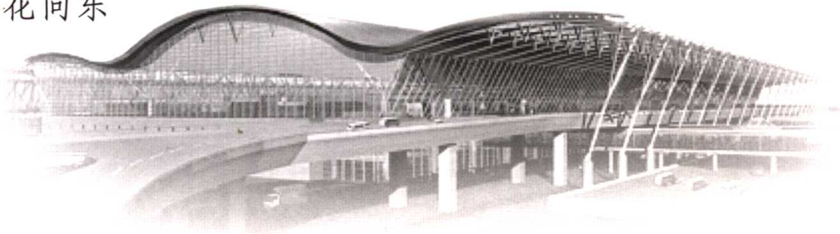
人民交通出版社“十一五”高职高专规划教材

一元微积分

■ 主编　张恩明　支天红
■ 主审　花向东

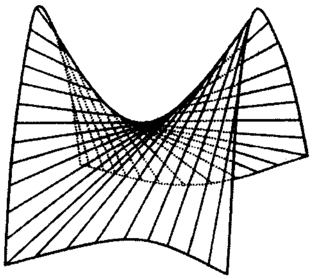


人民交通出版社
China Communications Press

人民交通出版社“十一五”高职高专规划教材

一元微积分

■ 主编　张恩明　支天红
■ 主审　花向东



人民交通出版社

内 容 提 要

本书是作者根据多年教学经验，根据工程类应用数学教学的实际情况，按照高职高专人才培养目标的要求，本着“基础理论知识以必须、够用”的原则，在教学讲义的基础上经过修改、补充而成的。全书叙述精炼，由浅入深，并适度注意了数学在工程领域中的应用。

全书共分七章，主要介绍了一元微积分学的基本知识，主要内容包括函数的极限与连续、导数与微分及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程。各节后配有一定数量的习题，书后附有习题答案。

本书可作为高等职业院校、成人高校等理工类专业的数学基础课程教材，需要的教学时数为84学时左右。

图书在版编目（CIP）数据

一元微积分/张恩明，支天红主编．—北京：人民交通出版社，2007.7

ISBN 978-7-114-06707-5

Ⅰ．一…　Ⅱ．①张…②支…　Ⅲ．微积分　Ⅳ．O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第110152号

书　　名： 一元微积分
著 作 者： 张恩明　支天红
责任编辑： 邵　江
出版发行： 人民交通出版社
地　　址： （100011）北京市朝阳区安定门外外馆斜街3号
网　　址： http：//www.ccpress.com.cn
销售电话： （010）85285656，85285838，85285995
总 经 销： 北京中交盛世书刊有限公司
经　　销： 各地新华书店
印　　刷： 北京交通印务实业公司
开　　本： 787×980　1/16
印　　张： 15
字　　数： 250千
版　　次： 2007年8月　第1版
印　　次： 2007年8月　第1次印刷
书　　号： ISBN 978-7-114-06707-5
印　　数： 0001—3000册
定　　价： 27.00元

高职高专土建类专业规划教材编审委员会

高职高专土建类专业规划教材出版说明

近年来我国职业教育蓬勃发展，教育教学改革不断深化，国家对职业教育的重视达到前所未有的高度。为了贯彻落实《国务院关于大力发展职业教育的决定》的精神，提高我国土建领域的职业教育水平，培养出适应新时期职业需要的高素质人才，人民交通出版社深入调研，周密组织，在全国高职高专教育土建类专业教学指导委员会的热情鼓励和悉心指导下，发起并组织了全国四十余所院校一大批骨干教师，编写出版本系列教材。

本套教材以《高等职业教育土建类专业教育标准和培养方案》为纲，结合专业建设、课程建设和教育教学改革成果，在广泛调查和研讨的基础上进行规划和展开编写工作，重点突出企业参与和实践能力、职业技能的培养，推进教材立体化开发，鼓励教材创新，教材组委会、编审委员会、编写与审稿人员全力以赴，为打造特色鲜明的优质教材做出了不懈努力，希望以此能够推动高职土建类专业的教材建设。

本系列教材先期推出建筑工程技术、工程监理和工程造价三个土建类专业共计四十余种主辅教材，随后在2～3年内全面推出土建大类中7类方向的全部专业教材，最终出版一套体系完整、特色鲜明的优秀高职高专土建类专业教材。

本系列教材适用于高职高专院校、成人高校及二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校的土建类各专业使用，也可作为相关从业人员的培训教材。

人民交通出版社

2007年1月

前言

QIANYAN

时下，高职高专教育已不再是新生事物，原来处于探索中的课程改革与课程设置已逐渐趋于定型。高职高专教育的目的是培养技术应用型人才，在此目标驱动之下，各高职高专院校均不同程度地缩减了基础课的学时。为适应这种情况，我们根据工程类应用数学教学的实际情况，把近几年的教学讲义经过进一步的修改、补充而编写成了本书。

