



KNOWLEDGE
TREE

知识树考研

2008 考研白皮书系

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学四

10年真题点评

✧ 文登培训学校策划 ✧

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2011 年真题

2011 年真题

考研数学



10 年真题点评

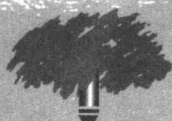
2011 年真题

2011 年真题
2011 年真题



2011 年真题

2011 年真题



KNOWLEDGE
TREE

知识树考研

013
345
:2008(4)
2006

2008 考研白皮书系

全国硕士研究生入学统一考试

考研数学

数学四

10年真题点评

✧ 文登培训学校策划 ✧

陈文灯 / 主 编

陈启浩 / 副主编



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学10年真题点评. 4 / 陈文灯主编. —北京:
北京理工大学出版社, 2006. 2 (2007. 2 重印)
(考研白皮书系)
ISBN 978-7-5640-0714-0

I. 数... II. 陈... III. 高等数学—研究生—入学
考试—自学参考资料 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007382 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 12

字 数 / 290 千字

版 次 / 2007 年 2 月第 1 版第 5 次印刷

定 价 / 18.00 元

前 言

一年一度的硕士研究生入学统一考试已经举行了十几届,积累了近百份数学试卷,这既是众多命题专家智慧和劳动的结晶,也是广大考研学子的宝贵财富。

历届的考研真题,除其内容外,还包含诸多有价值的信息,例如试题的形式、涵盖面、难度及试题所蕴涵的规律性。为了使考生在考研真题中汲取更多知识、掌握更多解题方法,我们将 1998 年~2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学试题做了精心的解析,编写成《考研数学·10 年真题点评》系列丛书,奉献给广大考研朋友,书中对每道真题通过“分析”、“详解”和“评注”三部分进行点评。在“分析”中用简明语言给出解题思路;在“详解”中用简捷、新颖方法给出详细解答;在“评注”中强调与真题有关的知识点及题解中使用的技巧。

我们希望读者在使用本书时,不要輕易地翻阅真题的解答,只有当百思不得其解时才查阅解答;而且每做完一道真题,应回过头来仔细阅读书中有关这道真题的分析、详解和评注,进行比对和总结。如果能如此下功夫做完最近十年的数学考研真题,读完全书,我们深信读者在考研数学的基本概念和基本理论的理解上,在计算方法和计算技巧的掌握上都将获得一个飞跃,而且在解题能力和应考水平上也将有一个较大幅度的提高,从而更加从容地面对研究生入学考试。

这套系列丛书自去年问世以来,深得广大考研学子的喜爱。今年在此基础上,作了认真的修订,增加了新的内容(如写了附录),使得它更适合广大考研朋友复习时使用。

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正。

编 者

2007 年 1 月

近 10 年考题路线图

(1998 年—2007 年)

以下给出了《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》每章近 10 年的具体考题题型,可以使考生清晰地了解和把握各章出题的方式、命题的频率及其分值比重,在全面复习的过程中,也不失对重点知识的明确和强化。

第一部分 微积分

(10 年考题总数:115 题 总分值:606 分 占三部分题量之比重:50% 占三部分分值之比重:50%)

第一章 函数、极限、连续

(10 年考题总数:29 题 总分值:129 分 占第一部分题量之比重:27% 占第一部分分值之比重:23%)

题型 1 求 1^∞ 型极限(三,1998;一(2),2000;一(1),2003)

题型 2 求 $0/0$ 型极限(三,2002)

题型 3 求 $\infty - \infty$ 型极限(三(15),2004;三(15),2005)

题型 4 求 $\infty \cdot 0$ 型极限(一(1),2005)

题型 5 函数性质(奇偶性,周期性,单调性,有界性)的判定(二(1),1999;二(2),2002;二(7),2004;二(11),2005)

题型 6 无穷小量(三(19),2006;一(1),二(11),2007)

