高职高专"十一五"规划教材

GAOZHI GAOZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

高等数学训练教程

组冠兴 主编 高 群 主审

GAODENG SHUXUE XUNLIAN JIAOCHENG

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学训练教程

俎冠兴　主编
崔若青　石勇　副主编
高　群　主审

化学工业出版社
·北京·

本书是根据教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”和“专升本高等数学考试要求”，以学生在学习高等数学时所遇到的问题和困难，充分考虑到高等数学本门学科自身的科学性和规律性，结合编者多年来所积累的教学经验编写而成.

本书是高等数学的配套辅导教材，也适用于其它版本的高等数学读者. 本书按照教学要求设计了六个板块：目标要求；知识要点；例题精选；教材典型习题与难题解答；练习题；自测题.

本书可作为高职高专各专业高等数学辅导训练教材，也可作为高职高专各专业学生专升本高等数学复习的辅导教材，同时还适用于成人高考专升本的高等数学辅导教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学训练教程/组冠兴主编. —北京：化学工业出版社，2007.7
高职高专“十一五”规划教材
ISBN 978-7-122-00435-2

Ⅰ. 高… Ⅱ. 组… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学院-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 068072 号

责任编辑：高 钰　　文字编辑：王 琪
责任校对：王素芹　　装帧设计：潘 峰

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 11　字数 291 千字　2007 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　价：18.00 元

前　　言

《高等数学训练教程》是《高等数学》的配套辅助教材．是适应高职高专教育培养生产、建设、管理、服务需要的第一线技术应用型人才的需要，通过认真总结各相关高职高专院校高等数学教改经验，在经过几轮教学实践基础上完成的，是一部能够较好地满足高职高专各专业高等数学学习的配套训练辅导教材.

本书按照教学要求设计了六个板块：目标要求；知识要点；例题精选；教材典型习题与难题解答；练习题；自测题．本教材在编写过程中，突出了以下特点：

（1）明确了每章的目标要求，帮助学生把握重点知识；

（2）通过每章知识点、重点的归纳，帮助学生理解知识点的内在联系，提高学生综合学习、分析研究的能力；

（3）例题精选、练习题与自测题的选取力求深浅适度，覆盖面全，无论从题型、题量还是难易程度等方面都能反映高职高专高等数学课程教学基本要求；

（4）对教材中典型的练习题和比较难的题目作了比较详细的解答.

本书可作为高职高专各专业高等数学辅导训练教材，也可作为高职高专各专业学生专升本高等数学复习的辅导教材，同时还适用于成人高考专升本的高等数学辅导教材.

本书由俎冠兴主编，高群主审，崔若青、石勇任副主编，参加编写的还有：齐金菊、顾越昆、王凌云、王峥、李兆斌、梁靓.

在编写过程中得到了编写人员所在院校的大力支持和协助，在此一并表示感谢.

尽管我们在本书的编写特色方面有一定的突破，但由于我们水平有限，时间也比较仓促，书中不当之处也在所难免，希望各教学单位和读者在使用本教材的过程中给予关注，把意见反馈给我们，以便修订时改进.

编者

2007 年 4 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、目标要求

1. 理解函数和反函数的概念，了解函数的特性、分段函数，会求函数的定义域，掌握复合函数与初等函数的概念，会建立简单实际问题中的函数模型.

2. 理解极限和左右极限的概念，了解极限的性质，熟练掌握求极限的方法.

3. 掌握极限的运算法则，会用两个重要极限公式求极限.

4. 理解无穷小与无穷大的概念，了解无穷小的性质，知道无穷小的比较，会利用等价无穷小求极限.

5. 理解函数连续性概念，了解间断点的定义与分类，会求间断点并判断其类型.

6. 了解闭区间上连续函数的性质；会用介值定理证明方程根的存在性.

二、知识要点

1. 函数的定义

(1) 函数记号 $y=f(x)$ 中"f"的意义，函数的两要素：定义域"D"，对应法则"f". 对于两个或两个以上的函数，只有定义域和对应法则完全相同时才是同一函数. 例如，$y=\sin x$ 与 $y=\sin u$ 是同一函数. 一般地，$f(x)$ 与 $f(u)$，$f(t)$ 都是同一函数；

(2) 弄清 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 的区别.

