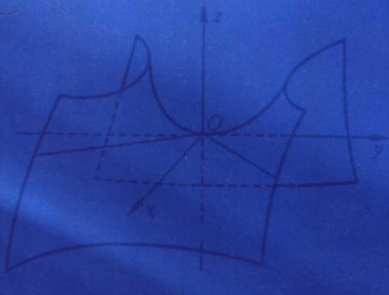
大学数学系列丛书

线性代数与解析几何

Linear Algebra and Analytic Geometry

北京交通大学数学系几何与代数组 编著

（修订本）



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

大学数学系列丛书

线性代数与解析几何

（修订本）

北京交通大学数学系几何与代数组　编著

清 华 大 学 出 版 社
北京交通大学出版社
· 北京 ·

内容简介

线性代数与解析几何是高等学校理工科和经济管理学科的一门重要基础课. 本书将线性代数与空间解析几何有机地融合在一起，用代数方法解决几何问题，同时空间几何又为代数理论提供几何背景. 全书共分8章：行列式、矩阵、空间解析几何、n维向量、线性方程组求解、相似变换与二次型、二次曲面、线性空间与线性变换、基本代数理论. 每一章都配套有相应数量的例题和习题，以适应分层次教学的需求，也为其他课程提供数学基础.

本书可作为高等院校理、工、经济、管理等专业的教材或教学参考书，也可供科技人员或自学人员使用.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与解析几何/北京交通大学数学系几何与代数组编著. —修订本. —北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2007.9
（大学数学系列丛书）
ISBN 978-7-81082-166-7

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 北…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材②解析几何-高等学校-教材　Ⅳ. O151.2　O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第136398号

责任编辑：黎　丹
出版发行：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010-62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010-51686414
印 刷 者：北京瑞达方舟印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×230　印张：17　字数：381千字
版　　次：2003年9月第1版　2007年9月第1次修订　2007年9月第5次印刷
书　　号：ISBN 978-7-81082-166-7/O·8
印　　数：14 701～20 700册　定价：26.00元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映. 对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢.
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn.

“大学数学系列丛书”
编写委员会成员名单

总 序

随着人类进入21世纪，科学技术的发展日益迅猛．在当今这个信息时代中，各种竞争的关键就是科学技术的竞争，科学技术的竞争突出地体现在人才的竞争上，而人才的竞争其实就是教育的竞争．当前的知识经济时代，将对人类知识和科学技术的发展、经济增长因素和方式乃至社会生活，引发新的、深刻的变化．在知识经济时代，国家的竞争能力和综合国力的强弱，不仅取决于其拥有的自然资源，更重要的是取决于科学技术和知识更新的发展水平，尤其是知识创新与技术创新的能力．知识经济的第一资源是智力资源，拥有智力资源的是人才，人才来自教育．要提高民族的创新能力，归根到底要提高全体民众的教育水平，培养大批具有创新意识、创新精神和创新能力的人才．

在我国的高等教育中，数学教育可以说起着举足轻重的作用．许多专家指出，数学教育在人类的精神营养中，确实有“精神钙质”的作用，因为数学对一个人的思想方法、知识结构与创造能力的形成起着不可缺少的作用．很难想像，一个数学知识贫乏的人，会在科学上有所建树．因此，全面提高我国理工科大学中非数学专业大学生的数学水平，将关系到我国各行各业中高级专门人才的素质和能力，关系到我国未来科学技术的发展水平和在世界上的竞争力，是国家百年树人基业中的重要一环．

正是基于以上的考虑，我们借鉴了我国近几年高等学校教学改革，特别是数学教学改革的经验，借鉴近几年我校数学教学改革的一些实践与做法，组织一批在大学数学公共课教学中有丰富教学经验的教师，在精心筹划、多方面研讨的基础上，编写了这一套“大学数学系列丛书”．

本系列教材在大学数学的三门重要的基础课教材——《微积分》、《线性代数与解析几何》、《概率论与数理统计》上下了很大的工夫．我们不仅按照教学的基本要求仔细编写了各章的内容，而且在各章中也融入了当前教学改革的一些经验；同时注意编写了与主教材配套的辅导教材，这样可以帮助学生更好地理解主教材中的内容和学习方法．在辅导教材的编写上，我们注重对主教材内容知识的扩展，同时也帮助学生掌握好各门课程的学习方法．但是，我们反对将主教材中的习题在辅导教材中简单地给出题解的做法．我们认为，这种做法

