

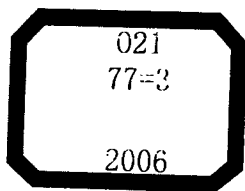
概率论与数理统计

(第二版)

盛 骤 编

上海交通大学出版社





概率论与数理统计

(第二版)

盛 骤 编

上海交通大学出版社

内容提要

本书是按照国家教育委员会高等学校工科数学课程指导委员会制订的《概率论与数理统计课程基本要求, II类(概率少,统计多)》所规定的内容的广度和深度编写的。全书分7章:事件的概率、随机变量、随机变量的数字特征、正态分布、参数的点估计、假设检验与区间估计、回归分析与方差分析。各章均配有适量的习题,并附有习题答案。

本书可作为高等学校工科本科各专业、理科(非数学专业)本科各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供各类专业技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 盛骤编. - 2版. - 上海: 上海交通大学出版社, 2006

ISBN 7-313-02024-4

I. 概... II. 盛... III. ①概率论②数理统计 IV. 021

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第20433号

概率论与数理统计 (第二版)

盛 骤 编

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路877号 邮政编码 200030)

电话: 64071208 出版人: 张天蔚

上海市美术印刷厂印刷 全国新华书店经销

开本: 850mm×1168mm 1/32 印张: 7.5 字数: 200千字

1998年6月第1版 2006年8月第2版 2006年8月第9次印刷

印数: 4050

ISBN7-313-02024-4/0·139 定价: 12.00元

版权所有 侵权必究

第二版前言

编者对本书第一版作了修订,对第一版中的一些疏漏和不足之处作了修改或补充,在内容的阐释上作了进一步的斟酌,重画了插图,习题也作了一些调整,以期提高教材的质量。

盛 骤

2006年6月

前 言

本书是按照国家教育委员会高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《概率论与数理统计课程基本要求, II类(概率少,统计多)》所规定的内容的广度和深度编写的,可作为高等学校工科本科各专业、理科(非数学专业)本科各专业概率论与数理统计课程的教材,也可供各类专业技术人员参考。

本书致力于讲清基本概念、基本理论和基本方法;在引入基本概念时,注意揭示其直观背景和实际意义;在叙述基本概念和基本方法时,特别注意阐明概率和统计的意义和思想;在选配例题和习题时,着力使学生理解基本理论和基本方法是怎样用于解决实际问题的,以培养学生运用概率统计的方法解决实际问题的能力。

本书致力于内容安排紧凑,讲述深入浅出,思路清晰,便于教师教学和学生学习。

考虑到学时的限制,对于《基本要求》中要求相对较低的那部分内容,本书力求叙述简明扼要,讲求实效,凡讲到的内容,一定讲清楚,使学生做到“了解”或“会”,不留有疑虑。对于这部分内容的习题,有意识地减轻了份量,以此来节约教学学时。本书对理论的论证作了适当的处理,做到详略适当,对于不证明的定理也说清楚条件、结论和意义。

本书在内容的表述和例题、习题的选配上注意能引起读者的兴趣。希望读者能感到这是一门不难学好的课程。

浙江大学应用数学系范大茵教授对本书书稿提出了宝贵的意见,在此表示衷心的感谢。诚恳地希望广大读者批评指正。

盛 骤

1998年1月

目 录

1 事件的概率	1
1.1 随机事件	1
1.2 随机事件的概率	6
1.3 条件概率与乘法公式	15
1.4 事件的独立性	18
1.5 全概率公式与贝叶斯公式	21
习题 1	23
2 随机变量	26
2.1 随机变量的概念	26
2.2 离散型随机变量与连续型随机变量	28
2.3 分布函数	41
2.4 二维随机变量	46
2.5 边缘分布	49
*2.6 条件分布	53
2.7 随机变量的独立性	59
2.8 随机变量函数的分布	61
习题 2	68
3 随机变量的数字特征	75
3.1 数学期望	75
3.2 方差	82
3.3 协方差与相关系数	88
3.4 大数定理	91
习题 3	95
4 正态分布	98
4.1 正态分布	98

