

新世纪高校**金融学**教材译丛

# 金融市场中的 经济学与数学导论

Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets

亚克沙·萨维塔尼奇  
(Jakša Cvitanić)

费尔南多·萨帕特罗  
(Fernando Zapatero)

著

吕彦儒 刘富兵 译




上海财经大学出版社

新世纪高校金融学教材译丛

# 金融市场中的经济学与数学导论

亚克沙·萨维塔尼奇  
(Jakša Cvitanić) 著  
费尔南多·萨帕特罗  
(Fernando Zapatero)  
吕彦儒 刘富兵 译

 上海财经大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

金融市场中的经济学与数学导论/(美)萨维塔尼奇(Cvitanić, J.), (美)萨帕特罗(Zapatero, F.)著; 吕彦儒, 刘富兵译. —上海: 上海财经大学出版社, 2007. 5

(新世纪高校金融学教材译丛)

(书名原文: Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets)

ISBN 978-7-81098-870-4/F · 816

I. 金… II. ①萨…②萨…③吕…④刘… III. ①金融市场-高等学校-教材②金融市场-经济数学-高等学校-教材 IV. F830 · 9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 011952 号

责任编辑 李成军

封面设计 周卫民

JINRONG SHICHANG ZHONG DE JINGJIXUE YU SHUXUE DAOLUN  
金融 市 场 中 的 经 济 学 与 数 学 导 论

亚克沙·萨维塔尼奇

(Jakša Cvitanić)

著

费尔南多·萨帕特罗

(Fernando Zapatero)

吕彦儒 刘富兵

译

---

上海财经大学出版社出版发行  
(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)  
网 址: <http://www.sufep.com>  
电子邮箱: [webmaster@sufep.com](mailto:webmaster@sufep.com)

全国新华书店经销

上海译文印刷厂印刷

宝山葑村书刊装订厂装订

2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷

---

787mm×960mm 1/16 27.5 印张 569 千字

印数: 0 001—4 000 定价: 46.00 元

献给

Vesela、Lucia、Toni

以及

Maitica、Nicolás 和 Sebastián

## 注 释

$A(t,s)$	美式期权价格
$B$	银行账面值
$c$	消费或消费率
$c(t,s)$	看涨期权价格
$C(t,s)$	未定权益价格
$P(t,s)$	看跌期权价格
$P$	债券价格
$r$	利率
$S$	股票价格
$t$	当前时间
$T$	到期日, 终端日期
$U$	效用函数
$V$	值函数
$W$	布朗运动
$X$	财富过程
$Z$	状态价格密度
$\delta$	股票持有量
$\Delta X$	$X$ 的变化量, 即 $X(t_{i+1}) - X(t_i)$
$\mu$	扩散过程的漂移项, 均值回归率
$\pi$	组合持有量
$\Pi$	组合持有比率
$\rho$	相关系数
$\sigma$	波动率, 扩散参数
$\tau$	随机时刻, 停时
$\omega$	随机结果

$\bar{X}$	$X$ 的贴现值
$\hat{X}$	$X$ 的最优值
$P[A]$	事件 $A$ 的概率
$E[X]$	$X$ 的期望值
$E_t(X)$	$X$ 关于信息集 $t$ 的条件期望
$P^*[A], p^*$	风险中性概率
$E^*(X)$	风险中性概率下 $X$ 的期望值
$x := y$	$x$ 被定义成 $y$
$\sigma^{Tr}$	矩阵 $\sigma$ 的转置
$\log(x)$	自然对数, 即 $\ln(x)$

# 前 言

## 我们为什么写作本书

金融市场的主题对许多人来说是很具吸引力的,这些人包括关心金钱和投资的人、关心社会福利的人、喜欢赌博的人、喜欢应用数学的人等。我们,也就是本书的作者,关心其中的很多事情(当然不包括赌博),但我们最为关心的却是教学。写作本书的主要原因是,由于一直以来,我们都坚信可以成功地将金融市场中的经济学与数学知识教给绝大多数人(再次声明,我们不关心赌徒)。为什么我们一直从事教学事业,而不是像我们以前的学生一样在金融行业中求职赚钱呢?因为他们体会不到为热情的读者写书的乐趣。