是对大学生的学习积极性和创造性的扼杀. 另外，为了适应目前大学数学教学改革的需要，我们编写了《数学实验基础》和《数学建模基础》两本教材. 我们认为，数学实验、数学建模与传统大学数学教学内容相结合，将会极大地丰富数学教学内容，增强大学生学习数学、应用数学的兴趣与积极性，为他们在将来的工作中想到数学、运用数学解决实际问题打下一个良好的基础. 同时，数学实验课与数学建模课的开设，将会给传统的数学教学方法带来更有意义的改革. 另外，为了配合我校的“高等数学方法 ”选修课及参加北京市大学生（非数学专业）数学竞赛培训的需要，我们还编写了《高等数学方法导引》教材，使大学生中有数学天赋的同学能更进一步地掌握高等数学的解题方法.

本系列教材在编写过程中，得到了北京交通大学教务处的大力支持，在教材的出版中，得到了北京交通大学出版社的热情帮助，在此，本系列丛书的全体编委向他们表示衷心的感谢.

本系列教材适用于高等院校的理工科专业和经济管理类专业的数学教学，也可以作为相关专业学生的自学教材和培训教材.

本系列教材的编写是大学数学基础课教学中的一种探索，其中一些做法，欢迎各方读者在对教材的使用与阅读中评头论足，不吝赐教，我们将在今后的修改中使其更加完善.

“大学数学系列丛书”编写委员会

2007 年 9 月

修订本前言

线性代数作为代数的一个分支，以向量空间与线性变换为研究对象. 就代数在数学和物理学等分支的应用来说，线性代数具有特殊的作用. 此外它特别适用于计算机的计算，在数值分析与运筹学中占有重要地位. 空间解析几何是以坐标法和向量法作为主要的研究工具，用代数方法来研究几何图形；而线性代数是用矩阵和向量等工具来研究多变量之间的线性关系，因此空间解析几何与线性代数紧密相关.

鉴于此，从 2003 年开始，北京交通大学数学系就开始着手将线性代数和空间解析几何课程整合成一门课程，学时也进行了相应调整．陈治中老师相继编著了多本关于线性代数与解析几何的教材和参考书，为我校工科数学教学特别是几何与代数的教学做出了极大的贡献. 鉴于该课程具有较强的抽象性与逻辑性，为了使学生掌握科学研究中常用的矩阵方法、线性方程组、二次型等基本知识和基本理论，并具有熟练的矩阵运算能力和应用矩阵方法解决实际问题的能力，从而为后继课程的学习及进一步扩大数学知识面奠定必要的数学基础，同时使学生的抽象思维能力受到一定的训练，我们在原书的基础上进行了内容的重新分配与调整，而编著了本教材．

为了满足新世纪科技人才对数学素质的需求，针对目前高等院校（特别是普通本科院校）的教学实际，本门课程教学内容的安排及要求需注意以下几点．

(1) 抓住课程本质，选择合理的教学内容与体系结构. 在保证教材内容科学性的前提下，本教材的理论体系是：从线性方程组解的不同情况出发，建立相关的定理，从而降低线性相关的抽象性与复杂性；定理的证明尽量简便；几何与代数内容有机结合，从三维向量空间到 n 维向量空间自然过渡；在空间几何部分增加了一些典型实例和尽可能直观的几何图形，从而引出向量线性相关性及向量空间的正交性等抽象概念.

(2) 强调矩阵初等变换的作用. 矩阵的初等变换是整本教材的重要方法，它也是贯穿全书的主要工具. 在尽可能多地使用初等变换解决相关问题的同时，一些定理和性质的证明都使用初等变换，以便于证明的直观理解.

(3) 把数学建模的思想与方法渗透到教材内容中. 强调数学知识的实际应用，增加部分

应用背景及应用实例的介绍，有能力的教师也可以增加数学实验课课程的教学（具体实例可以在北京交通大学数学实验中心网站下载），也可以启发学生自学，以培养学生应用数学知识解决实际问题的能力.