4.2	正态随机变量的线性组合	104
4.3	中心极限定理	106
4.4	χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	111
	习题 4	115
5	参数的点估计	118
5.1	总体与样本	118
5.2	直方图	120
5.3	统计量	122
5.4	参数的点估计	125
	习题 5	137
6	假设检验与区间估计	141
6.1	假设检验	141
6.2	正态总体均值与方差的假设检验	147
6.3	两正态总体均值或方差的比较	152
6.4	分布拟合检验	158
6.5	参数的区间估计	163
	习题 6	171
7	回归分析与方差分析	176
7.1	一元线性回归	176
7.2	一元线性回归的统计分析	183
7.3	可转化为一元线性回归的模型举例	191
7.4	单因素试验方差分析	193
7.5	双因素试验方差分析	201
	习题 7	213
附表 1	标准正态分布表	216
附表 2	t 分布表	217
附表 3	χ^2 分布表	218
附表 4	F 分布表	219
	习题答案	224

1 事件的概率

在自然界和人们的活动中,存在着这样的一类现象:在一定条件下既可能出现这种结果,也可能出现另一种结果,出现哪一种结果具有不确定性,所出现的结果在事先是不能预知的,这种现象称为**随机现象**。

例如,投掷一枚硬币,它可能出现正面,也可能出现反面,在投掷之前不能预知。又如用包装机包装水泥,规定每袋 25 kg,在生产线上任取一袋,其净重可能大于 25 kg,也可能小于 25 kg,在事先不能预知,若取 10 袋——复称会得到不尽相同的值。以上例子所说的现象都是随机现象。又如在考察一个地区的年降雨量时,在观察新生儿的性别或体重时,在考察晶体管的寿命时,都呈现出随机现象。

然而,若对一随机现象进行多次重复观察,人们可以发现其出现的结果呈现出规律性。例如,多次投掷硬币则出现正面的次数约占一半;复称一批 25 kg 装的袋装水泥,其净重是按照一定规律分布着的,在 25 kg 附近占绝大多数而远离 25 kg 的占极少数。这种在多次重复观察中,随机现象所显示的规律性,称为**统计规律性**。

概率论与数理统计是研究随机现象所具有的统计规律性的数学学科。

1.1 随机事件

一、随机事件的概念

在概率论与数理统计中,习惯上将任一观察或测量的过程,视

作是一个试验. 我们考虑这样的试验: 它可以在相同的条件下重复进行, 它的所有可能结果在试验之前是知道的, 但对一次试验而言, 它的结果是不能预知的, 这种类型的试验称为**随机试验**, 简称**试验**.

我们将试验的所有可能结果组成的集合称为试验的**样本空间**, 记为 S ; 样本空间的每个元素, 即试验的每个结果, 称为**样本点**.

下面是几个随机试验的例子.

(1) 抛掷一枚硬币, 观察出现正面(记为 H) 还是反面(记为 T), 则样本空间

$$S_1 = \{H, T\}.$$

(2) 在一个班级中选一名学生, 观察他的概率论与数理统计课程期末考试的得分(设以百分制记分), 则样本空间

$$S_2 = \{0, 1, 2, \dots, 100\}.$$

(3) 某种食品在制成后, 经检验将食品分成 I, II, III, IV 四个等级: I 级出售给食品商店; II, III 级降价出售; IV 级作为饲料出售. 取一份食品, 观察它属于哪一级别, 则样本空间

$$S_3 = \{I, II, III, IV\}.$$

(4) 在生产线的出口处测试闪光灯电池的电压, 一只接一只地测试, 直到发现一只次品为止. 若记正品为 N , 次品为 D , 则样本空间

$$S_4 = \{D, ND, NND, \dots\}.$$

(5) 在一批圆钢中取一条, 测量它的抗拉强度 f (以 N/mm^2 计) 则样本空间

$$S_5 = \{f | f > 0\}.$$

在每次试验中, 有一个结果(样本点)出现, 也只有一个结果出现. 在研究试验的结果时, 人们不但对试验的单一结果感兴趣, 而且常常对试验的某些结果所组成的集合更感兴趣. 例如在上述试验 2 中, 教师关心“考试成绩及格”, 也就是关心 S_2 的子集 $A =$

$\{60, 61, \dots, 100\}$, 我们称 A 是试验 2 的一个随机事件; 在一次试验中若 A 的一个样本点出现, 就说在这一次试验中 A 发生了. 又如在试验 3 中, 我们关心“食品不作为饲料出售”, 即关心 S_3 的子集 $B = \{I, II, III\}$, 称 B 是试验 3 的一个随机事件; 在一次试验中若 B 中有一个样本点出现, 就说在这一次试验中 B 发生了.

