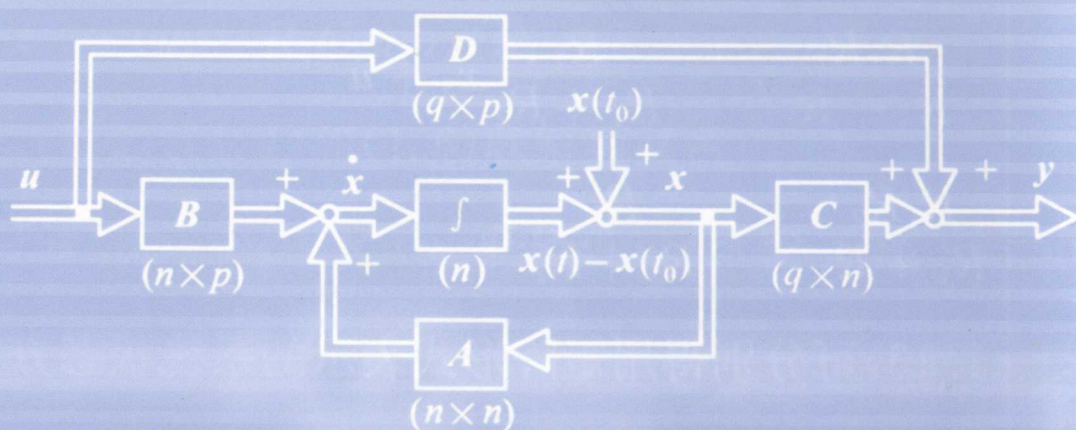


现代控制理论

题解分析与指导

龚乐年 编著



东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

现代控制理论题解 分析与指导

龚乐年 编著

东南大学出版社
南京

内 容 简 介

本书系配合《现代控制理论》课程教学用题解分析与指导。全书由 8 部分组成,共收集现代控制理论教学与分析用例题及题解 67 例,内容分别为:状态空间方程建立与导出、状态变量转换、系统响应求解与可控、可观性判断(13 题)、由系统结构图与传递函数导出对应的状态空间方程(9 题)、系统在平衡点(稳态工作点)附近进行线性化处理及偏差量方程的导出(4 题)、双参数系统闭环解耦调节及其稳定性分析(11 题)、系统闭环调节器设计(10 题)、最优控制分析与调节器设计(13 题)、全状态观测器设计(6 题)以及大型分析与综合示例(1 题)。

本书素材主要取自德国相关高校与专业的作业题、考题及有关德文资料、教材、例题与题解,并经认真解算、分析与编撰而成,可作为工科大专院校有关专业本科生、硕士或博士研究生以及任课教师现代控制理论课程教学辅导用书,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论题解分析与指导 / 龚乐年编著. —南京:
东南大学出版社, 2005. 9

ISBN 7-5641-0103-2

I. 现... II. 龚... III. 现代控制理论—解题
IV. O231-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 060000 号

现代控制理论题解分析与指导

出版发行 东南大学出版社
出 版 人 宋增民
社 址 南京市四牌楼 2 号
邮 编 210096
电 话 025-83792954 025-83362442(传真)
电 邮 zhu-min-seu@163.com

经 销 全国各地新华书店
印 刷 溧阳市晨明印刷有限公司印刷
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 15.5
字 数 387 千字
版 次 2005 年 9 月第 1 版
印 次 2005 年 9 月第 1 次印刷
印 数 1—3000 册
定 价 30.00 元

(凡因印装质量问题,请与我社读者服务部联系。电话:025-83792328)

前 言

早就有意编撰一本有关现代控制理论课程教学方面用的题解分析与指导。原因有三：一是多年来(包括在前联邦德国斯图加特大学进修)收集、消化并整理了不少德文作业题、考题及有关示题与题解。由于这些示题与题解涉及面广、综合性强,且大多数能与工程实际相结合,因此很想将其介绍给我国读者;二是通过教学与科研实践了解到,不少工科院校有关专业的本科生与研究生都希望能有一本适用的现代控制理论方面的题解分析与指导,以利于这门课程的学习与掌握,不少年轻教师也有同感;三是拙编《现代调节技术导论》与《现代调节技术——基础理论与分析方法》先后出版后,为配合这两本书的教学,也感到应编撰一本对口的题解分析与指导。由于上述三方面原因,促使笔者下决心抽时间完成这项自我下达的任务。

为编撰好这本题解,笔者逐题进行了分析与计算,并从初学者的角度进行撰写、补充必要的基本知识和尽量突出物理概念,以使读者不仅能掌握正确的设计与计算方法,还可从中获得必要的分析和解题的思路及所学方法和知识的综合应用,起到课程教学不能起的作用。

十分感谢学校有关部门、系所及东南大学出版社和有关师友对此书出版给予的大力支持与帮助。由于笔者业务水平有限,加之编撰题解尚属首次,缺乏经验,效果如何,只能由实践给予检验。对于书中的错误和不妥之处,恳望读者不吝赐教。