2. 定义域的求法

首先要熟悉下列简单函数的定义域：

$y=\dfrac{1}{x}$	D：$(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$
$y=\sqrt[2n]{x}\,(n=1,2,3,\cdots)$	D：$[0,\ +\infty)$
$y=\log_a x\,(a>0,a\neq1)$	D：$(0,\ +\infty)$
$y=a^x\,(a>0,a\neq1)$	D：$(-\infty,\ +\infty)$
$y=\sin x$ 或 $y=\cos x$	D：$(-\infty,\ +\infty)$
$y=\tan x$	D：$\left\{x\,\middle\|\,x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$
$y=\cot x$	D：$\{x\,\|\,x\neq k\pi,k\in Z\}$
$y=\arcsin x$ 或 $y=\arccos x$	D：$[-1,\ 1]$

求复杂函数的定义域，就是求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集；求解与实际问题有关的函数的定义域，要根据实际问题确定.

3. 复合函数的复合过程

清楚究竟谁为自变量、中间变量、因变量.

注意：$y=f(u)$，$u=g(x)$ 复合成 y 为 x 的函数是有条件的.

4. 极限的求法

(1) 定义法（观察法）求极限；

(2) 利用极限四则运算法则求极限（必须注意每项极限都存在，对于除法，分母极限不为零才能适用；若出现$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$等情况，都不能直接运用极限运算法则，必须对原式进

行恒等变换、化简，然后再求极限）；

（3）利用无穷小的性质求极限；

（4）利用等价无穷小的代换；

常用的等价无穷小有：当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}\sim1+\frac{1}{n}x$.

（5）利用两个重要极限求极限（利用 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 求极限时，函数的特点是“$\frac{0}{0}$”型，用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 求极限时，函数的特点是“1^∞”型的幂指函数，其形式为 $[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}$ 型，$\alpha(x)$ 为无穷小量，而指数为无穷大量，两者恰好互为倒数；用两个重要极限公式求极限时，往往用三角公式或代数公式进行恒等变形或作变量代换，使之成为重要极限的标准形式）；

（6）利用函数的连续性求极限（在一定条件下复合函数的极限，极限符号与函数符号可交换次序）；

（7）利用极限存在的充分必要条件求极限（一般用来求分段函数在分段点处的极限）.

5. 判定函数在某点的连续性（尤其是分段函数在分段点的连续性），求出间断点并判断类型.

间断点分三种情况，也是判定函数在某点连续的三个方法.

判断间断点的类型，根据间断点的定义进行.

三、例题精选

【例 1.1】 函数 $y=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{\lg(x+2)}$ 的定义域是（　　）.

A. $[-2,3]$　　B. $[-3,3]$　　C. $(-1,-2)\cup(-1,3]$　　D. $(-3,3)$

解 应选 C

因为对于函数 y 应满足

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant0\\x+2>0\\x+2\neq1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant3\\x>-2\\x\neq-1\end{cases}$$

这三个不等式的公共解为 $-2<x<-1$ 与 $-1<x\leqslant3$.

所以函数的定义域为 $(-1,-2)\cup(-1,3]$.

【例 1.2】 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求函数 $f(x+4)$ 的定义域.

解 因为 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，所以在函数 $f(x+4)$ 中，$0\leqslant x+4\leqslant1$，即 $-4\leqslant x\leqslant-3$. 所以 $f(x+4)$ 的定义域为 $[-4,-3]$.

【例 1.3】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x+1 & 0\leqslant x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant3\end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$ 及其定义域.

解 $f(-1)$ 的值由第一段的公式去求（因为 $x=-1<0$），所以

$$f(-1)=\frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}$$

同理有

$$f(0)=1\ ,f(2)=2$$

其定义域是三段定义域的并集，即

$$(-\infty,0]\cup[0,1)\cup[1,3]=(-\infty,3]$$

说明：(1) 求函数的定义域时，若函数是解析式的形式就是求使解析式有意义的自变量 x 的集合；

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集；

(3) 对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的函数式中去.

【例 1.4】 已知 $f(x)=2x^2+1$，则 $f(2x+1)=$________.

解 用代入法得 $f(2x+1)=8x^2+8x+3$，所以应填 $8x^2+8x+3$.

【例 1.5】 已知 $f(x+1)=x^2+2x$，则 $f(x)=$________.