一般, 设试验 E 的样本空间为 S , 由 S 中的一些样本点组成的集合, 称为试验 E 的随机事件, 简称事件. 随机事件是样本空间 S 的一个子集. 在一次试验中当且仅当这个子集中的一个样本点出现, 就称这一事件发生. 由于随机事件是由 S 中的一部分样本点组成的, 因而在一次试验中, 这一事件可能发生也可能不发生.

随机事件用大写的字母如 A, B, C 等来表示.

例如在试验 2 中事件 A_1 : “成绩为优良”, 即 $A_1 = \{81, 82, \dots, 100\}$; 在试验 3 中事件 A_3 : “食品降价出售”, 即 $A_3 = \{II, III\}$.

特别, 只含一个样本点的集合, 称为基本事件, 例如试验 1 有两个基本事件 $\{H\}, \{T\}$; 试验 3 有 4 个基本事件 $\{I\}, \{II\}, \{III\}, \{IV\}$; 试验 4 有可列个基本事件 $\{D\}, \{ND\}, \dots$; 试验 5 含不可列个基本事件, 如 $\{f | f = 1000\}, \{f | f = 1500\}$ 等等.

我们将样本空间 S 也作为一个随机事件, 因为每次试验必然出现 S 中的某个样本点, 因而在每次试验中 S 必然发生, 称 S 为必然事件. 我们也将不包含任何样本点的空集 \emptyset 作为一个随机事件, 它在每次试验中都不发生, 称为不可能事件.

二、随机事件间的关系和运算

包含 若事件 A 发生必导致事件 B 发生, 则称事件 B 包含事件 A , 记为 $A \subset B$, 此时 A 中包含的样本点都含于 B 中.

相等 若对于两个事件 A, B 有关系 $A \subset B$ 和 $B \subset A$, 则称 A 与 B 相等, 记为 $A = B$, 此时 A 和 B 包含的样本点相同.

和事件 若 A, B 是两事件, 则“事件 A 和事件 B 至少有一个发生”这一事件称为 A 与 B 的和事件, 记为 $A \cup B$. $A \cup B$ 包含且

只包含所有单属于 A 的样本点,单属于 B 的样本点以及同属于 A 与 B 两者的样本点.

积事件 若 A, B 是两事件,则“事件 A 和事件 B 同时发生”这一事件称为 A 与 B 的积事件,记为 $A \cap B$ 或 AB . $A \cap B$ 包含且只包含所有同属于 A 和 B 两者的样本点.

差事件 若 A, B 是两事件,则“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为 A 与 B 的差事件,记为 $A - B$. $A - B$ 包含且只包含所有属于 A 且不属于 B 的样本点.

不相容 若事件 A 和事件 B 不能同时发生,则称事件 A 和事件 B 是不相容的.此时, A 和 B 没有公共的样本点,即 $AB = \emptyset$. 若 A, B 中有一个发生,则另一个一定不发生.基本事件是两两不相容的.

逆事件 若两事件 A, B 满足 $A \cup B = S, AB = \emptyset$,则称 B 是 A 的逆事件或 A 是 B 的逆事件.记为 $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$.此时 \bar{A} 包含且只包含所有不属于 A 的样本点.当且仅当 A 不发生时 \bar{A} 发生, $\bar{\bar{A}} = S - A$.

我们可以用一种称为文氏图(Venn diagram)的图形来形象地示意事件的关系及运算.在图 1-1 中,以长方形来示意样本空间 S ,事件 A 用一个圆表示,事件 B 用一个椭圆表示.