龚乐年

2005年5月

于东南大学电气工程系

目 录

1 状态空间方程建立与导出、状态变量转换、系统响应求解与可控、可观性判断	(1)
【题 1-1】 根据物理定律建立调节对象的状态空间方程、确定对应的系统方框图	(1)
【题 1-2】 扰动量的物理概念与作用方式及其数模的建立、计及扰动量模型的调节对象扩展系统 状态方程的构成及相关参数的确定	(3)
【题 1-3】 由物理定律建立调节对象的状态空间方程及其对应的调节规范形与观测规范形	(5)
【题 1-4】 利用物理定律建立实际(单输入单输出量)系统对应的数学模型(有名值与标么值方程)、 将其转换成状态空间方程调节规范形、确定状态空间方程各系数矩阵中元素与数模中 参数之间的关系	(8)
【题 1-5】 任意形状态空间方程转换成调节规范形与对角线规范形、利用(范得蒙)转换矩阵直接 将调节规范形转换成对角线规范形	(13)
【题 1-6】 在系统输入与初始条件已知情况下求解状态空间方程	(17)
【题 1-7】 状态空间方程的导出、系统可控与可观性判断、 e^A 之计算与系统状态响应之确定	(19)
【题 1-8】 状态空间方程导出、 e^A 及其突变性响应之确定	(22)
【题 1-9】 系统状态空间方程求解中相关参数之计算	(25)
【题 1-10】 与高阶微分方程对应的传递函数、对应的状态空间方程调节规范形、状态变量转换、 e^A 之确定与系统响应之求解	(28)
【题 1-11】 线性定常动力学系统可控性与可观性概念及其判断方法	(34)
【题 1-12】 任意形状态空间方程转换成对角线规范形及其可控、可观性之判断与分析	(38)
【题 1-13】 按可能出现且有规律的扰动量变化曲线建立其对应的数学模型、确定计及扰动量的 扩展系统对应的状态空间方程并判断其可观性	(45)
2 由系统结构图与传递函数导出对应的状态空间方程	(51)
【题 2-1】 状态变量选择、由系统已知结构图导出对应的状态空间方程	(51)
【题 2-2】 利用系统方框图及其等效处理以及状态变量的合理选择导出对应的状态空间方程	(52)
【题 2-3】 由描述单输入单输出量系统的状态空间方程确定对应的传递函数、由存在重极点(特 征值)的系统传递函数导出对应的状态空间方程若当规范形	(54)
【题 2-4】 由只具有共轭复数极点的传递函数导出对应的状态空间方程——第一种串联描述法	(58)
【题 2-5】 由只具有共轭复数极点的传递函数导出对应的状态空间方程——第二种串联描述法	(59)
【题 2-6】 由只具有共轭复数极点的传递函数导出对应的状态空间方程——第三种串联描述法	(61)
【题 2-7】 由只具有共轭复数极点的传递函数导出对应的状态空间方程——第一种并联描述法	(62)
【题 2-8】 由只具有共轭复数极点的传递函数导出对应的状态空间方程——第二种并联描述法	(64)
【题 2-9】 传递函数只存在共轭复数极点(简单极点与重极点)时,利用两种不同的并联描述法 导出对应的状态空间方程	(68)

3 系统在平衡点(稳态工作点)附近进行线性化处理及偏差量方程的导出	(71)
【题3-1】 由物理定律建立描述系统的微分方程、在平衡点附近进行线性化处理获得偏差量对应的一阶微分方程	(71)
【题3-2】 非线性系统在稳态工作点附近的线性化处理及偏差量方程描述	(73)
【题3-3】 非线性系统线性化处理、平衡点的确定与实际物理含义、用偏差量描述的系统状态方程及其动力学矩阵与平衡点的关系	(74)
【题3-4】 具有非线性环节系统的方框图绘制、在给定值变化曲线附近进行线性化处理	(76)
4 双参数系统闭环解耦调节及其稳定性分析	(82)
【题4-1】 双参数调节对象数模——标准方程的建立、用于系统解耦的串接环节与对应调节器参数的设计与分析	(82)
【题4-2】 内含滞后环节的双参数调节对象、通过串联接入对应的“解耦环节”,使系统达到完全解耦或非完全解耦	(86)
【题4-3】 存在内部反馈的双参数调节对象解耦环节之设计	(93)
【题4-4】 系统中不串接解耦环节,且在双参数调节对象输入端直接加入主调节器并构成(单位)反馈运行时,对应闭环系统运行稳定性之判断	(95)
【题4-5】 具有单侧耦合的双参数闭环调节系统稳定性之判断、对稳定性判据的深入理解与分析	(97)
【题4-6】 双参数调节对象反馈解耦环节之设计与系统详细结构图之绘制	(102)
【题4-7】 双参数调节对象常用的几种闭环解耦分析法及相应参数阵之确定	(106)
【题4-8】 具有单侧耦合双参数闭环调节系统稳定性之判断及其与某一参数之间的关系	(108)
【题4-9】 具有单侧耦合的三参数闭环调节系统稳定性之判断	(111)
【题4-10】 由状态空间方程导出双参数调节对象对应的传递矩阵、设计串接解耦环节实现闭环完全解耦及其稳定性分析	(113)
【题4-11】 双参数调节对象数模之建立、串接解耦环节之设计与分析	(115)
5 系统闭环调节器设计	(121)
【题5-1】 系统可控可观与稳定性分析、极点配置、闭环传递函数与脉冲响应	(121)
【题5-2】 在极点配置法中利用闭环特征方程对应项系数相等,求解(全状态反馈)调节器参数	(125)
【题5-3】 在单控制量系统极点配置法中,利用闭环特征多项式对应项系数相等设计全状态反馈调节器参数	(127)
【题5-4】 在极点配置法中利用直接计算法确定调节器参数	(129)
【题5-5】 闭环反馈(调节)系统稳定性判断、输入传递矩阵的概念与确定、动态过程与稳态运行时前置装置参数之设计	(131)
【题5-6】 模态调节设计法、(右)特征矢量与左特征矢量之关系及其在分析中的应用	(134)
【题5-7】 系统可控性判断、利用模态调节法设计闭环调节器	(138)
【题5-8】 状态空间方程转换成对角线规范形、利用模态调节法设计解耦P与PI调节器	(142)
【题5-9】 转换(特征)矩阵V与 V^{-1} 之确定、利用模态调节法设计调节器	(147)