解 方法一（代入法）令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，$f(u)=(u-1)^2+2(u-1)=u^2-1$，所以 $f(x)=x^2-1$.

方法二（还原法）$f(x+1)=x^2+2x=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1$，所以 $f(x)=x^2-1$.

因此应填 x^2-1.

说明：(1) 已知 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的解析式求 $f[\varphi(x)]$ 关键是依据 $f(x)$ 中的对应法则直接代入计算即可；

(2) 已知 $f[\varphi(x)]$ 求 $f(x)$ 关键是依据函数的定义找出对应法则"f"，一般有两种方法：代入法和还原法.

【例 1.6】 求函数 $y=x^{\frac{1}{2}}-1$ 的反函数.

解 因为 $y=x^{\frac{1}{2}}-1$ 是单调增函数，所以存在反函数. 由 $y=x^{\frac{1}{2}}-1$ 得 $x^{\frac{1}{2}}=y+1$，即 $x=(y+1)^2$，将 x 与 y 互换得 $y=(x+1)^2$，又 $y=x^{\frac{1}{2}}-1\geqslant-1$.

所以 $y=(x+1)^2\ (x\geqslant-1)$ 为所求的反函数.

说明：(1) 求反函数的题，一般其反函数存在，但作为思考过程反函数是否存在这一步是不可少的；

(2) 求反函数的方法一般分三步：解关于 x 的方程得 $x=f^{-1}(y)$；互换 x 和 y；写出定义域.

【例 1.7】 函数 $y=\sin^2(2x+1)$ 的复合过程是（ ）.

A. $y=\sin^2 u$，$u=2x+1$　　B. $y=u^2$，$u=\sin(2x+1)$

C. $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+1$　　D. $y=\sin u^2$，$u=2x+1$

解 因为设 $u=\sin(2x+1)$，则 $y=u^2$（基本初等函数).

又设 $v=2x+1$，则 $u=\sin v$（基本初等函数).

所以 $y=\sin^2(2x+1)$ 的复合过程是 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x+1$. 即应选 C.

说明：此类题属于复合函数的分解，分解的步骤是"由外向里层层分解"，而每层函数应是基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商的形式.

【例 1.8】 画出函数 $y=|x-2|$ 的图像，并说明函数的奇偶性及单调区间.

解 因为 $y=|x-2|=\begin{cases}x-2 & x\geqslant2\\2-x & x<2\end{cases}$，用描点法作图像如图 1-1 所示.

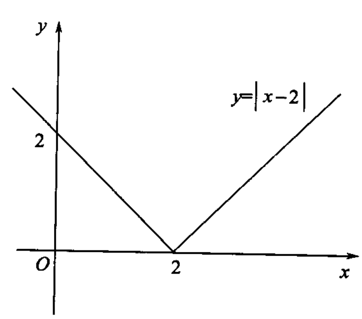

图 1-1

由图知函数为非奇非偶函数；单调减少区间是 $(-\infty,2)$；单调增加区间是 $[2,+\infty)$.

说明：(1) 作含有绝对值函数的图像应先去掉绝对值号

再用描点法作图；

(2) 函数图像的特点是：奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称；单调递增函数的图像由左向右上升；单调递减函数的图像由左向右下降.

【例 1.9】 设函数 $y=f(x)$，$x\in R$，则 $F(x)=f(x)-f(-x)$必为（　　）.

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 非奇非偶函数　　D. 恒等于零的函数

解　应选 B.

因为 $F(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F(x)$，所以 $F(x)$ 为奇函数.

说明：(1) 判定函数的奇偶性除定义法、图像法外还可以用如下性质：①两个奇（偶）函数之和仍为奇（偶）函数；②两个奇（偶）函数之积必为偶函数；③奇函数与偶函数之积为奇函数；

(2) 判定函数的奇偶性的方法应灵活应用，对于选择题、填空题用图像法或性质法最方便.

【例 1.10】 求函数 $f(x)=\sin 3x$ 的周期.

解　方法一（定义法）因为 $f(x)=\sin 3x=\sin(3x+2\pi)=\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)$，所以有 $f\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=f(x)$. 因此 $f(x)=\sin 3x$ 的周期是$\frac{2\pi}{3}$.