（4）选择适当的教学定位，进行分层次教学法研究. 高等教育已从精英教育转向大众化教育，针对高等学校的教学实际需要，教材在使用过程中以注重教学内容的整体性与合理性，一般授课学时在48～56学时以内的，只讲前6章的内容（打“*”可以不讲），56学时以上的教学可以增加第7、8章的部分内容. 如果讲授线性代数内容，可以选择第1、2、4、5、6章的内容（打“*”可以不讲），在例题及习题选择方面，可以根据学生的实际情况进行增删.

（5）为保证读者在学习过程中对本书的理解，教材中部分重要结论或环节，均以“提醒”的方式加以突出. 书末附录中附有连加、连乘运算符号的介绍，本书用到的符号索引及数学名词的汉英对照表，还有全部二次曲面的标准方程及图形.

（6）教材每一章的后面都附有一定数量的习题，书末还附有参考答案和提示，用以对教材中知识点的理解与掌握. 有兴趣的同学还可以通过数学实验中心网站下载更多的习题或通过E-mail联系（gcfeng@bjtu.edu.cn）.

本教材由冯国臣组织北京交通大学“几何与代数课程组”教师编写完成. 其中冯国臣编写第2、5、7章和附录及全书的习题解答，吴鹄编写第1章，刘国忠编写第3章，聂君祥编写第4章，俞勤编写第6章，江中豪编写第8章. 最后由冯国臣统一定稿.

本书的出版得到北京交通大学出版社、北京交通大学理学院领导和数学系全体老师的热情关怀和大力支持；同时在本书的编写过程中还参考了一些现有教材，得益匪浅，在此一并致以衷心的感谢！

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请有关专家、同行及广大读者批评指正.

几何与代数组
2007年8月

目 录

第 1 章　行列式及其应用

第 2 章　矩阵及其运算

第 3 章　空间解析几何与向量代数

第 4 章　n 维向量空间

第 5 章　线性方程组

第 6 章　相似矩阵、二次型、空间曲面与曲线

第 7 章　线性空间与线性变换

第 8 章　基本代数理论

DI YI ZHANG

第1章

行列式及其应用

在线性代数中，行列式是很重要的一个基本工具. 在数学学科及其他领域，如经济、管理等，都要用到它．本章主要介绍n阶行列式的定义及其性质、行列式的计算；用克莱姆法则求解n元线性方程组的解.

1.1　全排列、逆序数与对换

在中学的数学中，已经学过排列和组合的概念，我们从这里入手研究行列式的性质 .

【例 1-1】　用 1，2，3 三个数字，可以组成多少个没有重复的三位数?

解　这个问题其实就是全排列的概念，利用中学数学，有

$$P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

为了得出计算 P_n 的公式，可以仿照例 1-1 进行讨论.

从 n 个元素中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法，……这样继续下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置上，只有 1 种取法，于是

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

读为"**n 阶乘**". 例如 $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, $5! = 120$.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序，通常对 n 个不同的自然数，选定 1，2，…，n 的次序，即按由小到大的顺序排起来的排列叫作**标准排列**（或称**自然排列**).

在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为**一次逆序** . 一个排列中所有逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**. 逆序数为奇数的排列叫作**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫作**偶排列**.

下面来讨论计算排列的逆序数的方法.

不妨设 n 个元素为自然数 1 至 n，设

$$p_1 p_2 \cdots p_n$$

为这 n 个自然数的一个排列，考虑元素 $p_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 t_i 个，就是说 p_i 这个元素的逆序是 t_i . 全体元素的逆序总和，即

$$t = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

就是这个排列的逆序数.

【例 1-2】　求排列 32514 的逆序数 .

解　在排列 32514 中，3 排首位，逆序数为 0；2 的前面比 2 大的数有一个（3)，故逆序为 1；5 是最大数，逆序为 0；1 的前面比 1 大的数有三个（3、2、5)，故逆序为 3；4 的前面比 4 大的数只有一个（5)，故逆序为 1，于是这个排列的逆序数为

$$t=0+1+0+3+1=5$$

把一个排列中任意两个元素的位置互换，而其余的元素不动，就得到另一个排列，这样一个互换叫作**对换**．例如，经过 1、2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 就变成了 1234. 将相邻两个元素对换，叫作**相邻对换**.