【题 5-10】 利用模态调节法设计解耦 P 调节器	(151)
6 最优控制分析与调节器设计	(154)
【题 6-1】 黎卡提矩阵方程的导出与求解、状态观测器设计	(154)
【题 6-2】 状态空间方程的导出与系统降价、利用黎卡提矩阵方程求解最优反馈阵	(159)
【题 6-3】 终端时间固定、状态终态值自由可变时的最优控制	(162)
【题 6-4】 由系统渐近稳定之要求求解状态变量与最优控制函数、利用附加函数求解黎卡提 矩阵方程	(165)
【题 6-5】 终端时间不固定、考虑状态变量终态值影响时的最优控制	(168)
【题 6-6】 目标函数中考虑状态终态值影响时的最优控制函数之确定	(174)
【题 6-7】 终端时间给定、考虑状态变量终态值影响时的最优控制与调节器设计	(176)
【题 6-8】 终端时间固定时的最优控制、 $ x $ 与 $\operatorname{sgn} x$ 之关系及其在分析中的应用	(179)
【题 6-9】 终端时间固定、考虑状态变量终态值影响时的最优控制	(181)
【题 6-10】 终端时间固定、考虑状态变量终态值影响时的最优控制与相应变化曲线的绘制	(183)
【题 6-11】 坐标变换、考虑跟踪的终态条件之最优控制	(188)
【题 6-12】 状态终态值不固定、利用变量分离和部分因式分解求解黎卡提方程时的最优控制	(191)
【题 6-13】 终端时间不固定、不考虑状态变量终态值影响时的最优控制	(193)
7 全状态观测器设计	(196)
【题 7-1】 利用直接计算公式计算单输出量系统观测器参数	(196)
【题 7-2】 单输出量动力学系统可观性判断与观测器设计	(198)
【题 7-3】 全状态调节器和全状态观测器设计	(202)
【题 7-4】 系统状态空间方程的导出与系统状态响应求解、全状态反馈调节器与观测器设计	(207)
【题 7-5】 坐标变换(转换成对角线规范形)、解耦 P 调节器与状态观测器设计	(210)
【题 7-6】 坐标变换、解耦调节器与状态观测器设计	(214)
8 桥式吊车工作过程自动调节在状态空间分析中的设计与计算	(217)
8.1 调节对象——桥式吊车(行车)状态空间方程的建立	(217)
8.2 行车系统的可控性分析	(224)
8.3 利用极点配置法设计全状态反馈调节器	(225)
8.4 实际系统全状态观测器设计	(234)
参考文献	(239)

1 状态空间方程建立与导出、状态变量转换、系统响应求解与可控、可观性判断

【题 1-1】 根据物理定律建立调节对象的状态空间方程、确定对应的系统方框图。

图 1.1 系动圈式(测量)仪表工作原理示意图:永久磁铁制成 Ω 形,其磁靴(即 N、S 极)之间产生的为均匀(定值)磁通 Φ 。动圈(里面流过被测电流 i)固定在铁心上,同时(与径向垂直的)指针紧固在动圈上。根据电磁学原理,由于电流 i 与磁通 Φ 的共同作用将产生(主动)转矩 m_A ,使指针(连同铁心、动圈一道)转动,并产生偏转角 φ ,由此可利用此偏转角的大小来测量电流(适当处理后也可用于测量电压)。由此可见,此调节对象之输入量为被测电流 i ,而输出量则为指针偏转角 φ 。

除主动转矩 m_A 外,还应考虑供指针偏转平衡用的外加扭转弹簧对应的反转矩 m_K ,以及计及各种旋转阻尼导致的阻尼转矩 m_D 。这三个转矩可分别用下述各式描述:

$$m_A = C\Phi i \quad (C > 0, \Phi \text{ 为定值}) \quad (1a)$$

$$m_K = K\varphi \quad (K \text{ 为扭转弹簧系数}) \quad (1b)$$

$$m_D = D\dot{\varphi} \quad (D \text{ 为扭转阻尼系数}) \quad (1c)$$

另外,假设指针连同铁心、动圈(以下简称指针)之总转动惯量为 J 。

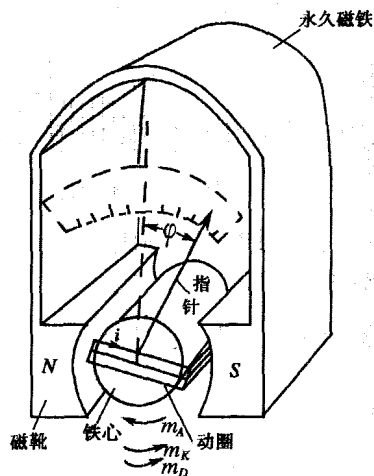


图 1.1 动圈式(测量)仪表工作原理示意图

试分析与求解:

- (1) 建立描述此调节对象时域与频域分析用数学模型。
- (2) 画出系统对应的方框图,并进行分析。
- (3) 选择合适的状态变量,导出系统的状态空间方程。

分析与求解:

- (1) 建立时域与频域分析用数学模型

由于指针偏转为旋转运动,故由牛顿第二定律可得

$$J\ddot{\varphi}(t) = m_A(t) - m_K(t) - m_D(t) \quad (2a)$$

另外,由式(1)又可得

$$m_A(t) = C\Phi i(t), \quad m_K(t) = K\varphi(t), \quad m_D(t) = D\dot{\varphi}(t) \quad (2b, c, d)$$

若假设全部初始条件为零,则式(2)拉氏变换后有

$$Js^2\varphi(s) = m_A(s) - m_K(s) - m_D(s) \quad (3a)$$

$$m_A(s) = C\Phi i(s), \quad m_K(s) = K\varphi(s), \quad m_D(s) = Ds\varphi(s) \quad (3b, c, d)$$

将式(3b、c、d)代入(3a)又可得

$$\varphi(s) = \frac{1}{Js^2} [C\Phi i(s) - K\varphi(s) - Ds\varphi(s)] \quad (3e)$$

显然,这是一个二阶系统。

(2) 系统方框图与分析

由式(3)可画得图 1.2。考虑到

$$m_D(s) = D[s\varphi(s)]$$

故可将图 1.2 改画成图 1.3,进而将式(3e)改写为

$$\varphi(s) = \frac{1}{s} \left\{ -\frac{D}{J}\varphi(s) + \frac{1}{Js} [-K\varphi(s) + C\Phi i(s)] \right\} \quad (4)$$

