梯田

高等教育自学考试同步辅导·同步训练（一）

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

线性代数

（经管类）

课程代码
4184
[2006年版]

组编　全国高等教育自学考试指定教材辅导用书编委会

中央民族大学出版社

梯田

高等教育自学考试同步辅导·同步训练(一)

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

线性代数

（经管类）

课程代码 4184

[2006年版]

组编 全国高等教育自学考试指定教材辅导用书编委会

中央民族大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等教育自学考试同步辅导/同步训练系列. 1，公共课. 1/邓肯主编. —北京：中央民族大学出版社，2006. 11

ISBN 7-81108-160-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 邓…　Ⅲ. 高等教育—自学考试—自学参考资料　Ⅳ. G726. 9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 132910 号

高等教育自学考试同步辅导/同步训练(公共课)

总 主 编　邓　肯
责任编辑　吴　云
封面设计　于　冰
出 版 者　中央民族大学出版社
　　　　　北京市海淀区中关村南大街 27 号　邮编:100081
　　　　　电话:68472815(发行部)　传真:68932751(发行部)
　　　　　　　68932218(总编室)　　　　68932447(办公室)
发 行 者　全国各地新华书店
印 刷 者　北京拓瑞斯印务有限公司
开　　本　880×1230(毫米)　1/32　印张:30
字　　数　600 千字
印　　数　3000 册
版　　次　2006 年 11 月第 1 版　2006 年 11 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 7-81108-160-1/G・422
定　　价　66.00 元

出版说明

“梯田”系列自考辅导图书是全国自考命题研究中心力邀北京大学、清华大学、中国人民大学、北京师范大学、中国政法大学、北京外国语大学、武汉大学、华东师范大学、浙江大学、南开大学、山东大学等主考院校的权威专家执笔，紧扣“自学考试大纲”和“指定教材”编写，遵循自学的学习特点和规律，以教育测量学的重要理论为指导，为莘莘学子打造的专门用于备考的辅导用书。

本书是全国高等教育自学考试最新指定教材《线性代数（经管类)》（经管类公共课）（2006年版）的配套辅导用书。

本书的编写依据：

全国高等教育自学考试指导委员会组编的最新指定教材《线性代数（经管类）［附：线性代数（经管类）自学考试大纲］》（刘吉佑、徐诚浩主编，武汉大学出版社出版，2006年版）。

编写具体内容所做的重要基础工作：

1. 深入分析研究考试大纲的要求和新命题精神；

2. 深入分析研究最新高等教育自学考试全国统一命题考试的题型、分值分布、答题要求及评分标准；

3. 广泛分析自考生在学习和实际解答试卷中存在的问题，有针对性地进行全面辅导和同步训练。

本书结构及显著特点：

本书共分两部分：第一部分教材内容同步辅导/同步训练，第二部分考试预测试卷。对于考生来说，可以说一册在手，全部拥有。

第一部分（教材内容同步辅导/同步训练）是与指定教材同步，按考试大纲规定的考核知识点及能力层次要求为线索分章辅导，考点解析先提炼本章的重要知识点，再举例题分析，详细解答；指定教材习题解答是对指定教材课后习题进行逐一解答，解答过程思路清晰，方法简便，易于考生理解和掌握；同步练习是将该章中的重要考点按大纲要求的各种题型编写而成，同时配有参考答案。编写中力求做到点面结合，突出重点。

第二部分（考试预测试卷）是作者综合全书、结合考试大纲要求精选出的数道“押题”，题型、题序、题量与大纲要求完全一致，一定程度上反映了考试趋势，同时亦检测考生对于本课程的掌握程度。考生学完全书，再通过试题强化训练，可以科学地进行自我考核、自我评估及自我调整复习方向，攻克弱点及不足，从而达到事半功倍的效果。

编写高质量的全国高等教育自学考试辅导用书，是一项长期的、艰难而具有深刻意义的社会助学工作，编写过程中不断得到社会各界的大力支持与关怀，在此深表谢意。

使该书在使用中不断提高和日臻完善，是我们永远的目标。

敬请读者批评指正。

编　者

目　录

第一部分　教材内容同步辅导/同步训练

第二部分　考试预测试卷

第一部分　教材内容
同步辅导/同步训练

第一章　行列式

考点解析

考点一：行列式的计算

【例 1】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

【答案】 $D_{11}=(-1)^{n+1}n!$

【解析】 若行列式的某行(列)含有 0 元素比较多，可考虑按该行(列)展开

按第 1 列展开，有

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ n & 0 & 0 & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}n\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&n-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}n(n-1)!\ =(-1)^{n+1}n!.$$

【考查级别】 ★★★

【例 2】 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}x_1-a&x_1&x_1&x_1\\x_2&x_2-a&x_2&x_2\\x_3&x_3&x_3-a&x_3\\x_4&x_4&x_4&x_4-a\end{vmatrix}$.