题型 7 数列极限存在的判定或证明或求解(一(1),1999;一(1),2002;一(1),2006)

题型 8 函数极限存在的判定或证明或求解(二(1),2000;三(15),2006)

题型 9 函数的连续的讨论或证明或逆问题(二(5),1999;二(2),2001;三,2003;二(8),2004;二(10),2004)

题型 10 函数间断点的判定或证明(二(2),1998)

题型 11 已知函数的极限存在,反求参数(四,2001;一(1),2004;二(8),2006)

题型 12 与极限的定理(介值定理,保号性,单调有界等)相关的命题(二(11),2004)

第二章 一元函数微分学

(10 年考题总数:37 题 总分值:183 分 占第一部分题量之比重:28% 占第一部分分值之比重:28%)

题型 1 与导数或微分概念相关的命题(二(7),2006;一(2),2007)

题型 2 求复合函数或隐函数的导数或微分(一(2),2004;一(2),2006)

题型 3 高阶导数(二(12),2007)

题型 4 函数极值、拐点的判定或求解(二(1),2001;六,2003;二(9),2004)

题型 5 函数(含分段函数)在某点可导或不可导的判定(二(2),2000;二(2),2003;二(10),2004;二(10),2005)

题型 6 函数在某一区间至少存在一点或两点使某一式子成立的判定或证明(七,1998;八,2000;七,2001;二(1),2002;八,2002;三(17),2006;三(19),2007)

题型 7 函数不等式的证明(八,1999;三(19),2005)

题型 8 求一元函数在一点的切线方程或法线方程(三,1999;三(18(I)),2006)

题型 9 微分学在经济中的应用题(六,1998;一(1),2001;六,2001;七,2002;三(18),2004;一(5),2007)

题型 10 与导数的几何意义相关的命题(一(1),1998;二(1),1998)

题型 11 与函数图形(单调区间,极值,拐点,渐近线等)相关的命题(六,2000;一(6),二(17),2007)

题型 12 方程的根的判定或证明(二(7),2005)

题型 13 函数的渐近线的求解或判定(二(1),2003)

第三章 一元函数积分学

(10 年考题总数:22 题 总分值:118 分 占第一部分题量之比重:19% 占第一部分分值之比重:19%)

题型 1 求不定积分或原概念与函数(一(2),1998;六,1999;一(1),2000;一(2),2002;五,2002)

题型 2 函数的定积分的计算(七,1999;一(2),2003;一(3),2004;一(3),2007)

题型 3 含有变限积分的等式中函数表达式的求解(八,2001;七,2003;三(20),2007)

题型 4 定积分等式或不等式的判定或证明(二(8),2005;二(9),2006)

题型 5 求广义积分(四,2000)

题型 6 广义积分的敛散(二(9),2005)

题型 7 求平面图形的面积(八(1),1998;三,1999;三(19),2004;三(18(II)),2006)

题型 8 求平面图形绕坐标轴的旋转体的体积(八(2),1998)

题型 9 求函数的平均值(八,2003)

第四章 多元函数微积分学

(10 年考题总数:27 题 总分值:156 分 占第一部分题量之比重:22% 占第一部分分值之比重:25%)

题型 1 求多元复合函数或隐函数的偏导或全导或全微分(四,1998;一(2),1999;三,2000;一(2),2001;三,2001;四,2002;四,2003;一(3),2005;三(16),2005;一(3),2006;二(13),2007)

题型 2 多元函数极值的判定或求解或应用(五,1999;五,2000;二(3),2003;三(18),2005;二(11),2006)

题型 3 二重积分的计算(二(2),1999;四,1999;七,2000;五,2001;六,2002;一(3),2003;四,2003;二(16),2004;三(16),2006;一(4),三(18),2007)

第五章 常微分方程

(10 年考题总数:4 题 总分值:20 分 占第一部分题量之比重:2% 占第一部分分值之比重:2%)

