21世纪高等院校教材

电类与信息类专业适用

大学数学（三）

（级数、积分变换与数理方程）

王传荣 朱玉灿 徐荣聪 编著

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高等院校教材

电类与信息类专业适用

大学数学(三)

(级数、积分变换与数理方程)

王传荣　朱玉灿　徐荣聪　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本套书紧扣现行大学本科电类与信息类等专业的公共基础课的教学要求，将复分析与实分析作为一个整体互相交融、有机结合，场论与多元函数微积分统一处理，并以线性代数为工具贯穿全书，建立起自然而紧凑的新体系. 全书共分三册，内容包括一元函数与多元函数微积分、矢量分析与场论、复变函数、积分变换、数学物理方程. 体系新颖，结构紧凑自然，具有良好的可读性.

本书可供高等院校电类与信息类各专业本科教学选用教材和教学参考书，也可供其他专业师生及工程技术人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 3，级数、积分变换与数理方程/王传荣，朱玉灿，徐荣聪编著. —北京：科学出版社，2007
21世纪高等院校教材. 电类与信息类专业适用
ISBN 978-7-03-019581-4

Ⅰ.大… Ⅱ.①王… ②朱… ③徐… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 122779 号

责任编辑：姚莉丽 / 责任校对：陈玉凤
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007年8月第一次印刷 印张：18 3/4
印数：1—4 000 字数：353 000

定价：25.00元

前　　言

众所周知,数学基础课在高等教育中具有十分重要的基础地位,电类和信息类专业由于其专业特征,对数学基础课的要求比较高.现行工科数学基础课通常由"高等数学"和"工程数学"组成."工程数学"应包含几门具体课程,则因专业不同而差异很大.这一体系可追溯到20世纪五六十年代,但现在的课程体系和相应教材基本形成于20世纪的70年代末到80年代初.由于种种原因,目前数学公共基础课的总学时一般不足原来的四分之三.高等数学和工程数学的各门课程又孤立分割,自求完备.教材的新版本不断充实内容,越编越厚.于是旧课程体系、旧教材体系与大幅度压缩的总学时数之间形成尖锐的矛盾.

我们于2001年开始在福州大学对电类与信息类专业的数学基础课进行改革,在保留数学基础课现有总学时不变的前提下,把原属"微积分"、"线性代数"、"复变函数"、"积分变换"、"矢量分析与场论"、"数学物理方程与特殊函数"六门课程重组为两门课程:"线性代数与空间解析几何"和"大学数学——实函数与复函数微积分"(一)、(二)、(三),后者分三个学期讲授.在这样一种新体系下,代数、几何和分析互相渗透,实分析与复分析统一处理,有机地结合,这与现代数学发展的特征是一致的,它使我们能够从不同角度更深刻地揭示相关内容的实质,突出若干原来分属不同课程教学内容的共同本质,减少不必要的重复,以自然的线条使教学内容的结构更为紧凑.根据我们的经验,可比旧教材体系节约16~20学时,有效地缓解旧教材体系与大量压缩的总学时数之间的矛盾.我们把节约的学时尽量用于恢复被删减的习题课,加强基础训练,加强思维素质的培养,保障教学质量.

本书是我们在改革过程中形成和使用讲义的基础上经反复修订而成的,基本内容符合"工科类本科数学基础课程教学基本要求"和"工程数学课程教学基本要求",使用本书要求在第一学期同时开设"线性代数"或"线性代数与空间解析几何".本书有下述若干特点:

第一,实分析与复分析作为一个整体互相交融,更加突出教材内容的本质特征.例如,在第二型曲线积分之后陈述复积分,使Green公式、Cauchy积分定理和Cauchy积分公式共同的本质和使用方法更为鲜明;又如,函数展开为幂级数的条件,在原来高等数学范围内是难以讲清楚的,利用解析函数的概念便较易讲清楚了,这也是本书采用新体系的优点之一.

第二,把多元函数微积分学与场论密切联系,揉合在一起,它使第二型积分有清晰的应用背景,使Green公式、Gauss公式和Stokes公式有清晰的物理解释,也

使读者看到几种特殊场之间的关系实质上就是第二型曲线积分与路径无关的等价条件.

第三,将线性代数作为基本工具贯穿于第 5 章及以后各章. 代数、几何与分析互相渗透,既可把所述内容刻画得更深刻、更一般,又能使读者在应用中加深对线性代数知识的理解.

第四,对若干经典内容采用新颖的表述方式. 例如,本书利用质量分布模型引进第一型积分,以统一的方式描述重积分、第一型曲线积分和第一型曲面积分的概念、性质和应用;利用复变函数方法完整地刻画平面场,利用线性代数描述场在正交曲线坐标系下的表示,以便于接受的方式引进路见可教授推广的留数定理,这是我国数学家的新贡献,如果不追究理论的细节,利用推广的留数定理计算积分围道有极点的复积分及相关的实积分,比现行教材中传统的处理方法要方便得多.