## 先决条件

本书可以作为不同水平以及不同层次的本科生和研究生的教材。除了第一章是介绍性的章节外,其他各章都是从单期模型开始,然后扩展到多期模型,最后以连续时间模型结束。单期模型和多期模型只需要基本的微积分知识以及简单的概率统计课程即可。这些章节适用于经济学、工商管理及其相关专业的三年级或四年级本科生,当然也适用于数学系及工科低年级的学生。如果你想阅读连续时间部分的内容,学习一门高级的研究生概率课程是很有帮助的。在第十六章中,我们对概率课程的一些必要知识进行了简短的回顾。

## 本书为谁而作?

本书可以作为金融学、金融经济学、金融工程、数学金融专业的研究生的入门教材。实际上,连续时间部分的内容通常是研究生的读物。我们尽量以直观的形式来解释书中的大多数内容,而一些必要的证明都被留在了各章的附录中。本书并不想和许多优秀的金融数学、金融经济学专业的研究生教材竞争,这些教材一般采用比较正规的数学形式,是以定理证明的形式编写的,其中很多高级教材在本书的参考文献中都有所提及,它们会为你下一步了解更多高水平的理论方面的内容提供有益的帮助。

## 本书的框架

本书共分为三篇。第一篇主要包括基础证券、金融市场机构、利率的概念、主要的数学模型以及各种测度市场交易风险和回报的方法等内容。第二篇主要讲述期权定价和套期保值,该部分类似的内容实际上在最近关于金融市场的书籍中都有所提及。不同于微分方程或者其他现行的方法,我们自始至终都强调所谓的鞅概率方法,譬如,我们提供的一种 Black—Scholes 公式的证明就是通过计算相应的期望值而得到的。第三篇主要讲述金融经济学的一个重要主题:利用均衡方法进行资产定价。该部分由于在期权定价和套期保值方面几乎没有直接的应用,因此,它们通常被关于金融数学方面的书籍所忽略,然而,该理论却能对市场参与者的行为以及价格在市场中的形成机理给出定性的认识。

### 一门课程应该覆盖哪些知识面?

我们在写作本书过程中引用了在南加州大学教授各门课程时用的部分教材,这些课程包括:经济学和工商管理专业的本科生课程,金融数学专业的硕士课程,还有期权和投资类 MBA 课程。比如,强调期权定价的经济学和工商管理专业的本科生课程应该包含以下内容:

- 去除连续时间部分的前三章;讲授完第二章“利率”之后,应该马上讲授第十章“债券的套期保值”

- 第二篇关于期权定价和无套利定价的前两章,可以不包括大部分连续时间的章节,但必须包括基本的 Black—Scholes 理论

- 第二篇关于套期保值的章节,当然可以包括也可以不包括连续时间部分

- 第五章“风险”中关于均值一方差的内容;该部分内容讲授完之后,应立即讲授第十三章“资本资产定价模型”

如果时间允许,或者如果本科生的经济学课程强调均衡定价而不是期权定价,或者如果这是一门要修两学期的课程,我们还可以加入以下内容:

- 第四章效用离散时间的章节

- 第三篇均衡模型离散时间的章节

如果该课程是为更倾向于数学的学生开设的,那么你可以很快地跳过离散时间部分,而把主要精力花费在连续时间部分上。如果该课程只修一学期,那么你就不得不做出选择,要么把重点放在第二篇的无套利期权定价上,要么把重点放在第三篇的均衡模型上。