图 1-1a 表示事件 B 包含事件 A ;图 1-1b, c, d 中有阴影线的区域分别表示 $A \cup B, A \cap B, B - A$;图 1-1e 表示事件 A 和事件 B 互不相容;图 1-1f 表示事件 B 和事件 \bar{B} 互为逆事件.

类似地,对于有限个事件 A_1, A_2, \dots, A_n ,“事件 A_1, A_2, \dots, A_n 至少有一个发生”,这一事件称为 A_1, A_2, \dots, A_n 的和事件,记为 $\bigcup_{i=1}^n A_i$,“事件 A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生”这一事件称为事件 A_1, A_2, \dots, A_n 的积事件,记为 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.也可以类似地定义可列个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 的和事件 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 与积事件 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

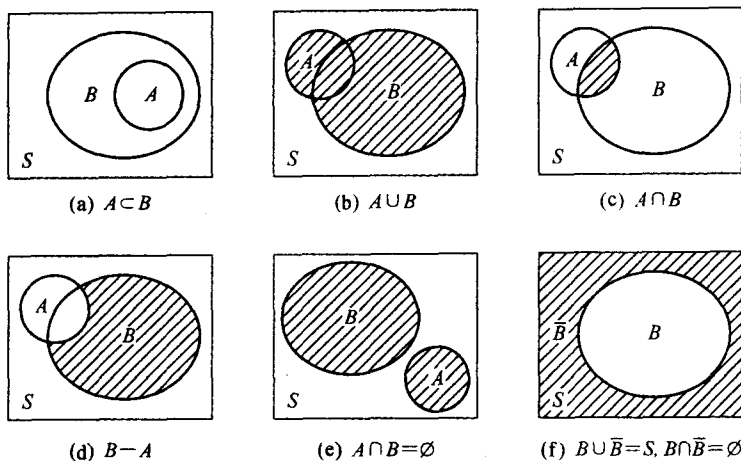


图 1-1

【例 1-1】 在一通道的出口处, 观察相继驶过的三辆汽车向左(L)转弯还是向右(R)转弯. 在这一试验中事件

$A = \{\text{至少有一辆车向左转弯}\}$

$= \{LLL, RLL, LRL, LLR, LRR, RLR, RRL\},$

$B = \{\text{第二辆车向左转弯}\} = \{LLL, RLL, LLR, RLR\},$

$C = \{\text{第三辆车向右转弯}\} = \{LLR, LRR, RLR, RRR\},$

$D = \{\text{三辆车均向右转弯}\} = \{RRR\}.$

(这里, 例如 LLR 表示第一辆、第二辆车向左转弯而第三辆车向右转弯.) 则有 $B \subset A, \bar{A} = D, BD = \emptyset, A \cup D = S, BC = \{LLR, RLR\}, B - C = \{LLL, RLL\}, B \cup C = \{LLL, RLL, LLR, RLR, LRR, RRR\}, \bar{B} \cup \bar{C} = \{LRL, RRL\}, A(B \cup C) = \{LLL, RLL, LLR, LRR, RLR\}.$

【例 1-2】 设 A, B, C 都是试验 E 的事件, 试用 A, B, C 的运算表示下列事件: (1) $G_1: A, B, C$ 中至少有一个发生; (2) $G_2: A, B, C$ 同时发生; (3) $G_3: A$ 发生, 而 B, C 都不发生.

解 $G_1 = A \cup B \cup C, G_2 = ABC, G_3 = A\bar{B}\bar{C}.$

事件是一个集合,以上事件间的关系和运算当然可以用集合论的术语来表达,而集合的运算规则也就是事件的运算规则.例如“事件 A 和事件 B 的积事件 $A \cap B$ ”,“事件 A 与事件 B 不相容”,用集合论的术语来说就是“集合 A 和集合 B 的交集 $A \cap B$ ”,“集合 A 和集合 B 的交集是空集”.事件的运算满足以下的规则(这里 A, B, C 是试验 E 的事件):

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$

结合律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C,$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C;$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

1.2 随机事件的概率

在一次试验中,一个事件(除不可能事件和必然事件外)可能发生也可能不发生.我们观察试验的各个事件,一般来说,会发现有些事件在一次试验中发生的可能性较大,而另一些发生的可能性较小.例如,在抛一颗骰子观察它的点数的试验中,事件“出现偶数点”比事件“出现 2 点”发生的可能性要大.我们希望对每个事件都能指定一个数用它来表示事件在一次试验中发生的可能性的的大小.下面先从“频率”讲起.