本书的主要内容是一元微积分部分，我们在编写时把重点放在了基本概念和基本方法方面，并且力求做到三点，即：传授基本知识，培养自学能力，培养应用数学知识、方法分析和解决实际问题的能力。为此我们不断地进行推敲，力争使本书的语言叙述深入浅出、通俗易懂，使读者能在没有他人指导的情况下也能读懂教材，轻松获得数学知识。

本书可作为高等职业院校、成人高校等理工类专业的数学基础课程教材，需要的教学时数为 84 学时左右。书中带 * 号的内容可根据学生实际自由选择。

本书由哈尔滨铁道职业技术学院张恩明、支天红老师主编，其中第一至第三章由张恩明编写，第四至第七章由支天红编写，花向东老师任主审。

由于作者水平有限，编写时间又较为仓促，书中难免有不当之处，敬请广大师生不吝赐教，使之进一步完善。

编　者

2007 年 5 月

目 录

MULU

第一章
函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象。极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法。因此，掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键。连续是函数的一个重要性态。本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法。

第一节　函数的概念

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着。17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海问题等）的研究中引出了函数这个基本概念。在那以后的 200 多年里，这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了中心位置。本节将介绍函数的概念、函数关系的构建与函数的特性。

一　邻域

定义 1　设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记为

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

其中点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径（图 1-1-1）。

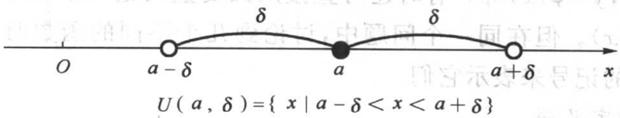


图　1-1-1

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心去掉，所得到的邻域称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

更一般地，以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域。当不需要特别辨明邻域的半径时，可简记为 $U(a)$。

为了使用方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域。

函数的概念

1. 函数的定义

定义 2 设 D 为一个非空实数集合，若存在确定的对应法则 f，使得对于数集 D 中的任意一个数 x，按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在集合 D 上的函数，记作

$$y=f(x),x\in D$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为该函数的定义域，也记为 D_f，即 $D_f=D$。

如果对于自变量 x 的某个确定的值 x_0，因变量 y 能够得到一个确定的值，那么就称函数 f 在 x_0 处有定义，其因变量的值或函数 f 的函数值记为

$$y\,|_{x=x_0},f(x)\,|_{x=x_0} \text{ 或 } f(x_0)$$

当自变量遍取 D 的所有数值时，对应的函数值的全体构成的集合称为函数 f 的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x),x\in D\}$$

注：函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素。两个函数相同的充要条件是它们的定义域和对应法则均相同。

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“g”、“F”、“φ”、“ψ”等，相应地函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$等。有时还可直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$。但在同一个问题中，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需用不同的记号来表示它们。

2. 函数的定义域

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，其

定义域根据实际背景中变量的实际意义确定;另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合,这种定义域称为函数的自然定义域。

注:在这种约定之下,一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达,而不必再写出 D_f。

【例 1】 确定函数

$$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}+\ln(x-2)$$

的定义域

解:该函数的定义域应为满足不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\geqslant 0\\ x-2>0\end{cases}$$

的 x 值的全体,解此不等式组,得其定义域为 $\{x|2<x\leqslant 3\}$,即 $(2,3]$

函数的常用表示法

(1)表格法　自变量的值与对应的函数值列成表格的方法。

(2)图像法　在坐标系中用图形来表示函数关系的方法。

(3)公式法(解析法)　自变量和因变量之间的函数关系用数学表达式(又称为解析式)来表示的方法。

根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种:

(1)显函数　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示,例如,$y=(x+1)^2$。

(2)隐函数　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定,例如 $e^{xy}=x+y$。

(3)分段函数　函数在定义域的不同范围内,具有不同的解析表达式。以下来看几个分段函数的例子。

【例 2】 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,图形如图 1-1-2 所示。

【例 3】 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x=0\\ -1, x<0\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-1-3 所示。

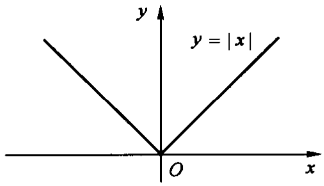


图 1-1-2

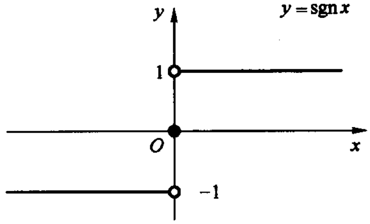


图 1-1-3

【例 4】 取整函数 $y=[x]$，其中，$[x]$表示不超过 x 的最大整数。例如，$\left[\dfrac{2}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[\pi]=3$，$[-2]=-2$，$[-2.3]=-3$。