第五,本书包含许多"注记",主要是用于帮助读者加深对有关概念、知识、方法的理解和延伸以及避免理解上的混淆和失误. 本书对部分例题给出多种解法,以期帮助读者对学过的知识能融会贯通. 为使本书既适合工科专业的教学要求,又不失严谨,我们对若干概念和未加证明的命题等给出相应的参考文献. 本书打"*"号的章节和例题等,有些是供有关专业选用的,如第 14 章;有些则是提供给有兴趣的读者作为阅读材料,如线性度量空间的极限与连续、微分形式的 Stokes 公式简介、一般积分变换简介、电子束聚焦、电磁场一系列方程的推导及幅角原理在控制论的应用等.

本书是按较为新颖的体系展开的,其各章的主要内容如下:第 1 章到第 3 章介绍经典的一元函数微积分. 第 4 章介绍常微分方程. 第 5 章介绍空间解析几何,供选用,如果在第一学期开设"线性代数与空间解析几何",则此章可略去. 第 6 章介绍多元函数微分学,其中,利用 Jacobian 矩阵阐述复合函数求偏导数的链式法则,利用二次型阐述多元函数的极值,并将向量函数的导数与微分、数量场的等值面、向量场的向量线等以自然的方式融入本章. 第 7 章介绍解析函数与共形映射,其内容,特别是 Cauchy-Riemann 方程是多元函数微分学的自然延伸. 第 8 章介绍第一型积分,包括重积分、第一型曲线积分和第一型曲面积分. 第 9 章介绍第二型曲线积分和复积分. 第 10 章介绍第二型曲面积分与场论. 第 11 章介绍无穷级数,先介绍复数项级数的概念和性质,正项级数、交错级数和任意复数项级数及其审敛,然后介绍复函数项级数、幂级数、Laurent 级数、Fourier 级数(包括其复数形式),实幂级数作为实系数幂级数在实轴上的限制而得到. 第 12 章介绍留数理论及其应用. 第 13 章介绍积分变换,主要是 Fourier 变换和 Laplace 变换,其中单辟一节介绍 Fourier 变换与 Laplace 变换的应用,希望读者能把二者的特征和用法加以比较. 最后用一小段简要介绍一般积分变换的概念及若干常用的变换,如 Milin 变换、Z 变换和小波变换. 第 14 章介绍数学物理方程,主要是介绍定解问题和利用分

离变量法求解数学物理方程的定解问题.而利用积分变换法求解定解问题,有一部分则在第13章作为积分变换的应用介绍.此外,因“数学实验”一般另外开设课程,所以本书只把“数学实验纲要”列为附录,并指明它结合的章节.

本书附有相当数量的习题,它与现行多数数学公共基础课教材对本科数学教学的要求大致相当.而每章末配有要求较高的综合性练习题,其中包含了相当数量的历年硕士研究生入学考试试题及为进一步提高而编写的练习,这部分供教师教学或读者学习过程中根据需要选用.

路见可教授和李明忠教授审阅了本书并提出宝贵意见,我们深表谢意.我们还要感谢科学出版社的热情关注及大力支持才使本书得以尽早出版.

本书在编写过程中得到福州大学教务处、福州大学数学系、数学与计算机科学学院、物理与信息工程学院及许多同事的宝贵支持,如周勇提供本书习题答案,王宏健编写了附录Ⅲ“数学实验纲要”,福州大学信息与通信工程系和电气工程学院的历届学生也为本书的完善提供了许多宝贵的意见,在此一并致谢.

作为新教材,本书中谬误或不成熟的地方在所难免,敬请读者予以指正,并与我们联系,以期在今后加以修订和改进,使之臻于成熟.

王传荣　朱玉灿　徐荣聪
2007年3月于福州大学

目　　录

第 11 章 无穷级数

无穷级数是微积分学的进一步发展，并成为微积分学的重要组成部分. 它在数学的理论和方法中占据重要的地位，在科学技术与工程的许多领域也有广泛的应用.

本章首先讨论复常数项级数的基本概念和性质，接着讨论正项级数、交错级数和任意项级数的审敛，然后依次讨论幂级数、Taylor 级数、Laurent 级数和 Fourier 级数.

11.1 常数项级数

11.1.1 复数列的极限

设$\{\alpha_n\}$是一复数列，$\alpha_n=a_n+\mathrm{i}b_n(n=1,2,\cdots)$，又设 $\alpha=a+\mathrm{i}b$ 为一确定的复数. 若$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$ 使得当 $n>N$ 时，

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon,$$

则说 α 是复数列$\{\alpha_n\}$当 $n\to\infty$时的**极限**，记作$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$. 此时也称**复数列$\{\boldsymbol{\alpha_n}\}$收敛于 $\boldsymbol{\alpha}$.**

我们把实数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$分别称为对应于复数列$\{\alpha_n\}$的**实部数列**和**虚部数列**.