方法二（间接法）由三角函数知识得 $f(x)=\sin\omega x$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，所以 $f(x)=\sin 3x$ 的周期为$\frac{2\pi}{3}$.

说明：(1) 求函数周期的两种方法应灵活应用．一般定义法较难；

(2) 凡仅含有三角函数类型的函数的周期一般用方法二．

【例 1.11】 判定函数 $y=2\sin x+\arctan x$ 的有界性.

解　对于 $x\in R$，都有 $|y|=|2\sin x+\arctan x|\leqslant 2|\sin x|+|\arctan x|\leqslant 2+\frac{\pi}{2}$，所以函数 $y=2\sin x+\arctan x$ 是有界的.

说明：判定函数的有界性一般有两种方法，定义法和图像法，此题定义法方便.

【例 1.12】 下列极限存在的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}$　　C. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{2^x-2}$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}n(n+1)$

解　因为对于选项 A 来说，当 $x\to 0^-$ 时$\frac{1}{x}\to-\infty$，$\sin\frac{1}{x}$震荡无极限，当 $x\to 0^+$ 时，$\frac{1}{x}\to+\infty$，$\sin\frac{1}{x}$也震荡无极限；对于选项 C 来说，当 $x\to 1$ 时 $2^x-2\to 0$，$\frac{1}{2^x-2}\to\infty$极限不存在；对于选项 D 来说，当 $n\to\infty$时 $n(n+1)\to\infty$极限不存在；而 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$. 所以选 B.

【例 1.13】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{5x^2+4x+1}$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x^2+3x+5}$

解　(1) 先用 x^2 同除以分子、分母然后再求极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x+2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{5}$$

（2）同理得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{4x^2+3x+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}{4+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=0$

说明：（1）此二题基本形式是 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$，分子、分母都趋于“$\infty$”，称为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，其基本解法是消去“$\infty$”因子法，通常是分别提取分子、分母中最高阶的无穷因子；

（2）一般下面形式的极限有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}=\begin{cases}0 & n>m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n<m\end{cases}$$

【例 1.14】 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2}{x^3+x+2}$　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

（3）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$　　（4）$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x}{x-1}$

分析　（1）题能直接应用极限的四则运算法则计算；（2）题虽然 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 无极限，但 $|\sin x|\leqslant1$，而 $\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小量，因此利用无穷小的性质计算；（3）题属于“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，不能直接用商的极限运算法则，但注意到 $x\to2$ 时，$\sqrt{x}-\sqrt{2}\to0$，而 $\sqrt{x}-\sqrt{2}\neq0$ 这一实质，可以消去分子、分母中的“零因子”再求极限；（4）题因为分母 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$，极限商的运算法则不能用，但注意到分子当 $x\to1$ 时是常数 3 这一特点，可用无穷小与无穷大的关系求极限.

解　（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+2}{x^3+x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(x+2)}{\lim\limits_{x\to0}(x^3+x+2)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}x+\lim\limits_{x\to0}2}{\lim\limits_{x\to0}x^3+\lim\limits_{x\to0}x+\lim\limits_{x\to0}2}=1$

（2）因为 $|\sin x|\leqslant1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，即 $\dfrac{1}{x}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小量，所以由无穷小的性质得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$

（3）$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}=8\sqrt{2}$

（4）因为当时分母是无穷小量而分子是常数，所以由无穷小与无穷大的关系得

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x}{x-1}=\infty$（注意：不能写成 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x}{x-1}=\dfrac{3}{0}=\infty$）

【例 1.15】 下列极限中正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x^2)}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}}=1$

解　因为重要极限 I 的结构形式为 $\lim\limits_{\square\to0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$. 式中“$\square$”可以是自变量 x，也可以是

x 的函数，而$\square\to 0$，表示当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，必有$\square\to 0$，即$\square$是当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时为无穷小量时$\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$ 成立. 所以 A、B、D 不正确，因此选 C.

【例 1.16】 下列极限中正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}+3}=\mathrm{e}$

解 因为重要极限Ⅱ的结构形式为$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$. 式中“$\square$”可以是自变量 x，也可以是 x 的函数，而$\square\to 0$，表示当 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时，必有$\square\to 0$，即$\square$是当 $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ 时为无穷小量且小括号内用“+”相连时上式$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$ 成立. 所以 A、B、C 不正确，因此选 D.