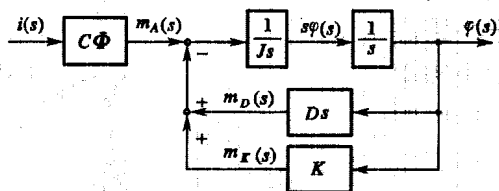


图 1.2 系统方框图之一

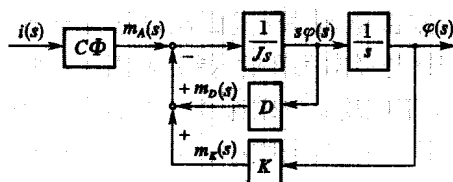


图 1.3 系统方框图之二

则又可将图 1.2 改画成图 1.4。注意到此时图中出现中间变量 $v(s)$, 并且方块 D/J 之输出量不再是 $m_D(s)$ 。

最后,若将式(4)改写为

$$\varphi(s) = \frac{1}{Js} \left\{ -D\varphi(s) + \frac{1}{s} [-K\varphi(s) + C\Phi i(s)] \right\} \quad (5)$$

则类似于图 1.4 之分析,又可画得图 1.5。此时图中出现中间变量 $v'(s)$ 。同样,方块 D 之输出量不再是 $m_D(s)$ 。

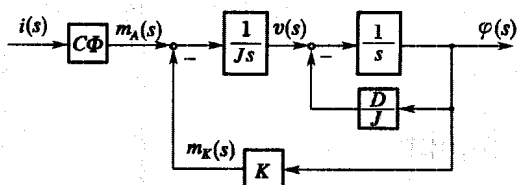


图 1.4 系统方框图之三

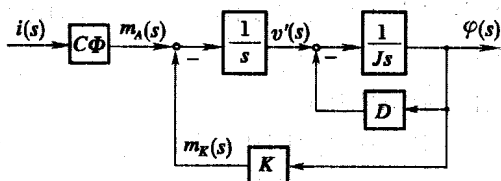


图 1.5 系统方框图之四

由上可见,与同一个数模相对应的系统方框图不是唯一的。显然,上述四个等效方框图只有图 1.3 是我们所需要的。这是因为,图 1.2 中存在纯微分环节 Ds , 这对计算机模拟十分不利,而图 1.4 与图 1.5 因出现一个无物理意义的中间变量 $v(s)$ 与 $v'(s)$ 而不如图 1.3。这是因为图 1.3 中既不出现纯微分方块,且方块 D 的输入量其物理意义(系 $\varphi(t)$ 的变化率)又十分明确,这就是为什么在实际中常用图 1.3 示方框图分析具有阻尼特性的二阶系统的原因。

(3) 系统对应的状态空间方程

在图 1.3 中,若设 $x_1(t) = \varphi(t)$, $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$, $u(t) = i(t)$, $y(t) = \varphi(t) = x_1(t)$, 则有(省去“(t)”):

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi} = x_2 \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \ddot{\varphi} \xrightarrow{\text{将式(2a)代入}} \frac{1}{J} (m_A - m_K - m_D) = \frac{1}{J} (C\Phi i - K\varphi - D\dot{\varphi}) \\ &= -\frac{K}{J}x_1 - \frac{D}{J}x_2 + \frac{C\Phi}{J}u \end{aligned} \quad (6b)$$

即有

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = c^T x \quad (7a, b)$$

式中

$$x = [x_1 \quad x_2]^T, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{D}{J} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{C\Phi}{J} \end{bmatrix}, \quad c^T = [1 \quad 0] \quad (8a, b, c, d)$$

注 由于此系单输入单输出量系统,也可用传递函数 $g(s)$ 描述,并由式(3e)可得

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\varphi(s)}{i(s)} = \frac{C\Phi/K}{\left(\frac{J}{K}s^2 + \frac{D}{K}s + 1\right)}$$

【题 1-2】 扰动量的物理概念与作用方式及其数模的建立、计及扰动量模型的调节对象扩展系统状态方程的构成及相关参数的确定。

由【题 2-2】图中 2.2 示出的内含单元传动装置(具有振荡性质的)旋转机械系统中,当视工作(驱动)转矩 m_A 为一个可事先给出的控制量,而视负荷(阻力)转矩 m_L 为一个不可测的扰动量,那么在【题 2-2】求解过程中建立起来的状态方程就可改用下式描述:

$$\dot{x} = Ax + bu + b_v v = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 & k_1 k_3 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_4}{T_4 \zeta} & -\frac{\zeta}{T_4} & -\frac{1-\zeta^2}{T_4 \zeta} & 0 & \frac{k_4 k_5}{T_4 \zeta} \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{T_4} & -\frac{\zeta}{T_4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 & -k_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{T_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_7 \end{bmatrix} v \quad (1)$$

式中: $u = m_A$ 为控制量; $v = m_L$ 为扰动量。

作为扰动量,在分析时,既可假定它以阶跃形式出现,也可将它视为一个具有频率为 ω_0 的无阻尼振荡,或者两者兼而有之。其中,未知的只是其阶跃高度、振荡幅值与相位。

试分析与求解:

(1) 试建立如下扰动量模型

$$\dot{x}_s = A_s x_s, \quad v = c_s^T x_s \quad (2a, b)$$

使其能描述题中阐述的两种形式扰动量的共同作用。

(2) 请写出计及扰动量模型的扩展系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_s \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} + b' u \quad (3)$$

对应的动力学矩阵 A' 与输入列矢量 b' 。

分析与求解:

(1) 建立扰动量模型

由于要求同时考虑阶跃与频率为 ω_0 的无阻尼振荡两种形式的扰动量之共同作用, 因此须先对其分别进行处理(请参阅参考文献[4]中 13.1 节图 I-3 和图 I-9), 然后再叠加。