定理 1 设$\alpha_n=a_n+\mathrm{i}b_n$，$\alpha=a+\mathrm{i}b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ 的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

证明 由 $\alpha_n-\alpha=(a_n-a)+\mathrm{i}(b_n-b)$知

$$|a_n-a|\leqslant|\alpha_n-\alpha|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|,$$
$$|b_n-b|\leqslant|\alpha_n-\alpha|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|,$$

若$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$，则$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $n>N$ 时

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon,$$

故有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，同理，有$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$.

反之,若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists N_1$ 使得当 $n>N_1$ 时,$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$,又$\exists N_2$ 使得当 $n>N_2$ 时,$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$,取 $N=\max(N_1,N_2)$,则当 $n>N$ 时,

$$|\alpha_n-\alpha|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$.

定理 1 指出一个复数列$\{\alpha_n\}$收敛于 $\alpha=a+ib$ 的充要条件是它的实部数列$\{a_n\}$和虚部数列$\{b_n\}$分别收敛于 a 和 b,它使复数列的极限问题可以归结为实数列的极限问题.

判定实数列收敛的 Cauchy 准则也可推广到复数列.

定理 2(Cauchy 准则)　复数列$\{\alpha_n\}$收敛的充分且必要条件是$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,使得当 $n>N$ 时,

$$|\alpha_{n+p}-\alpha_n|<\varepsilon$$

对一切自然数 p 成立.

证明留给读者自行完成.

实数列极限的基本性质如极限的四则运算、无穷小量的运算性质等对复数列极限也成立.

11.1.2　级数的概念

给定数列(它可以是实数列,也可以是复数列):

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots,$$

称形式和

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots$$

为**无穷级数**,简称**级数**(series),记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots,\tag{11.1.1}$$

其中 α_1 称为级数的**首项**,第 n 项 α_n 称为级数的**通项**或**一般项**.

$$S_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\tag{11.1.2}$$

称为级数前 n 项和或**部分和**,当 n 依次取 $1,2,3,\cdots$时,可得一个新的序列

$$S_1=\alpha_1,\quad S_2=\alpha_1+\alpha_2,\quad\cdots,\quad S_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\cdots,$$

称$\{S_n\}$为部分和序列;反之,有了部分和序列$\{S_n\}$,由 $\alpha_n=S_n-S_{n-1}$可得到原数列

$\{\alpha_n\}$.

我们说式(11.1.1)是形式和,这是因为式(11.1.1)中的无限项能否求和,如何求和?这是一个有待回答的问题.因此,我们引进级数收敛与发散的概念.

定义 若当 n 无限增大时,部分和序列$\{S_n\}$存在有限的极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{11.1.3}$$

则说级数(11.1.1)**收敛**(convergence),极限 S 称为级数(11.1.1)的**和**,记成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = S \quad 或 \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots = S.$$

否则,即极限$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在或$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$,则说级数(11.1.1)**发散**(divergence).

例 1 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots$$

是否收敛?

解
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

故此级数收敛于 1.

今后,判断级数收敛还是发散将称为讨论级数的敛散性或级数审敛,当级数收敛时称

$$r_n = S - S_n = \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots$$

为级数的余项或余和,当用 S_n 近似代替 S 时,$|r_n|$就是绝对误差.

显然,当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛时,$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

我们看到,研究级数的收敛问题,实际上就是研究部分和序列的收敛问题.由数列收敛的 Cauchy 准则立刻得到级数收敛的 Cauchy 准则.

定理 3(Cauchy 准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分和必要条件是$\forall\, \varepsilon > 0$,$\exists N$,使得当 $n > N$ 时,

$$|S_{n+p} - S_n| = |\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon$$

对一切自然数 p 成立.

推论　级数中去掉或加进有限多项，不改变级数的敛散性.

这是因为若假设改变级数有限项后，所得的新级数的部分和记为 S'_n，则当 n 充分大时，

$$S'_{n+p} - S'_n = S_{n+p} - S_n,$$

由 Cauchy 准则就可以得出推论.

应当指出，改变级数的前有限项虽然不影响级数的敛散性，但当级数收敛时，它的和是会改变的.

例 2　证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

证明　当 $0<k<p$ 时，

$$\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n+p},$$

故

$$S_{n+p} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

特别地，取 $p=n$，则

$$|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 准则知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

11.1.3　无穷级数的性质

性质 1　设 a 为常数，(1)若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛于 S，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\alpha_k$ 收敛于 aS. (2)若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散，$a \neq 0$，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\alpha_k$ 也发散.