说明：(1) 重要极限Ⅰ属于“$\dfrac{0}{0}$”型未定式，重要极限Ⅱ属于“1^∞”型未定式；

(2) 如果极限属于“$\dfrac{0}{0}$”型未定式且式中含有三角函数式或反三角函数式时，首选重要极限Ⅰ，如果极限属于“1^∞”型未定式考虑重要极限Ⅱ.

【例 1.17】 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x}$.

分析 由前例说明知此题应用重要极限Ⅰ.

解 令 $u=\arcsin 3x$，则 $x=\dfrac{1}{3}\sin u$，当 $x\to 0$ 时，$u\to 0$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin 3x}=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{3}\sin u}{u}=\frac{1}{3}$$

【例 1.18】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x}$.

分析 由前例说明知此题应用重要极限Ⅱ.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{-3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{-3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}(-6)}=\mathrm{e}^{-6}$

【例 1.19】 已知 a、b 为常数，$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b}{x-2}=2$，求 a、b 的值.

分析 此题属于求极限的反问题，由条件知分子必有 $(x-2)$ 这个因式.

解 因为$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)}{x-2}=2$，所以必有 $a=2$，$\dfrac{b}{a}=-2$，因此 $a=2$，$b=-4$.

【例 1.20】 $f(x)$ 在点 $x=x_0$处有定义是当 $x\to x_0$时 $f(x)$ 有极限的（　　）.

A. 必要条件　　B. 充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既非必要又非充分条件

解 由极限存在定义可知，应选 D.

【例 1.21】 判定函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-2 & x>0\end{cases}$，当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=2$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-2)=-2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，因此当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限不存在.

说明：对于求分段函数分界点处的极限，要用左右极限来求，只有左右极限存在且相等时极限才存在，否则，极限不存在.

【例 1.22】 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$　　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$

解 (1) 因为 $\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$ 是初等函数，在 $x=2$ 处有定义，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{e^2\sqrt{1+x^2}}=\frac{4+\sin 2}{e^2\sqrt{5}}$$

(2) 函数 $\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$ 看成由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{x^2+x}-x$ 复合而成，利用分子有理化

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

然后利用复合函数求极限的法则来运算

$$\lim_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to +\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}=\arcsin\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1}$$

$$=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

说明：利用"函数的连续性"可求连续函数的极限. 根据复合函数的连续性，复合函数的极限符号与函数符号可交换次序.

注意：求极限的方法较多，因此分清题目类型，选择适当的方法会使计算变得简捷，这一点大家应引起足够的注意，只有多做练习才能达到"随机应变"的目的.

【例 1.23】 当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $\tan 2x$ 比较是（　　）.

A. 高阶的无穷小　　B. 低阶的无穷小

C. 等价无穷小　　D. 同阶但不等价的无穷小

解 由无穷小比较的定义可知，应选 A.

【例 1.24】 函数在某点有定义，是在该点连续的（　　）.

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既非必要又非充分条件

解 因为由连续的定义知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，故 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义. 但 $f(x)$ 在 x_0 处有定义不能保证 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义. 所以选 A.

【例 1.25】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2-x+1 & x\leqslant 0\\ \dfrac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x^2-x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$f(0)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$，因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

【例 1.26】 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & 0<x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 3\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性，若不连续，说明间断点的类型.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续，即 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点. 且为第一类间断点.

【例 1.27】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$，则 $f(x)$ 在（　　）.

A. $x=0$，$x=1$ 处都间断　　B. $x=0$，$x=1$ 处都连续

C. $x=0$ 处间断，$x=1$ 处连续　　D. $x=0$ 处连续，$x=1$ 处间断

解 因为在 $x=0$ 处，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，因此 $f(x)$，在 $x=0$ 处间断.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1$，$f(1)=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，因此，在 $x=1$ 处连续. 故应选 C.

说明：(1) 由于初等函数在它的定义区间内总是连续，所以函数的连续性讨论多指分段函数在分段点处的连续性；

(2) 讨论分段函数在分段点处的连续性方法一是根据函数在一点连续的三要素，方法二是根据函数连续的充要条件，方法三计算分段点处的左、右极限并使其等于分段点处的函数值即可；

(3) 判定函数间断点的类型应根据间断点类型的定义.

【例 1.28】 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 a 等于（　　）.