【答案】 $D_4=-(\sum_{i=1}^{4}x_i-a)a^3$.

【解析】 若行列式各行(列)元素之和等于常数,可将各列(行)加到第 1 列(行),提出公因式,再将其化为三角行列式.

该行列式各列之和等于$\sum_{i=1}^{4}x_i-a$,将各行加到第 1 行,提出公因式,再将其化为三角形列式,有

$$D_4=\begin{vmatrix}\sum_{i=1}^{4}x_i-a&\sum_{i=1}^{4}x_i-a&\sum_{i=1}^{4}x_i-a&\sum_{i=1}^{4}x_i-a\\x_2&x_2-a&x_2&x_2\\x_3&x_3&x_3-a&x_3\\x_4&x_4&x_4&x_4-a\end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{4}x_i-a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_2&x_2-a&x_2&x_2\\x_3&x_3&x_3-a&x_3\\x_4&x_4&x_4&x_4-a\end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^{4}x_i-a)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-a&0&0\\0&0&-a&0\\0&0&0&-a\end{vmatrix}$$

$$=-(\sum_{i=1}^{4}x_i-a)a^3.$$

【考查级别】 ★★★★

考点二:克莱姆法则

【例 3】 求方程组$\begin{cases}x+y-z=1\\x-y-z=2\\x-y+z=\dfrac{1}{3}\end{cases}$的解.

【答案】 $x_1=\dfrac{2}{3},x_2=-\dfrac{1}{3},x_3=\dfrac{5}{6}.$

【解析】 若方程组的系数行列式不等于 0,按克莱姆法则,可惟一确定一组解.

计算下列行列式:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-4$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&-1\\\frac{1}{3}&-1&1\end{vmatrix}=-\frac{8}{3}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&-1\\1&\frac{1}{3}&1\end{vmatrix}=\frac{4}{3}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\1&-1&\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{10}{3}$$

由于方程组的系数行列式 $D\neq0$,根据克拉默法则,得方程组的惟一解:

$$x_1=\frac{2}{3},x_2=-\frac{1}{3},x_3=\frac{5}{6}.$$

【考查级别】 ★★★

指定教材习题解答

习题 1.1

1. **解** (1) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}=(x+1)(x^2-x+1)-x^2\cdot x$

$$=x^3-x^2+x+x^2-x+1-x^3=1.$$

(2) $\begin{vmatrix} \frac{1-x^2}{1+x^2} & \frac{2x}{1+x^2} \\ \frac{-2x}{1+x^2} & \frac{1-x^2}{1+x^2} \end{vmatrix}=\frac{1-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{-2x}{1+x^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}$

$$=\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$=\frac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)^2}=1.$$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & log_b^a \\ log_a^b & 1 \end{vmatrix}=1-log_a^b\cdot log_b^a=1-1=0.$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}=-b\times\begin{vmatrix} a & 0 \\ e & 0 \end{vmatrix}=-b\times 0=0.$

(5) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * \\ 0 & 4 & * & * & * \\ 5 & * & * & * & * \end{vmatrix}=1\times2\times3\times4\times5=5!\ =120.$

$$(6)\begin{vmatrix} * & * & * & * & * & 1 \\ * & * & * & * & 2 & 0 \\ * & * & * & 3 & 0 & 0 \\ * & * & 4 & 0 & 0 & 0 \\ * & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6 = -6!$$

$$= -720$$

2. **证明** 当 $b\neq 0$ 时，由于

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{21}b & a_{22} & a_{23}b^{-1} \\ a_{31}b^2 & a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}b^{-1} \\ a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}b\begin{vmatrix} a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}b^2\begin{vmatrix} a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{22} & a_{23}b^{-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}ba_{23}b^{-1}) - a_{21}b(a_{12}b^{-1}a_{33} - a_{32}ba_{13}b^{-2}) + a_{32}b^2 (a_{12}b^{-1}a_{23}b^{-1} - a_{22}a_{13}b^{-2})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & a_{13}b^{-2} \\ a_{21}b & a_{22} & a_{23}b^{-1} \\ a_{32}b^2 & a_{32}b & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. **解** (1)由于

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ a & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a^2 - 4a + 3$$

$$= (a-1)(a-3)$$

所以 $\begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是

$(a-1)(a-3)\neq 0$,即,$a\neq 1$ 且 $a\neq 3$.

(2)由于

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ a & a \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -a^2+4$$
$$= -(a+2)(a-2)$$

所以 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} < 0$ 的充分必要条件是

$-(a+2)(a-2)<0$,即 $a<-2$ 或 $a>2$.