定理 1-1 一个排列中的任意两个元素对换，排列的奇偶性改变．

证 先证相邻对换的情形．排列

$$a_1\cdots a_l a b b_1\cdots b_m \tag{1-1}$$

对换 a 与 b 变成

$$a_1\cdots a_l b a b_1\cdots b_m \tag{1-2}$$

显然，在排列式（1-1）中 a，b 与其他的元素构成逆序，则在排列式（1-2）中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在式（1-2）中也不构成逆序．不同的只是 a，b 的次序．如果原来 a，b 不组成逆序，那么经过对换，逆序数就增加一个．

不论增加 1 还是减少 1，排列的逆序数的奇偶性总是变了．因此，对于相邻对换的情形，定理是对的．

再证一般对换的情形．设排列为

$$a_1\cdots a_l a b_1\cdots b_m b c_1\cdots c_n \tag{1-3}$$

经过对换 a，b，排列式（1-3）变成

$$a_1\cdots a_l b b_1\cdots b_m a c_1\cdots c_n \tag{1-4}$$

不难看出，这样一个对换可以通过一系列的相邻对换来实现．从式（1-3）出发，把 b 与 b_m 相邻对换，再与 b_{m-1} 相邻对换，也就是说，把 b 一位一位地向左移动．经过 $m+1$ 次相邻位置的对换，排列式（1-3）就变成

$$a_1\cdots a_l b a b_1\cdots b_m c_1\cdots c_n \tag{1-5}$$

从式（1-5）出发，再把 a 一位一位地向右移动，经过 m 次相邻对换，排列式（1-5）就变成了排列式（1-4).

总之，a，b 对换可以通过 $2m+1$ 次的相邻对换来实现．$2m+1$ 是奇数，相邻对换改变了排列的奇偶性，故这两个排列的奇偶性相反.

推论 奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数.

证 由定理 1-1 知，对换的次数就是排列奇偶性的次数变化，而标准排列是偶排列（逆序数为 0)，因此知推论成立．

1.2　行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究二阶、三阶行列式.

1. 二阶行列式

定义 1-1　由 4 个元素 a_{ij}（i，j=1，2）排成两行两列的，并定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

的式子称为**二阶行列式**.

提醒： 由 4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 排列的两行两列的行列式是一个数值. 其中 a_{ij}（i，j=1，2）称为二阶行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行，第 2 个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列.

【例 1-3】　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - (-2)\times 3 = 11$$

由定义 1-1 可知：

① 二阶行列式是一些项的**代数和**，每一项都是两个元素的乘积，这两个元素位于不同的行、不同的列；

② 每一项的两个元素的行标成自然排列 12 时，列标都是 1，2 的某一排列，这样的排列共有 2 种，故二阶行列式共有 2 项.

③ 带正号的一项列标排列是 12，是**偶排列**，带负号的列标排列是 21，是**奇排列**.

2. 三阶行列式

定义 1-2　由 9 个元素 a_{ij}（i，j = 1，2，3）排成三行三列的，并定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**.

从定义 1-2 不难发现，三阶行列式共有六项，每一项均为来自不同行、不同列的三个元素的积，其中三项为正号，另三项为负号．为便于记忆，给出图 1-1 所示的方法，此法称为**对角线法则**（显然，二阶行列式也适用对角线法则）．其中实线相连接的 3 个元素乘积前取正号，虚线相连接的 3 个元素乘积前取负号．

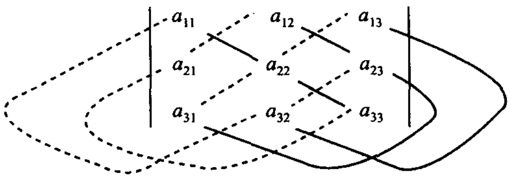


图 1-1

【例 1-4】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times1\times3 \\ &= 30+2-24-12+20-6=10 \end{aligned}$$

由三阶行列式的定义可知，三阶行列式有如下特征．

① 三阶行列式的每一项都是不同行、不同列的 3 个元素的乘积．

② 每一项的三个元素的行标排成自然排列 123 时，列标都是 1，2，3 的某一排列，这样的排列共有 6 种，故三阶行列式共有 6 项．

③ 带正号的三项的列标排列是 123、231、312，它们全为偶排列；带负号的三项的列标排列是 132、213、321，它们全为奇排列．

于是，三阶行列式可以写成