题型 1 与线性微分方程解的结构和性质相关的命题(二(10),2006;二(14),2007)

题型 2 求一阶线性微分方程的通解或特解(三(17),2004;一(2),2005)

第二部分 线性代数

(10 年考题总数:56 题 总分值:324 分 占三部分题量之比重:25% 占三部分分值之比重:25%)

第一章 行列式

(10 年考题总数:6 题 总分值:20 分 占第二部分题量之比重:12% 占第二部分分值之比重:7%)

题型 1 求矩阵的行列式(一(4),1998;一(3),2000;一(4),2000;一(5),2005;一(4),2006)

题型 2 与行列式的概念、性质或定理相关的命题(一(3),2001)

第二章 矩阵

(10 年考题总数:18 题 总分值:82 分 占第二部分题量之比重:33% 占第一部分分值之比重:27%)

题型 1 与矩阵的逆相关的计算、判定或证明(一(3),2002;一(4),2003;三(20),2005)

题型 2 矩阵的运算(九,1998;一(4),1999;一(5),2003;二(12),2005;三(21(I)),2005;一(5),2006)

题型 3 矩阵的幂的计算(一(4),2004)

题型 4 矩阵等价的判定(二(12),2004)

题型 5 含伴随矩阵的计算或证明(一(3),1998;二(3),2002)

题型 6 与矩阵的秩相关的计算,判定或证明(一(4),2001;二(4),2003;二(15),2007)

题型 7 与初等矩阵或初等变换相关的命题(二(3),2001;二(12),2006)

第三章 向量

(10 年考题总数:8 题 总分值:64 分 占第二部分题量之比重:14% 占第二部分分值之比重:19%)

题型 1 向量组线性相关性的判断或证明(一(7),2007)

题型 2 根据向量的线性相关性求参数(一(4),2002;一(4),2005)

题型 3 向量的线性表出的命题(二(3),1998;二(3),1999)

题型 4 讨论含参变量的向量的线性表出(九,2000;九,2003;三(20),2006)

第四章 线性方程组

(10年考题总数:12题 总分值:76分 占第二部分题量之比重:21% 占第二部分分值之比重:21%)

题型1 求齐次线性方程组的基础解系(九(1),2002)

题型2 与解的判定、性质和结构相关的命题的判定或证明(九(1),2001;十,2001)

题型3 线性方程组的通解的计算或判定(十(1),1998;二(3),2000;—(5),2004)

题型4 讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解(十(2),1998;十,1999;九(2),2002;三(20),2004;三(17),2005;三(21),2007)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

(10年考题总数:11题 总分值:82分 占第二部分题量之比重:17% 占第二部分分值之比重:24%)

题型1 利用矩阵的特征值或特征向量,反求矩阵的表达式或对角化矩阵(十,2000;三(21),2006;三(22),2007)

题型2 已知一个矩阵的特征值和特征向量,求另一个矩阵的特征值或特征向量或参数(十,2003;三(21),2004)

题型3 矩阵对角化的判定或证明或对角阵的求解(九,1999;九(2),2001;十(1),2002;三(21(Ⅲ)),2005)

题型4 两个矩阵相似的判定或逆问题(三(21(Ⅱ)),2005;—(8),2007)

第三部分 概率论与数理统计

(10年考题总数:56题 总分值:308分 占三部分题量之比重:25% 占三部分分值之比重:25%)

第一章 随机事件和概率

(10年考题总数:10题 总分值:40分 占第三部分题量之比重:17% 占第三部分分值之比重:13%)

题型1 求随机事件的概率(—(6),2004;—(6),2005;—(9),2007)

题型2 随机事件概率的关系运算(二(4),1998;二(4),2001;十一,2002;二(13),2006)

题型3 随机事件独立的判定或证明(—(4),2000;二(5),2003)

题型4 随机事件的表示问题(—(5),2000)