一、随机事件的频率

在相同的条件下将试验重复进行 n 次,在 n 次试验中,事件 A 发生了 f_A 次, f_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数,而比值

$$R_n(A) = f_A/n$$

称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率.

【例 1-3】 将一枚硬币抛 5 次, 10 次, 20 次, …, 5 000 次得到如表 1-1 的数据. 表中 n 表示试验的次数, f_H 表示在这 n 次试验中 H (正面) 发生的频数, $R_n(H)$ 表示这 n 次试验中 H 发生的频率. 我们还将表中的数据描在图 1-2 上.

表 1-1

n	f_H	$R_n(H)$	n	f_H	$R_n(H)$
5	2	0.4	500	256	0.5120
10	3	0.3	600	289	0.4817
20	11	0.55	700	346	0.4943
30	14	0.4667	800	447	0.5587
40	20	0.5	900	458	0.5089
50	19	0.38	1000	516	0.516
100	47	0.47	2000	988	0.494
200	92	0.46	3000	1484	0.4947
300	158	0.5267	4000	2015	0.5037
400	208	0.52	5000	2469	0.4938

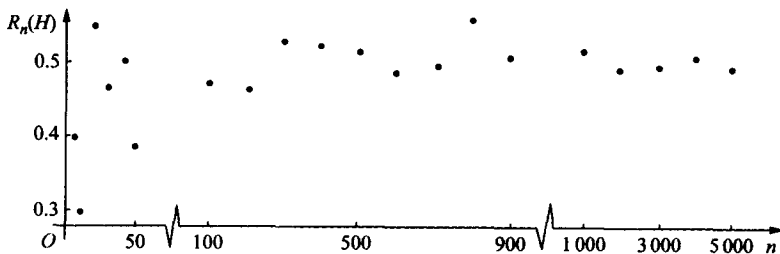


图 1-2

从表 1-1 和图 1-2 看到, 当 n 较小时, 频率 $R_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动, 其幅度较大; 但随着 n 增加, 波动的幅度逐渐减小, 呈现出稳定性, 稳定在 0.5 附近.

【例 1-4】 表 1-2 给出了波兰从 1927 年到 1932 年间出生的婴儿总数,以及其中的男婴数,试考察新生婴儿的性别.

表 1-2

年份	1927	1928	1929	1930	1931	1932	总数或平均数
出生数	958 733	990 993	994 101	1 022 811	964 573	934 663	5 865 874
男婴数	496 544	513 654	514 765	528 072	496 986	482 431	3 032 452
频率	0.518	0.518	0.518	0.516	0.515	0.516	0.517

从表 1-2 可以看到出生男婴的频率稳定在 0.517 附近.

大量实验证实,随机事件 A 发生的频率 $R_n(A)$,当重复试验的次数 n 增大时,总呈现出稳定性,稳定在某一个数的附近.这是随机现象固有的性质.“频率的稳定性”就是我们通常所说的统计规律性.

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示 A 发生的频繁程度,频率较大,事件 A 发生较频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性较大;反之亦然.而频率又具有稳定性,当试验次数 n 增大时,频率稳定在某一个数的附近.这表明,对于一个事件 A ,存在着一个数,这个数可用来表示 A 发生的可能性的.

对于试验 E 的每一个事件,指定一个数,这个数称为事件的概率,它用来表示事件发生的可能性的.事件 A 的概率记为 $P(A)$.

概率是表示事件发生的可能性大小的数量指标.那么对于 E 中的事件,怎样确定它的概率呢?这将留待下一小节去讨论.这里,先讲一下频率的几条性质.