## 本书的网页及电子表格

我们会在网址为 <http://math.usc.edu/~cvitanic/book.html> 的网站上不断更新本



书的内容,比如一些印刷错误。该网站上还有一些诸如命名为 ch1. xls 的电子表格文件。这些电子表格囊括了各章所有的图表以及生成这些图表所需要的计算公式。我们之所以用电子表格是因为我们希望读者能够利用这些电子表格文件自己重新生成和修改书中所有的图表。当然这样做的不足就是我们的图表有时候看起来并不像用专业作图软件做出的那样标准。除了在 Monte Carlo 模拟中,我们在 Excel 中用了 VB 汇编语言外,其他的作图我们都只用到了 Excel 的基本功能。如果你不是很了解 Excel 的基本功能,希望你能够通过它学会 Excel 的基本功能。书中有些地方我们通过“Excel 提示”来给出作图所需要的命令技巧。对于更复杂的计算来说,比如 Monte Carlo 模拟,使用更正规的数学软件可能会更加有效,至于课后的习题该选择哪种软件来做,我们把它留给老师和读者自己去选择。即便是教师想到了使用这些软件,我们也没有使用任何的优化软件或者微分方程软件。

### 注释

**星号** 凡是被打上星号(\*)的章节或者习题,一般要么数学形式比较复杂,需要应用计算机软件,要么就是不常见,超出了本书的主要范围。尽管我们建议学生完成需要利用计算机的大部分习题,但是这些习题和章节还是可以略去不看的。

**短剑** 凡是每章的习题中需要学生动手来解决的,都被打上了短剑(†)的符号。

**希腊字母** 本书我们用到了很多希腊字母,有时候包括上标和下标。在此我们将这些字母及其相应的发音一一列出:

$\alpha$  (alpha),  $\beta$  (beta),  $\gamma, \Gamma$  (gamma),  $\delta, \Delta$  (delta),  $\epsilon$  (epsilon),  $\zeta$  (zeta),  $\eta$  (eta),  $\theta$  (theta),  $\lambda$  (lambda),  $\mu$  (mu),  $\xi$  (xi),  $\pi, \Pi$  (pi),  $\omega, \Omega$  (omega),  $\rho$  (rho),  $\sigma, \Sigma$  (sigma),  $\tau$  (tau),  $\varphi, \Phi$  (phi)。

### 致谢

首先非常感谢我们的家人在本书写作期间给予我们的支持。我们从麻省理工学院出版社的员工那里得到了极大的帮助与支持,尤其是 Elizabeth Murry 帮助我们以一种更平稳、更有效的方式度过了写作与出版过程,我们一直与他合作得很愉快。亚克沙·萨维塔尼奇的研究和这本书的出版得到了编号为 DMS-00-99549 的国家自然科学基金的资助。本书第二篇与第三篇中的连续时间部分来自于亚克沙·萨维塔尼奇在 2000 年夏天访问 Johannesburg 的 Witwatersrand 大学期间准备的讲义稿,他非常感谢 Wit. Watersrand 大学数学金融系的主任 David Rod Taylor。很多同事都向本书提出了宝贵的意见和建议,这些同事包括: Krzysztof Burdzy, Paul Dufresne, Neil Gretzky, Assad Jalali, Dmitry Kramkov, Ali Lazrak, Lionel Martellini, Adam Ostaszewski, Kaushik Ronnie Sircar, Costis Skiadas, Halil Mete Soner, Adam Speight, David Rod Taylor 以及 Mihail Zer-

vos。尤其是 Dmitry Kramkov 为我们提供了第六章附录的证明。不完全信息下连续时间的效用最大化章节的部分内容是我们与 Ali Lazrak 及 Lionel Martellini 共同完成的，连续时间均值一方差最优化的内容是我们与 Ali Lazrak 共同完成的。另外，下面的学生为本书提供了他们的见解，并指出了手稿中的一些错误，他们是：Paula Guedes、Frank Denis Hiebsch 和 Chulhee Lee。当然，书中任何的错误都由我们自己负责。