第二章 随机变量及其分布

(10年考题总数:8题 总分值:46分 占第三部分题量之比重:16% 占第三部分分值之比重:16%)

题型1 求一维随机变量的分布律、分布密度或分布函数(—(5),1999)

题型 2 求一维随机变量函数的分布或某一区间的概率(十一,1997;十二,2002;十一,2003;三(23(I)),2006)

题型 3 与一维随机变量概念、性质相关的命题(二(5),1998;二(4),2002;二(14),2006)

第三章 二维随机变量及其分布

(10年考题总数:25题 总分值:144分 占第三部分题量之比重:41% 占第三部分分值之比重:44%)

题型 1 求二维随机变量的联合分布律或分布函数或边缘概率分布(十二(1),1998;十二(1),1999;三(22(I)),2004;三(22),2006;三(23(III)),2006)

题型 2 求二维连续型随机变量的分布或分布密度,边缘密度函数或条件概率密度(十一,1999;十一(1),2000;三(23),2004;一(10),二(23),2007)

题型 3 两个或多个随机变量的独立性或相关性的判定或证明(二(4),1999;十二(2),1999;十一(2),2000;十二,2000;二(6),2003;十二,2003)

题型 4 求两个随机变量的相关系数(十二(2),1998;十一(1),2000;二(5),2001;一(5),2002;三(22(II)),2004;三(22(II)),2006)

题型 5 求两个随机变量的函数的概率分布或概率密度(三(22(III)),2004;一(6),2006;二(16),2007)

第四章 随机变量的数字特征

(10年考题总数:8题 总分值:55分 占第三部分题量之比重:16% 占第三部分分值之比重:17%)

题型 1 求一维随机变量或函数的数字特征(一(5),2000)

题型 2 求二维随机变量或函数的数字特征(十二,2001;一(6),2003;二(14),2004;三(24),2007)

题型 3 数字特征在经济中的应用题(十一,1998)

题型 4 与数字特征的概念、性质相关的命题(一(5),1998;三(23),2005)

第五章 大数定律和中心极限定理

(10年考题总数:5题 总分值:23分 占第三部分题量之比重:8% 占第三部分分值之比重:7%)

题型 1 估计概率的值(一(5),2001)

题型 2 与中心极限定理相关的命题(十一,2001;二(5),2002;二(14),2005)

题型 3 分位数的求解或判定(二(13),2004)

目 录

近 10 年考题路线图(1998 年—2007 年)	I
----------------------------------	---

近 10 年真题集

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	1
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	4
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	7
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	10
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	13
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	16
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	19
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	22
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	25
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题	28

近 10 年真题分析、详解及评注

2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	31
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	47
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	61
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	76
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	91
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	103
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	114
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	126
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	139
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题分析、详解及评注	152
附 录	163

附:

2003—2005 年文登学校考研数学优秀者名单

文登学校寒暑假培训一览表

2007 年全国硕士研究生入学统一考试 数学四试题

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

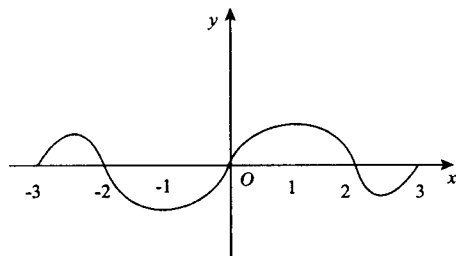
- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$. (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$. (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$. (D) $1 - \cos \sqrt{x}$. 【 】

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$. (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$.

- (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在. 【 】

(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$,则下列结论正确的是



- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

- (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

- (C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$

- (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$ 【 】

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续,则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于

- (A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$.

- (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$.

- (C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$.

- (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$. 【 】

(5) 设某商品的需求函数 $Q = 160 - 2P$,其中 Q, P 分别表示需求量和价格,如果该商品需求弹性的绝对值等于 1,则商品的价格是

- (A) 10. (B) 20. (C) 30. (D) 40. 【 】

(6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 的渐近线的条数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3. 【 】

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是

(A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$.