以 $R_n(A), R_n(B)$ 分别表示事件 A 和事件 B 在 n 次重复试验中发生的频率,则有以下性质:

性质 1 对于任意事件 A ,有 $0 \leq R_n(A) \leq 1$;

性质 2 对于必然事件 S ,有 $R_n(S) = 1$;

性质 3 若事件 A, B 不相容, 即 $AB = \emptyset$, 则有

$$R_n(A \cup B) = R_n(A) + R_n(B).$$

性质 1, 2 显然成立. 现在来证明性质 3:

设在 n 次重复试验中, 事件 A, B 分别发生 f_A, f_B 次, 由 $AB = \emptyset$ 知 $A \cup B$ 发生的次数 $f_{A \cup B}$ 应等于 $f_A + f_B$, 故有

$$R_n(A \cup B) = \frac{f_{A \cup B}}{n} = \frac{f_A}{n} + \frac{f_B}{n} = R_n(A) + R_n(B).$$

二、古典概率模型

下面考察最简单的一类随机试验, 它们具有以下两个特点:

- (1) 试验的样本空间只包含有限个样本点;
- (2) 由于某种对称性, 在每次试验中, 各个基本事件发生的可能性相同.

例如, 抛一颗骰子, 观察其出现的点数就属于这一类试验. 具有这两个特点的试验称为**古典概率模型**, 它在概率论发展初期曾是主要的研究对象.

对于古典概率模型, 若设试验的样本空间

$$S = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \dots \cup \{\omega_n\},$$

事件 A 包含 r 个基本事件, 则

$$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_r}\} = \{\omega_{i_1}\} \cup \{\omega_{i_2}\} \cup \dots \cup \{\omega_{i_r}\},$$

式中 i_1, i_2, \dots, i_r 是 $1, 2, \dots, n$ 中某 r 个不同的数. 这里, 基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ 发生的可能性相同, 而 A 包含 r 个基本事件 $\{\omega_{i_1}\}, \{\omega_{i_2}\}, \dots, \{\omega_{i_r}\}$, 当这 r 个基本事件之一发生时事件 A 发生, 也称这 r 个基本事件有利于事件 A . 我们自然想到用有利于事件 A 的基本事件数在全部基本事件数 n 中所占的比例 r/n 来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的.

我们称数 r/n 为事件 A 的概率, 即

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{事件 } A \text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}$$

$$= \frac{\text{有利于事件 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}} \quad (1-1)$$

式 1-1 称为概率的古典定义。

【例 1-5】 抛掷两颗骰子, 观察它们出现的点数。

(1) 写出试验的样本空间;

(2) 设事件 A 为“第一颗骰子的点数为 2”, 事件 B 为“两颗骰子的点数之和为 5”, 求 $P(A), P(B)$ 。

解 (1) 样本空间

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), (6,2), \dots, (6,6)\}.$$

式中 (i, j) 表示第一颗骰子为 i 点, 第二颗骰子为 j 点 $(i, j = 1, 2, \dots, 6)$. 共有 36 个基本事件。

(2) $A = \{(2,1), (2,2), \dots, (2,6)\}$, 包含 6 个基本事件;

$B = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$, 包含 4 个基本事件。

这是古典概率模型, 故由式 1-1 可得

$$P(A) = 6/36 = 1/6, \quad P(B) = 4/36 = 1/9.$$

【例 1-6】 在 100, 101, \dots , 999 这 900 个 3 位数中, 随机地取一个 3 位数, 求不包含数字“1”的概率(这里“随机地”是指取到数 100, \dots , 999 是等可能的)。

解 以 A 表示事件“取到的 3 位数不包含数字 1”。在 100, 101, \dots , 999 中取一个 3 位数, 每一种取法是一个基本事件, 基本事件的总数 $n = 900$. 由题意可知各个基本事件发生的可能性相同, 因此可以利用式 1-1 来计算概率. 由于取到的 3 位数要求不包含数字 1, 即知百位的数有 8 种取法, 十位的数有 9 种取法, 个位的数有 9 种取法, 由组合法的乘法原理, 取到不含数字 1 的 3 位数共有 $8 \times 9 \times 9 = 648$ 种取法, 即有利于事件 A 的基本事件数为 648, 故由式 1-1 即得

$$P(A) = 648/900 = 18/25.$$

【例 1-7】 设在 100 个产品中有 4 个次品, 今从中随机地取