取整函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=Z$，图形如图 1-1-4 所示。

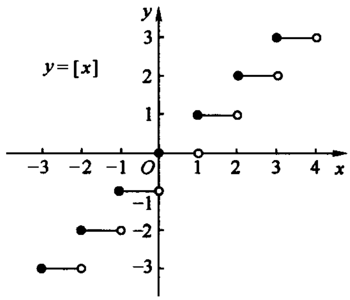


图 1-1-4

【例 5】 狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, \text{当 } x \text{ 是有理数时} \\ 0, \text{当 } x \text{ 是无理数时}\end{cases}$$

的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$

函数关系的建立

为解决实际问题，首先应将该问题量化，从而建立起该问题的数学模型，即建立函数关系。要把实际问题中的函数关系正确地抽象出来，首先应分析哪个是常量，哪个是变量，然后确定选取哪个为自变量，哪个为因变量，最后根据题意建立它们之间的函数关系，同时给出函数的定义域。

【例 6】 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20kg 的物品，超过 20kg 而不超过 50kg 的部分每公斤交费 a 元，超过 50kg 部分每公斤交费 b 元。求运费与携带物品重量的函数关系。

解：设物品重量为 $x$kg，应交运费为 y 元。由题意可知这时应考虑三种情况：

情况一：重量不超过 20kg，这时

$$y=0,\qquad x\in[0,20]$$

情况二：重量大于 20kg，但不超过 50kg，这时

$$y = a(x-20), \qquad x \in (20,50]$$

情况三：重量超过 50kg，这时

$$y = a(50-20)+b(x-50), \qquad x > 50$$

因此，所求的函数是一个分段函数

$$y = \begin{cases} 0, & x \in [0,20] \\ a(x-20), & x \in (20,50] \\ a(50-20)+b(x-50), & x > 50 \end{cases}$$

反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系。但在研究过程中，哪个作为自变量，哪个作为因变量（函数），是由具体问题来决定的。例如，设某作匀速直线运动的物体的运动速度为 v，运动时间为 t，则其位移 s 是时间 t 的函数：$s=vt$，这里 t 是自变量，s 是因变量；若已知位移 s，反过来求时间 t，则有 $t=\frac{s}{v}$，此处 s 是自变量，t 是因变量。以上两式是同一个关系的两种写法，但从函数的观点看，由于对应法则不同，它们是两个不同的函数，常称它们互为反函数。

一般地，有如下定义：

定义 3 设 $y=f(x)$为定义在 D 上的函数，其值域为 M。若对于数集 M 中的每个数 y，数集 D 中都有唯一的一个数 x 使 $y=f(x)$，这就是说变量 x 是变量 y 的函数。这个函数称为函数 $y=f(x)$的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$。其定义域为 M，值域为 D。

相对于反函数，函数 $y=f(x)$称为**直接函数**。

注：(1) 习惯上，常用 x 表示自变量，y 表示因变量，因此函数 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$常改写为 $y=f^{-1}(x)$。

(2) 在同一坐标平面内，函数 $y=f(x)$与 $x=f^{-1}(y)$二者的图形是相同的，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$二者的图形关于直线 $y=x$ 对称（图 1-1-5）。

(3) 函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$之间存在着如下关系：

$$f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(x)) = x$$

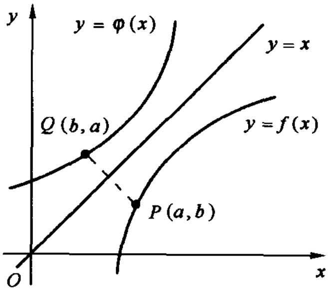


图 1-1-5

(4)按此定义,只有单调函数才存在反函数。对于在定义域内不单调的函数,应限定在某一单调区间内才可求反函数。

【例 7】 求函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数。

解:由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,可得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$,显然 $e^x>0$,故只有

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$$

从而

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

即所求的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

函数的基本性态

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$(注:当不需要特别辨明区间是否包含端点、是否有限或无限时,常用 I 表示之),对于区间 I 上的任意两点 x_1 及

x_2,当 $x_1>x_2$ 时,若恒有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加函数;若恒有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少函数。

例如,函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的,在区间 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 上是单调减少的。

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称,如果对于定义域中的任何 x,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;如果有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数;不是偶函数也不是奇函数的函数,称为非奇非偶函数。

偶函数的图形是关于 y 轴对称的,如函数 $y=\cos x$;奇函数的图形是关于原点对称的,如 $y=\sin x$。

3. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对于一切 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且