对于阶跃形式的扰动量, 可如图 1.6 示, 用一个具有初始条件但输入量为零的积分环节给予描述(对应状态变量假设为 x_{s3}), 则有

$$\dot{x}_{s3} = 0 \rightarrow sx_{s3}(s) - x_{s3}(0) = 0 \rightarrow x_{s3}(s) = \frac{1}{s}x_{s3}(0) \quad (4)$$

由此可见, $x_{s3}(s)$, 即 x_{s3} 相当于一个阶跃函数, 其阶跃高度为 $x_{s3}(0)$, 即积分环节的初始条件。

对于以频率为 ω_0 的无阻尼振荡形式出现的扰动量, 参阅参考文献[4]中 13.1 节图 I-9 和式 (I-12) 可得图 1.7 和式 (5) (其中已将图 I-9 和式 (I-12) 中的 x_3 和 x_4 分别改写为 x_{s1} 和 x_{s2}):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{s1} \\ \dot{x}_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{初始条件分} \\ \text{别为 } x_{s1}(0), x_{s2}(0) \end{array} \right) \quad (5)$$

由式 (5) 可知: $\dot{x}_{s1} = x_{s2}$, 可见 x_{s1} 与 x_{s2} 量纲不同。考虑到 x_{s1} 与 x_{s3} 量纲相同, 因此, 当假定式 (1) 中的 v (即 m_L) 系由上述两种形式的扰动量叠加而成, 则只能有

$$v = x_{s1} + x_{s3} = [1 \quad 0 \quad 1]x_s = c_s^T x_s \quad (6a)$$

式中

$$x_s = [x_{s1} \quad x_{s2} \quad x_{s3}]^T, \quad c_s^T = [1 \quad 0 \quad 1] \quad (6b, c)$$

显然, 不能认为有 $v = x_{s1} + x_{s2} + x_{s3}$ 。

由此, 根据式 (6a) 的要求, 可由图 1.6 与图 1.7 画得图 1.8, 并由式 (5)、(4) 可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_{s1} &= x_{s2} \\ \dot{x}_{s2} &= -\omega_0^2 x_{s1} \Rightarrow \dot{x}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_s = A_s x_s \quad (7) \\ \dot{x}_{s3} &= 0 \end{aligned}$$

式中有

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

显然, 式 (7) 与 (6a) 即为要建立的式 (2) 示扰动量数模。

(2) 确定内含扰动量数模的扩展系统对应的 A' 与 b'

对于计及扰动量数模的扩展系统, 此时可设 $x' = [x^T \quad x_s^T]^T \rightarrow \dot{x}' = [\dot{x}^T \quad \dot{x}_s^T]^T$ 。由此, 利用式 (1)、式 (7) 和式 (8) 可得:

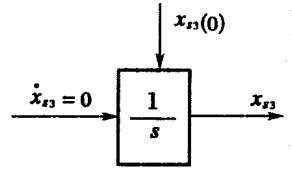


图 1.6 输入量为零的积分环节

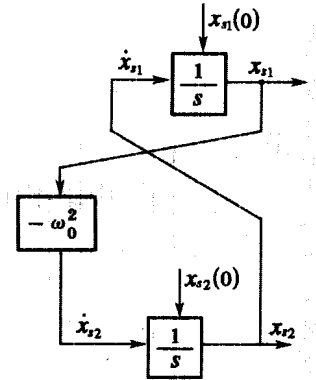


图 1.7 频率为 ω_0 的无阻尼振荡环节

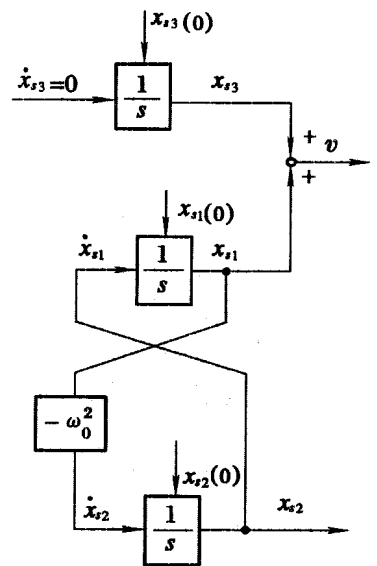


图 1.8 扰动量数模对应的方框图

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} b_v \\ 0 \end{bmatrix} c_s^T x_s$$

式中因

$$\begin{bmatrix} b_v \\ 0 \end{bmatrix} c_s^T x_s = \begin{bmatrix} 0 & b_v c_s^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix}$$

故又可得

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} A & b_v c_s^T \\ 0 & A_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u = A' x' + b' u \quad (9)$$

其中因

$$b_v c_s^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k_7 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_7 & 0 & -k_7 \end{bmatrix}$$

故式(9)又有

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -k_1 & 0 & k_1 k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_4}{T_4 \zeta} & -\frac{\zeta}{T_4} & -\frac{1-\zeta^2}{T_4 \zeta} & 0 & \frac{k_4 k_5}{T_4 \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\zeta}{T_4} & -\frac{\zeta}{T_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_6 & 0 & -k_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_7 & 0 & -k_7 & 0 & -k_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_2}{T_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10a, b)$$

【题 1-3】 由物理定律建立调节对象的状态空间方程及其对应的调节规范形与观测规范形。

设某矿山(如煤矿)竖直坑道吊车自动升降装置及其控制系统(下简称吊车装置),经分析与线性化处理,可近似由下述三个方程(子系统)给予描述:

$$\textcircled{1} \quad \ddot{\omega} + \frac{1}{T} \dot{\omega} = \frac{1}{T} w \quad (\text{转速调节系统——内含驱动马达}) \quad (1)$$

式中: w 为给定值(系统输入量), $\dot{\omega}$ 为主动轮(吊车经钢索悬挂在其上)之旋转角速度, T 为转速调节系统对应的时间常数。

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{v} + v = r\omega \quad (\text{吊车升降时对应的动态运行(振荡)方程}) \quad (2)$$