(B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$.

(C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$.

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$. 【 】

(8) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A 与 B

(A) 合同, 且相似.

(B) 合同, 但不相似.

(C) 不合同, 但相似.

(D) 既不合同, 也不相似. 【 】

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$.

(B) $6p(1-p)^2$.

(C) $3p^2(1-p)^2$.

(D) $6p^2(1-p)^2$. 【 】

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

(A) $f_X(x)$.

(B) $f_Y(y)$.

(C) $f_X(x)f_Y(y)$.

(D) $\frac{f_X(x)}{f_Y(y)}$. 【 】

二、填空题(本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.)

(11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(15) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 则 A^3 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 则这两个数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题(本题共 8 小题, 满分 86 分, 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

(18)(本题满分 11 分)

设二元函数

2

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| < 1, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内二阶可导且存在相等的最大值. 又 $f(a) = g(a), f(b) = g(b)$. 证明:

(I) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad ①$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad ②$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B .

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(24)(本题满分 11 分) 设随机变量 X 与 Y 独立同分布, 且 X 的概率分布为

X	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

记 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$.

(I) 求 (U, V) 的概率分布;

(II) 求 U 与 V 的协方差 $\text{Cov}(U, V)$.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试 数学四试题

一、填空题:1~6 小题,每小题 4 分,共 24 分,把答案填在题中横线上.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导,且 $f'(x) = e^{f(x)}$, $f(2) = 1$. 则 $f'''(2) = \underline{\hspace{2cm}}.$

(3) 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 则 $z = f(4x^2 - y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

(4) 已知 α_1, α_2 为二维列向量,知阵 $A = (2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$, $B = (\alpha_1, \alpha_2)$. 若行列式 $|A| = 6$, 则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

(5) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, E 为二阶单位矩阵,矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$, 则 $B = \underline{\hspace{2cm}}.$

(6) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0, 3]$ 上的均匀分布,则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题:7~14 小题,每小题 4 分,共 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x > 0$, 则

- (A) $0 < dy < \Delta y$. (B) $0 < \Delta y < dy$.
(C) $\Delta y < dy < 0$. (D) $dy < \Delta y < 0$. 【 】

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$, 则

- (A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在. (B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.
(C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在. (D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在. 【 】

(9) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,且 $f(x) \leq g(x)$, 则对任何 $c \in (0, 1)$,

- (A) $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t) dt \geq \int_{\frac{1}{2}}^c g(t) dt$. (B) $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t) dt \leq \int_{\frac{1}{2}}^c g(t) dt$.
(C) $\int_c^1 f(t) dt \geq \int_c^1 g(t) dt$. (D) $\int_c^1 f(t) dt \leq \int_c^1 g(t) dt$. 【 】

(10) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是

- (A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$. (B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.
(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$. (D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$. 【 】

(11) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数,且 $\varphi'_x(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. 【 】

(12) 设 A 为三阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得

C , 记 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^TAP$.

(D) $C = PAP^T$. 【 】

(13) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(B) > 0, P(A|B) = 1$, 则必有

(A) $P(A \cup B) > P(A)$.

(B) $P(A \cup B) > P(B)$.

(C) $P(A \cup B) = P(A)$.

(D) $P(A \cup B) = P(B)$. 【 】

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 $P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$, 则必有

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$.

(B) $\sigma_1 > \sigma_2$.

(C) $\mu_1 < \mu_2$.

(D) $\mu_1 > \mu_2$. 【 】

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 7 分)

设 $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1 - y \sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0$. 求

(I) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$;

(II) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(16) (本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域.

(17) (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a.$$

(18) (本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y) (x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$).

(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值.

(19) (本题满分 10 分)

试确定常数 A, B, C 的值, 使得

$$e^x(1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x \rightarrow 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

5