### 一种流行的主旋律：期望值定价

在开展本书的内容之前，我们想在前言中对于证券价格与投资于该证券投资者的最优交易策略之间的关系做一个简单的说明。我们将在简单模型中描述这种关系，但实际上这种关系会出现在大多数的市场模型中，而且所得到的定价公式的形式将一直贯穿于整本书。后面我们会更详细地重复这一类型的讨论，在此，我们只是想通过它给读者对本书所讨论的内容形成一个总体印象。读者可以跳过下面的推导，直接看公式(0.3)。

考虑一个当前价格为  $S(0)$  的证券  $S$ ，其在未来时刻 1 的价格  $S(1)$  以概率  $p$  取值  $s^u$ ，或以概率  $1-p$  取值  $s^d$ 。市场还有一个无风险证券，即今天投资 1 美元，时刻 1 就会得到  $1+r$  美元的收益。假设  $s^d < (1+r)S(0) < s^u$ 。假定投资者的初始资本为  $x$ ，他要确定证券  $S$  的持有量  $\delta$ ，而将余下的财富都投资到利率为  $r$  的银行存款中去。换句话说，在时刻 1 他的财富  $X(1)$  为：

$$X(1) = \delta S(1) + [x - \delta S(0)](1+r)$$

投资者想最大化他的预期效用：

$$E[U(X(1))] = pU(X^u) + (1-p)U(X^d)$$

其中  $U$  被称为效用函数， $X^u, X^d$  分别是  $S(1) = s^u, S(1) = s^d$  情况下投资者的期末财富。代入这些值，对  $\delta$  求导数并令其为 0，我们可以得到：

$$pU'(X^u)[s^u - S(0)(1+r)] + (1-p)U'(X^d)[s^d - S(0)(1+r)] = 0$$

方程的左边可以记为  $E[U'(X(1))\{S(1) - S(0)(1+r)\}]$ ，令其为 0 意味着用最优的财富  $\hat{X}$  代替任意的财富  $X$ ，我们可以得到：

$$S(0) = E\left[\frac{U'(\hat{X}(1))}{E(U'[\hat{X}(1)])} \frac{S(1)}{1+r}\right] \quad (0.1)$$

如果记：

$$Z(1) := \frac{U'(\hat{X}(1))}{E\{U'(\hat{X}(1))\}} \quad (0.2)$$

我们可以看到证券  $S$  的当前价格为：

$$S(0) = E \left[ Z(1) \frac{S(1)}{1+r} \right] \quad (0.3)$$

我们可以看到本书模型中大多数证券(一般带有期望值,如美式期权)价格具有以下形式:证券的当前价格  $S(0)$  是未来价格  $S(1)$  与某一特定随机因子乘积的期望值,或者说是  $S(1)$  被某一随机因子贴现后的期望值。更有效地讲,我们得到的证券的当前价格是未来价格贴现值的加权平均,不过权重依赖于随机变量  $Z(1)$  的实现值。另外,在标准的期权定价模型中(该模型具有完备性),我们根本不需要效用函数,因为  $Z(1)$  独立于投资者的效用函数。随机变量  $Z(1)$  有时候被称为测度变换(change of measure),而  $Z(1)/(1+r)$  根据内容和解释的不同,可分别称为状态价格密度(state-price density)、随机贴现因子(stochastic discount factor)、定价核(pricing kernel)或者边际替代率(marginal rate of substitution)。此外,公式(0.3)还有另一种解释,就是它用了一种新的概率,因此, $Z(1)$  被称为测度(概率)变换。例如,在前面的例子中, $Z(1)$  有两个可能的取值,分别以概率  $p$  与  $1-p$  取值为  $Z^u(1)$  与  $Z^d(1)$ 。我们可以定义:

$$p^* := pZ^u(1), \quad 1-p^* = (1-p)Z^d(1)$$

$Z(1)$  的值使得  $p^*$  成为一种概率测度,我们可以将  $p^*$  和  $1-p^*$  解释为资产  $S$  运动的修正概率。因此,证券的当前价格等于未来价格贴现值的期望值。至此,我们可以把方程(0.3)改写为:

$$S(0) = E^* \left[ \frac{S(1)}{1+r} \right] \quad (0.4)$$

其中  $E^*$  表示新概率  $p^*$ ,  $1-p^*$  下的期望。因此,证券的当前价格等于未来价格贴现值的期望值,而其中的期望值是在一种特殊的概率,即所谓的风险中性(risk neutral)概率下求得的,而这种概率一般不同于真实的概率(real-world probability)。

### 结束语

但愿我们已经引起了你对本书的兴趣。如果你是一个特别仔细的读者,希望你能通过电子邮件向我们反映你所发现的书中的任何错误,当然也包括印刷错误,我们将不胜感激。尽情享受这本书带给你的乐趣吧!

**Jakša Cvitanović, Fernando Zapatero**

Email: cvitanic@math.usc.edu, zapatero@usc.edu

# 目 录

注释/1

前言/1

## 第一篇 市场、模型、利率、效用最大化、风险

### 1 金融市场/3

1.1 债券/4

1.2 股票/7

1.3 衍生产品/9

1.4 金融市场组织/18

1.5 保证金/20

1.6 交易成本/22

小结/23

习题/23

进一步阅读/25

### 2 利率/26

2.1 利率的计算/26

2.2 现值/29

2.3 利率期限结构与远期利率/35

小结/42

习题/42

进一步阅读/44

### 3 金融市场中的证券定价模型/45

3.1 单期模型/46

- 3.2 多期模型/49
- 3.3 连续时间模型/52
- 3.4 利率模型/68
- 3.5 名义利率和实际利率/70
- 3.6 套利与市场完备性/72
- 3.7 附录/82
  - 小结/84
  - 习题/85
  - 进一步阅读/87

#### 4 最优消费/组合策略/88

- 4.1 偏好关系和效用函数/89
- 4.2 离散时间下的效用最大化/97
- 4.3 连续时间下的效用最大化/105
- 4.4 效用最大化中的对偶/鞅方法/110
- 4.5 交易成本/120
- 4.6 不完全信息和非对称信息/120
- 4.7 附录:动态规划原理的证明/126
  - 小结/127
  - 习题/128
  - 进一步阅读/130

#### 5 风险/132

- 5.1 风险与回报:均值一方差分析/132
- 5.2 VaR:受险值/144
  - 小结/149
  - 习题/149
  - 进一步阅读/151

## 第二篇 衍生证券的定价与套期保值

#### 6 套利与风险中性定价/155

- 6.1 看涨期权与看跌期权的套利关系:平价关系/155
- 6.2 远期与期货的套利定价/160

- 6.3 风险中性定价/163
- 6.4 附录/178
  - 小结/183
  - 习题/184
  - 进一步阅读/186
- 7 期权定价/187**
  - 7.1 二项式模型中的期权定价/187
  - 7.2 默顿—布莱克—斯科尔斯模型中的期权定价/192
  - 7.3 美式期权定价/197
  - 7.4 基于支付红利证券的期权/203
  - 7.5 其他类型的期权/207
  - 7.6 有几种随机变量下的定价/214
  - 7.7 默顿的跳扩散模型/224
  - 7.8 方差估计与 ARCH/GARCH 模型/227
  - 7.9 附录:布莱克—斯科尔斯公式的推导/229
    - 小结/231
    - 习题/231
    - 进一步阅读/235
- 8 固定收益市场模型和衍生产品/236**
  - 8.1 离散时间下的利率模型/237
  - 8.2 连续时间下的利率模型/246
  - 8.3 互换、利率上限期权与利率下限期权/259
  - 8.4 信用/违约风险/263
    - 小结/265
    - 习题/266
    - 进一步阅读/268
- 9 套期保值/269**
  - 9.1 期货合约的套期保值/269
  - 9.2 期权组合作为交易策略/273
  - 9.3 期权的套期保值头寸;Delta 保值/277
  - 9.4 多变量连续时间模型中的完全复制/288