证明　(1) 设

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a\alpha_k.$$

它们分别是级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\alpha_k$ 的部分和. 这时 $\sigma_n = aS_n$，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛于 S，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，故

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (aS_n) = a \lim_{n\to\infty} S_n = aS.$$

即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\alpha_k$ 收敛于 aS.

(2) 用反证法. 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\alpha_k$ 收敛,因 $a\neq 0$,由(1)知

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a}(a\alpha_k)$$

收敛,矛盾. 故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\alpha_k$ 发散.

性质 2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 分别收敛于 S_1 和 S_2,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha_n+\beta_n)$ 收敛于 S_1+S_2. 即两收敛级数可逐项相加.

证明留给读者作为练习.

推论 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n$ 分别收敛于 S_1 和 S_2,a 和 b 为常数,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a\alpha_n+b\beta_n)$ 收敛于 aS_1+bS_2.

性质 3(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

证明 因 $\alpha_n=S_n-S_{n-1}$,又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛,设其和为 S,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,$\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n-\lim\limits_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$.

例如,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots,$$

因当 $n\to\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}$ 不存在,即不满足级数收敛的必要条件,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n+1}$ 发散.

例 3 证明:**等比级数**(又称几何级数)

$$\sum_{n=1}^{\infty} az^{n-1} = a+az+\cdots+az^{n-1}+\cdots \tag{11.1.4}$$

当 $|z|<1$ 时收敛于 $\dfrac{a}{1-z}$,当 $|z|\geqslant 1$ 时发散. 其中,a,z 可以是实数,也可以是复数,$a\neq 0$.

解
$$S_n=\sum_{k=1}^{n} az^{k-1}=a+az+\cdots+az^{n-1}, \tag{11.1.5}$$

$$zS_n = z\sum_{k=1}^{n} az^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} az^k = az + \cdots + az^{n-1} + az^n, \qquad (11.1.6)$$

式(11.1.5)减去式(11.1.6),得

$$(1-z)S_n = a - az^n.$$

若 $z\neq 1$,则

$$S_n = \frac{a(1-z^n)}{1-z};$$

当 $|z|<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} z^n=0$,故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-z}.$$

即当 $|z|<1$ 时,级数(11.1.4)收敛于 $\frac{a}{1-z}$;若 $|z|\geqslant 1$,当 $n\to\infty$ 时,az^{n-1} 不趋近于 0,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} az^{n-1}$ 发散.

注记　通项趋于零是级数收敛的必要条件,但不是充分条件. 例如,调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,其通项 $\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$,但此级数发散. 不过,若通项不趋近于零,常常被用来判定级数发散.

性质 4　收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原来的和.

* **证明**　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛于 S,它的部分和序列为 $\{S_n\}$,加括号后得到级数

$$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{j_1})+(\alpha_{j_1+1}+\cdots+\alpha_{j_2})+\cdots+(\alpha_{j_{n-1}+1}+\cdots+\alpha_{j_n})+\cdots,$$

其部分和为 σ_n. 则

$$\begin{aligned}\sigma_n &= (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{j_1})+(\alpha_{j_1+1}+\alpha_{j_1+2}+\cdots+\alpha_{j_2})+\cdots\\ &\quad+(\alpha_{j_{n-1}+1}+\alpha_{j_{n-1}+2}+\cdots+\alpha_{j_n}) = S_{j_n}.\end{aligned}$$

因 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{j_n}=S$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=S$.

注记　性质 4 的逆命题不成立,如加括号的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛于零,但未加括号的级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots \qquad (11.1.7)$$

却是发散的,这是因为级数(11.1.7)的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数时},\\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时},\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在.

下面我们给出复数项级数审敛的一个充分且必要条件.

若 $\alpha_n=a_n+\mathrm{i}b_n$，$a_n$ 和 b_n 为实数($n=1,2,\cdots$)，则复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 可写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

我们分别称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的实部级数和虚部级数.

性质 5 复级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛的充分且必要条件是实部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和虚部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.

证明 分别记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k,\quad S_{1n}=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}b_k.$$

由复数列极限收敛的充分必要条件知

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\overset{\text{记}}{=\!=}S_1+\mathrm{i}S_2$$

的充分且必要的条件是

$$\lim_{n\to\infty}S_{1n}=S_1\quad\text{且}\quad\lim_{n\to\infty}S_{2n}=S_2,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛于 $S=S_1+\mathrm{i}S_2$ 的充分且必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S_1 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛于 S_2.

性质 5 使我们可以把复数项级数的审敛归结为实数项级数的审敛进行讨论. 例如因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{\mathrm{i}}{n(n+1)}\right]$$

收敛；而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{\mathrm{i}}{n}\right)$$

发散.