式中: v 为悬挂钢索上下移动(即吊车升降)时的速度, r 为主动轮半径, ω_0 为由钢索弹性等相关参数决定的吊车运动对应的固有振荡频率.

$$\textcircled{3} \quad \dot{h} = v \quad (\text{吊车升降速度 } v \text{ 与其位置变化 } h \text{ 之间的关系}) \quad (3)$$

式中: h 为吊车相对于某(垂直方向)参考坐标的升降距离(系统输出量). 令

$$u = \omega, \quad y = h \quad (4a, b)$$

试分析与求解:

(1) 由上可知, 此吊车装置系单输入单输出量系统. 请在如下选择状态变量

$$x_1 = \omega, \quad x_2 = v, \quad x_3 = \dot{v}, \quad x_4 = y \quad (5a, b, c, d)$$

时, 写出对应的状态空间方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad y = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + du \quad (6a, b)$$

即确定其中的参数 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}^T$ 和 d .

(2) 试确定与式(6)相对应的状态空间方程调节规范形(即确定其中的参数 $\mathbf{A}_R$ 、 $\mathbf{b}_R$ 和 $\mathbf{c}_R^T$).

(3) 试确定与式(6)相对应的状态空间方程观测规范形(即确定其中的参数 $\mathbf{A}_B$ 、 $\mathbf{b}_B$ 和 $\mathbf{c}_B^T$).

分析与求解:

(1) 写出调节对象对应的状态空间方程

由式(1)、(3)以及利用式(4)、(5)可分别得:

$$\dot{\omega} = -\frac{1}{T}\omega + \frac{1}{T}u \rightarrow \dot{x}_1 = -\frac{1}{T}x_1 + \frac{1}{T}u \quad (7a, b)$$

$$\dot{h} = \dot{y} = v \rightarrow \dot{x}_4 = x_2 \quad (8a, b)$$

另外, 由式(2)可得

$$\ddot{v} = r\omega_0^2\omega - \omega_0^2v \quad (9)$$

考虑到由式(5c)有

$$\dot{x}_3 = \ddot{v} \quad (10)$$

故由式(9)、(5)可得

$$\dot{x}_3 = r\omega_0^2x_1 - \omega_0^2x_2 \quad (11)$$

最后, 由式(5b)又可得

$$\dot{x}_2 = \dot{v} = x_3 \quad (12)$$

至此, 利用式(7)、(12)、(11)和式(8), 可直接得到式(6)中的 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}^T$ 和 d :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13a, b)$$

考虑到式(5d), 故又有

$$\mathbf{c}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1], \quad d = 0 \quad (13c, d)$$

注 由于 y 与 u 无直接联系, 故有式(13d), 下同. 另外, 上述分析相当于由物理定律建立系统的状态空间方程.

(2) 状态空间方程调节规范形

对此系统,确定与式(13)对应的状态空间方程调节规范形有两种方法,一是利用参考文献[4]中3.2.2节方法进行状态变量转换(坐标变换),二是先确定此单输入单输出系统对应的传递函数 $g(s)$,然后再按参考文献[4]1.3.1节中的式(1.52)或式(1.53)进行分析.考虑到后者较为简单,故选取用以如下分析.在假定全部初始条件为零时,将式(7)、(8)、(9)拉氏变换后可分别得

$$s\omega(s) = -\frac{1}{T}\omega(s) + \frac{1}{T}u(s) \rightarrow \omega(s) = \frac{1}{Ts+1}u(s) \quad (14)$$

$$sy(s) = v(s) \quad (15)$$

$$s^2v(s) = r\omega_0^2\omega(s) - \omega_0^2v(s) \rightarrow v(s) = \frac{r}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + 1}\omega(s) \quad (16)$$

将式(14)、(15)代入式(16)又可得

$$sy(s) = \frac{r}{\frac{1}{\omega_0^2}s^2 + 1} \frac{1}{Ts+1}u(s) \rightarrow y(s) = \frac{r}{\frac{1}{\omega_0^2}s^3 + s} \frac{1}{Ts+1}u(s)$$

即有

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r}{\left(\frac{1}{\omega_0^2}s^3 + s\right)(Ts+1)} \\ &= \frac{r}{\frac{T}{\omega_0^2}s^4 + \frac{1}{\omega_0^2}s^3 + Ts^2 + s} = \frac{b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \end{aligned} \quad (17)$$

可见,此时有 $n=4; b_0=r, b_1=b_2=b_3=b_4=0; a_0=0, a_1=1, a_2=T, a_3=\frac{1}{\omega_0^2}, a_4=\frac{T}{\omega_0^2}$.由此,利用参考文献[4]中式(1.52a、b、c)可分别得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_4} & -\frac{a_1}{a_4} & -\frac{a_2}{a_4} & -\frac{a_3}{a_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\omega_0^2}{T} & -\omega_0^2 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\omega_0^2}{T} \end{bmatrix} \quad (18a, b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T &= \left[\left(b_0 - a_0 \frac{b_4}{a_4}\right) \left(b_1 - a_1 \frac{b_4}{a_4}\right) \left(b_2 - a_2 \frac{b_4}{a_4}\right) \left(b_3 - a_3 \frac{b_4}{a_4}\right) \right] \\ &= [b_0 \ 0 \ 0 \ 0] = [r \ 0 \ 0 \ 0] \end{aligned} \quad (18c)$$

若将式(17)分母中 s 最高阶系数变为1,则可得

$$g(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r \frac{\omega_0^2}{T}}{s^4 + \frac{1}{T}s^3 + \omega_0^2s^2 + \frac{\omega_0^2}{T}s} = \frac{b_4s^4 + b_3s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0s} \quad (19)$$