习题 1.2

1. **解** 由余子式和代数余子式的定义可得:

$$\boldsymbol{M}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-2=-3,$$

$$\boldsymbol{M}_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4+2=-2,$$

$$\boldsymbol{M}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4+1=5,$$

$$\boldsymbol{M}_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\boldsymbol{M}_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\boldsymbol{M}_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2-1=1,$$

$$\boldsymbol{M}_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\boldsymbol{M}_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$M_{33}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=2+4=6$$

$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=-3, A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=2,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=M_{13}=5, A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-M_{21}=-1,$

$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=M_{22}=-2, A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}=-1,$

$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}=-2, A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-4,$

$A_{33}=(-1)^{3+3}M_{33}=M_{33}=6$

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}\\&=2\times(-3)+(-1)\times 2+0\times 5=-8.\end{aligned}$$

2. 解：由行列式展开定理把 D 按第三列展开得：

$$\begin{aligned}D&=-1\times(-1)^{1+3}\times 5+2\times(-1)^{2+3}\times 3+0\times(-1)^{3+3}\times(-7)\\&\quad+1\times(-1)^{4+3}\times 4\\&=-5-6-4=-15.\end{aligned}$$

3. 解　(1)行列式的第 1 列只含一个非零元素，$a_{11}=-1$，其它元素为 0. 按第一列展开，得

$$\begin{vmatrix}-1 & 2 & 5 & 4\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 4 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=(-1)\times\begin{vmatrix}3 & 2 & 0\\ 4 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

$$=-(12-26)=14.$$

(2)该行列式的第三行和第四行均只含一个非零元素. 现在我们按第四行展开，得：

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\ c & 0 & 0 & 0\\ d & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}d\begin{vmatrix}a_2 & a_3 & a_4\\ b_2 & b_3 & b_4\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

(3)该行列式每列均只含两个非零元素. 现在我们按第一列展开，得：

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{4+1}c_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 \\ c_2 & b_2 & 0 \\ c_2 & d_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 d_1 (a_2 d_2 - b_2 c_2) - b_1 c_1 (c_2 d_2 - b_2 c_2)$$

$$= (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2).$$

4. **解** (1)该行列式的第1列只含两个非零元素.现在我们按第一列展开,得:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ x & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -4x - 4$$

(2)将该行列式按第一行展开得:

$$f(x) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} x$$

$$\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&-1&1\\1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$=4-4x-4=-4x.$

习题 1.3

1. 解 (1) $\begin{vmatrix}10&8&2\\15&12&3\\20&32&12\end{vmatrix}=5\times4\times\begin{vmatrix}2&2&2\\3&3&3\\4&8&12\end{vmatrix}$

$$=5\times4\times2\times3\times4\times\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&2&3\end{vmatrix}=0.$$

(2) $\begin{vmatrix}6&42&27\\8&-28&36\\20&35&135\end{vmatrix}=2\times7\times9\times\begin{vmatrix}3&6&3\\4&-4&4\\10&5&15\end{vmatrix}$

$$=2\times7\times9\times3\times4\times5\times\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&1\\2&1&3\end{vmatrix}$$

$$=7560\times(-3)=-22680.$$

(3) $\begin{vmatrix}-2&3&1\\503&201&298\\5&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[①-②-③]{}\begin{vmatrix}-6&3&1\\4&201&298\\0&2&3\end{vmatrix}$

$\xlongequal{\text{按第一列展开}}-6(201\times3-298\times2)-4(3\times3-2)$

$=-42-28$

$=-70.$

2. 解 (1)由行列式的定义可知,该行列式可表示成 x 的一个 3 次多项式,所以该方程最多 3 个根.

将 $x=0$ 代入行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

它的第一行和第二行相同,因此其值为 0.

分别用 $x=1,x=2$ 代入行列式时,得到的行列式都有两行相同,故其值均为 0.

所以,$x=0,x=1$ 和 $x=2$ 就是所求的 3 根.

(2)该行列式的各列元素之和为 $x+3$,将各列加到第 1 列,提出公因式,再化为三角形行列式,有

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 1 & 1 \\ x+3 & x & 1 & 1 \\ x+3 & 1 & x & 1 \\ x+3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{②}-\text{①}]{\substack{\text{④}-\text{①}\\ \text{③}-\text{①}}}(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$=(x+3)(x-1)^3$$

因此 $x=-3$ 和 $x=1$ 是该方程的全部根.

3. **解** 令 $a_1=b_2=d_1=d_2=1,a_2=b_1=c_1=0,c_2=-1$,则

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+0 & 0+1 \\ 0-1 & 1+1 \end{vmatrix}$$

$$=3\neq\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2.$$