi_1(z)$ 替换为 $\varphi_1(z) + icz + \gamma$, 将 $\psi_1(z)$ 替换为 $\psi_1(z) + \gamma'$ 。其中, c 是任意实常数, γ, γ' 为任意复常数。

若还要使 $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ 的改变不影响位移分量,则 $\varphi_1(z), \psi_1(z)$ 可改变的范围要缩小。只要求应力不变,可以独立地任选 c, γ, γ' , 若还要位移分量不变,则只能选 $c=0$, 而 γ, γ' 不再能互相独立任选了,即此时只能以 $\varphi_1(z)$ 代以 $\varphi_1(z) + \gamma, \psi_1(z)$