此时有: $n=4; b_0=r \frac{\omega_0^2}{T}, b_1=b_2=b_3=b_4=0; a_0=0, a_1=\frac{\omega_0^2}{T}, a_2=\omega_0^2, a_3=\frac{1}{T}, a_4=1$.由此,利用参考文献[4]中式(1.53a、b、c)并注意到其中的式(1.58)可分别得

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\omega_0^2}{T} & -\omega_0^2 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\mathbf{b}_R=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (20a, b)$$

$$\mathbf{c}^T=\mathbf{c}_R^T=[b_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]=\left[r \frac{\omega_0^2}{T} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right] \quad (20c)$$

注 式(19)示即为状态空间方程(标准)调节规范形对应的系数阵。请注意式(20)与式(18)之联系与区别,即两者具有相同的动力学矩阵 $\mathbf{A}$ (表明具有相同的动力学特性,即稳定特性)。这是因为由式(17)与式(19)得到的两个系统之特征方程,即 $\frac{T}{\omega_0^2}s^4 + \frac{1}{\omega_0^2}s^3 + Ts^2 + s = 0$ 与 $\frac{T}{\omega_0^2}\left(s^4 + \frac{1}{T}s^3 + \omega_0^2s^2 + \frac{\omega_0^2}{T}s\right) = 0$ (即 $s^4 + \frac{1}{T}s^3 + \omega_0^2s^2 + \frac{\omega_0^2}{T}s = 0$) 是一回事。或者说, s^4 项之系数是否处理成 1, 对系统的动力学特性(即 $\mathbf{A}$ 阵的确定)无影响,但对参数 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{c}^T$ 之确定会产生影响。

(3) 状态空间方程观测规范形

可利用参考文献[4]中式(1.58)与(1.59)示对偶关系,直接由式(20)得到系统对应的状态空间方程(标准)观测规范形(与 $a_n=a_1=1$ 相对应):

$$\mathbf{A}_B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{\omega_0^2}{T} \\ 0 & 1 & 0 & -\omega_0^2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_B=\begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r \frac{\omega_0^2}{T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21a, b)$$

$$\mathbf{c}_B^T=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad (21c)$$

注 由上分析可知,在状态变量选择方面,不仅式(20)、(21)与式(13)不同,就是式(20)与式(21)也不相同(详见参考文献[4]中 1.3.1 节与 1.3.2 节之分析),但三者却具有(四个)相同的系统特征值,这是因有 $|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}_R|=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}_B|=0$ 。

【题 1-4】 利用物理定律建立实际(单输入单输出)系统对应的数学模型(有名值与标么值方程)、将其转换成状态空间方程调节规范形、确定状态空间方程各系数矩阵中元素与数模中参数之间的关系。

设某汽车防震(弹性)系统经近似但有效处理后,有图 1.9 示工作原理图。图中有:

$m_A=365(\text{kg})$ ——车体质量;

$m_R=40(\text{kg})$ ——(四轮等效的)车轮质量;

$K_A=1.5 \times 10^4(\text{kg/s}^2)$ 、 $D_A=2.5 \times 10^3(\text{kg/s})$ ——车体与车轮之间等效弹簧与阻尼作用对应的系数;

$K_R=1.6 \times 10^5(\text{kg/s}^2)$ ——轮胎自身所具弹性(等效弹簧)作用对应的系数(精确分析时还可进一步考虑轮胎自身所具阻尼作用对应的系数 D_R , 因其在此题中可略去不计,故图 1.9 中不出现 D_R)。

这是一个双质量系统. 在稳态运行时, 重力 (质量) 的作用将通过弹簧被压缩来平衡. 由此, 整个系统在外来因素作用下的响应, 就可利用相对于平衡状态的偏差量变化来描述, 即图中的 x_A 、 x_R 可分别表示 m_A 与 m_R 相对于稳态工作点的位移. 至于外来因素, 在本题中可视为由于地面凹凸不平而出现的突发性的轮胎 (高度) 被压缩量 h_R . 考虑与此同时还会引起 m_R 之位移 x_R , 因此也可理解为作用到系统的外作用力为 $f = K_R(h_R - x_R)$.

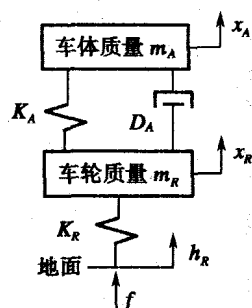


图 1.9 汽车防震系统工作原理图

试分析与求解:

(1) 描述系统用微分方程表达式.

(2) 描述系统用标么值方程.

(3) 描述系统用状态空间方程调节规范形及相关参数的对应关系.

分析与求解:

(1) 描述系统用数学模型

如上述, 由于外作用力 f 通过 K_R 作用到 m_R 上, 由此参阅参考文献[4]中【例 1.2】之分析, 可得

对于 m_R 有:

$$m_R \ddot{x}_R = K_R(h_R - x_R) - K_A(x_R - x_A) - D_A(\dot{x}_R - \dot{x}_A) \quad (1a)$$

对于 m_A 有:

$$m_A \ddot{x}_A = K_A(x_R - x_A) + D_A(\dot{x}_R - \dot{x}_A) \quad (1b)$$

若设 $\dot{x}_A = v_A$ 、 $\dot{x}_R = v_R$ 、 $\ddot{x}_A = \dot{v}_A$ 、 $\ddot{x}_R = \dot{v}_R$, 则式(1a、b)又可表示为:

$$m_R \dot{v}_R = K_R(h_R - x_R) - K_A(x_R - x_A) - D_A(v_R - v_A) \quad (2a)$$

$$m_A \dot{v}_A = K_A(x_R - x_A) + D_A(v_R - v_A) \quad (2b)$$

由此, 当选择 x_A 、 x_R 、 v_A 、 v_R 和 h_R 分别作为四个状态变量和一个输入量时, 即可得如下时域描述中的状态方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_A = v_A \\ \dot{x}_R = v_R \\ \dot{v}_A = -\frac{K_A}{m_A}x_A + \frac{K_A}{m_A}x_R - \frac{D_A}{m_A}v_A + \frac{D_A}{m_A}v_R \\ \dot{v}_R = \frac{K_A}{m_R}x_A - \frac{(K_A + K_R)}{m_R}x_R + \frac{D_A}{m_R}v_A - \frac{D_A}{m_R}v_R + \frac{K_R}{m_R}h_R \end{cases} \quad (3a, b, c, d)$$