- 9.5 非完备市场中的套期保值/289
  - 小结/290
  - 习题/291
  - 进一步阅读/293
- 10 债券套期保值/294**
  - 10.1 久期/294
  - 10.2 免疫/299
  - 10.3 凸性/302
    - 小结/303
    - 习题/303
    - 进一步阅读/304
- 11 数值方法/305**
  - 11.1 二叉树方法/305
  - 11.2 蒙特卡罗模拟/311
  - 11.3 偏微分方程的数值解、有限差分法/321
    - 小结/325
    - 习题/325
    - 进一步阅读/327

## 第三篇 均衡模型

- 12 均衡原理/331**
  - 12.1 均衡的概念/331
  - 12.2 单个代理商与多个代理商均衡/336
  - 12.3 纯交换均衡/338
  - 12.4 均衡的存在性/345
    - 小结/351
    - 习题/352
    - 进一步阅读/352
- 13 资本资产定价模型/353**
  - 13.1 基本的资本资产定价模型/353

- 13.2 经济解释/357
- 13.3 资本资产定价模型的另一种推导/363
- 13.4 连续时间下跨期的资本资产定价模型/365
- 13.5 消费的资本资产定价模型/368
  - 小结/371
  - 习题/371
  - 进一步阅读/372
  
- 14 多因子模型/373**
  - 14.1 离散时间下的多因子模型/373
  - 14.2 套利定价理论(APT)/375
  - 14.3 连续时间下的多因子模型/377
    - 小结/383
    - 习题/384
    - 进一步阅读/384
  
- 15 其他的纯交换均衡/385**
  - 15.1 期限结构均衡/385
  - 15.2 信息均衡/388
  - 15.3 异质代理商的均衡/394
  - 15.4 国际均衡;具有两个价格的均衡/397
    - 小结/401
    - 习题/401
    - 进一步阅读/401
  
- 16 附录:概率论知识/402**
  - 16.1 离散型随机变量/402
  - 16.2 连续型随机变量/403
  - 16.3 几种随机变量/404
  - 16.4 正态随机变量/405
  - 16.5 条件期望的性质/407
  - 16.6 鞅的定义/408
  - 16.7 随机游走和布朗运动/409
  
- 参考文献/410**



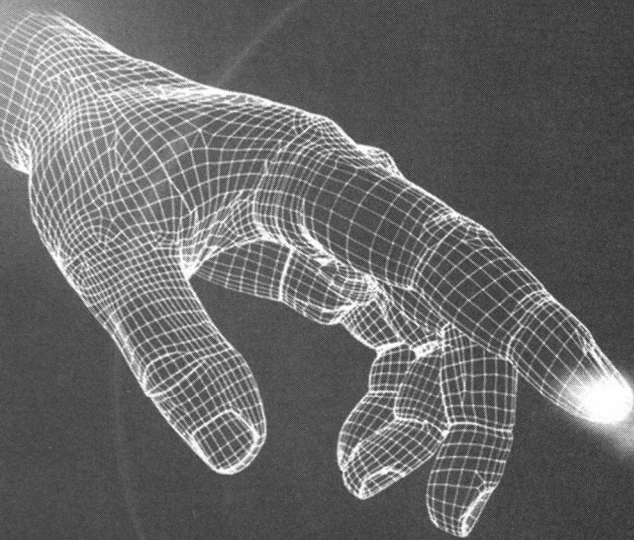
# 第一篇

---

---

## 市场、模型、利率、 效用最大化、风险

新世纪高校金融学教材译丛



0100101101010010100101010101001011010100010010111001110011001010100100101011010

试读结束，如需全本请在线购买：[www.etbook.com](http://www.etbook.com)