显然, 在频域中对应可得

$$\begin{cases} x_A(s) = \frac{1}{s}v_A(s) \\ x_R(s) = \frac{1}{s}v_R(s) \\ v_A(s) = \frac{1}{s} \left[-\frac{K_A}{m_A}x_A(s) + \frac{K_A}{m_A}x_R(s) - \frac{D_A}{m_A}v_A(s) + \frac{D_A}{m_A}v_R(s) \right] \\ v_R(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{K_A}{m_R}x_A(s) - \frac{(K_A + K_R)}{m_R}x_R(s) + \frac{D_A}{m_R}v_A(s) - \frac{D_A}{m_R}v_R(s) + \frac{K_R}{m_R}h_R(s) \right] \end{cases} \quad (4a, b, c, d)$$

式中, 假定全部初始条件为零 (物理意义为: 整个系统处于平衡 (稳定运行) 状态).

(2) 频域中系统参数与数模之标么化处理

现以式(1)为例进行分析. 在假定全部初始条件为零和拉氏变换后, 由式(1b)、(1a)可分别得

$$s^2 x_A(s) = \frac{K_A}{m_A} [x_R(s) - x_A(s)] + \frac{D_A}{m_A} [s x_R(s) - s x_A(s)] \quad (5a)$$

$$s^2 x_R(s) = \frac{K_R}{m_R} [h_R(s) - x_R(s)] - \frac{K_A}{m_R} [x_R(s) - x_A(s)] - \frac{D_A}{m_R} [s x_R(s) - s x_A(s)] \quad (5b)$$

现选择 t_B (对 t)、 $s_B = \frac{1}{t_B}$ (对 s)、 x_B (对 x_A, x_R 与 h_R) 作为基准值 (用下标 B 表示), 则可得以下对应的标么值 (用右上标 $*$ 表示):

$$s^* = \frac{s}{s_B} = s t_B \rightarrow s = \frac{s^*}{t_B}, s^2 = \frac{(s^*)^2}{t_B^2} \quad (6a, b, c)$$

$$x_{A,R}^*(s^*) = \frac{x_{A,R}(s)}{x_B} = \frac{x_{A,R}\left(\frac{s^*}{t_B}\right)}{x_B} \quad (6d)$$

$$h_R^*(s^*) = \frac{h_R(s)}{x_B} = \frac{h_R\left(\frac{s^*}{t_B}\right)}{x_B} \quad (6e)$$

由此, 式(5a)两边同乘 $\frac{t_B^2}{x_B}$ 可得

$$(s^2 t_B^2) \frac{x_A(s)}{x_B} = \frac{K_A t_B^2}{m_A} \left[\frac{x_R(s)}{x_B} - \frac{x_A(s)}{x_B} \right] + \frac{D_A t_B}{m_A} \left[(s t_B) \frac{x_R(s)}{x_B} - (s t_B) \frac{x_A(s)}{x_B} \right]$$

考虑到式(6)则有

$$(s^*)^2 x_A^*(s^*) = \frac{K_A t_B^2}{m_A} [x_R^*(s^*) - x_A^*(s^*)] + \frac{D_A t_B}{m_A} [s^* x_R^*(s^*) - s^* x_A^*(s^*)] \quad (7a)$$

类似于式(7a)之分析, 将式(5b)两边同乘 $\frac{t_B^2}{x_B}$ 并考虑到式(6)又可得

$$\begin{aligned} (s^*)^2 x_R^*(s^*) &= \frac{K_R t_B^2}{m_R} [h_R^*(s^*) - x_R^*(s^*)] - \frac{K_A t_B^2}{m_R} [x_R^*(s^*) - x_A^*(s^*)] \\ &\quad - \frac{D_A t_B}{m_R} [s^* x_R^*(s^*) - s^* x_A^*(s^*)] \end{aligned} \quad (7b)$$

注 由于 $m_{A,R}$ 、 $K_{A,R}$ 、 D_A 和 t_B 的量纲分别为 (kg)、(kg/s²)、(kg/s) 和 (s), 因此式(7)中的系数 $\frac{K_{A,R} t_B^2}{m_{A,R}}$ 与 $\frac{D_A t_B}{m_{A,R}}$ 将为无量纲之值, 这正是标么值方程所需要的, 也表明上述分析之正确性。

进一步, 若取 $t_B = 1$ s, 以及省去右上标 $*$, 则从方程外部形式上讲, 式(7a、b)与(5a、b)将具有完全相同的形式. 若考虑到 $\frac{K_A t_B^2}{m_A} = \frac{1.5 \times 10^4 \times 1^2}{365}$ 、 $\frac{D_A t_B}{m_A} = \frac{2.5 \times 10^3 \times 1}{365}$ 、 $\frac{K_A t_B^2}{m_R} = \frac{1.5 \times 10^4 \times 1^2}{40}$ 、 $\frac{K_R t_B^2}{m_R} = \frac{1.6 \times 10^5 \times 1^2}{40}$ 和 $\frac{D_A t_B}{m_R} = \frac{2.5 \times 10^3 \times 1}{40}$, 则式(7)与式(5)又可同时用下式描述:

$$s^2 x_A(s) = \frac{1.5 \times 10^4}{365} [x_R(s) - x_A(s)] + \frac{2.5 \times 10^3}{365} [s x_R(s) - s x_A(s)] \quad (8a)$$

$$s^2 x_R(s) = \frac{1.6 \times 10^5}{40} [h_R(s) - x_R(s)] + \frac{1.5 \times 10^4}{40} [x_R(s) - x_A(s)]$$