A. -1　　B. 1　　C. 3　　D. 2

解 由函数连续性的充要条件知应选 C.

【例 1.29】 证明方程 $x-\sin x-1=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根.

证明 设 $f(x)=x-\sin x-1$，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $f(0)=-1<0$，$f(\pi)=\pi-1>0$，由闭区间上连续函数的性质知，在 $(0,\pi)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi-\sin\xi-1=0$，从而证得方程 $x-\sin x-1=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根.

说明：证明方程 $f(x)=0$ 的根的存在问题，一般用"零点定理".

四、教材典型习题与难题解答

练习题 1.1

3. 设 $f(x+2)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解（代入法）令 $x+2=t$，则 $x=t-2$，代入函数得

$$f(t)=(t-2)^2+3(t-2)+5=t^2-t+3$$

于是，所求函数为

$$f(x)=x^2-x+3$$

（还原法）因为 $f(x+2)=x^2+3x+5=(x+2)^2-x+1=(x+2)^2-(x+2)+3$

于是，所求函数为

$$f(x)=x^2-x+3$$

5. 求下列函数的定义域：

(2) $y=\sqrt{\ln\frac{2x-x^2}{2}}$

解　要使函数有意义，则

$$\begin{cases}\ln\frac{2x-x^2}{2}\geqslant 0\\ \frac{2x-x^2}{2}>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x+2\leqslant 0\\ x^2-2x<0\end{cases}\Rightarrow\text{无解}$$

所以函数的定义域为 ϕ.

6. 将 $y=|2x-1|-\sqrt{(x-1)^2}$ 用分段函数表示，并作出函数图像.

解　$y=|2x-1|-\sqrt{(x-1)^2}=|2x-1|-|x-1|=\begin{cases}x & x\geqslant 1\\ 3x-2 & \frac{1}{2}\leqslant x<1\\ -x & x<\frac{1}{2}\end{cases}$

7. 判断下列函数的奇偶性：

(2) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

解　因为 $f(-x)=\ln\left[-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right]=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，

所以，函数为奇函数.

练习题 1.2

2. 讨论符号函数在 $x=0$ 点的极限情况.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\text{sgn}x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\text{sgn}x=-1$，所以符号函数在 $x=0$ 点的极限不存在.

5. 求下列函数的极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$　　　　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$

解　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)-3}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}=1$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$

练习题 1.3

1. 计算下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x(x+3)}$　　　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$

解　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x+3}=\frac{2}{3}$

(6) 令 $\arcsin x=t$，则 $x=\sin t$，$x\to 0$ 时，$t\to 0$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{3\sin t}=\frac{2}{3}$$

本题等学完第四节后，也可以用等价无穷小来求解. 当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$$

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2}$　　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}$

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=e^{3}$$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-2}{x+3}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}}\right]^{-4}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-4}=e^{-4}$$

练习题 1.4

4. 求下列极限：

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2+2x-1}{x-3}$　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-7x+100)$

解 (3) 因为$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{3x^2+2x-1}=\frac{3-3}{3\times 3^2-2\times 3-1}=0$，根据无穷小与无穷大的关系有

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+2x-1}{x-3}=\infty$$

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-7x+100}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{7}{x}+\frac{100}{x^2}}=0$，根据无穷小与无穷大的关系有

$$\lim_{x\to\infty}(x^2-7x+100)=\infty$$

练习题 1.5

2. 求下列极限：

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a+x}{a}=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}$$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & x<-1 \text{ 或 } x>1\end{cases}$，作出函数 $f(x)$的图形，讨论 $x=\pm 1$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，又 $f(1)=1$，所以函数在 $x=1$ 点是连

续的.

因为 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1$，所以函数在 $x=-1$ 点是间断的.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x+a & x\leqslant 1 \\ \ln x & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续. 求 a 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\ln x=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+a)=1+a=f(1)$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，所以有 $1+a=0$，即 $a=-1$.

6. 证明方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

证明 设 $f(x)=x^3+3x^2-1$，显然函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的. 又 $f(0)=-1$，$f(1)=3$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$. 即方程 $x^3+3x^2-1=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

习 题 一

2. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求 $f(x)$，$f\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

解 本题用还原法求函数 $f(x)$.

因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，所以 $f(x)=x^2-2$.

5. 求下列极限：

(5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$　　　(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})$

解 (5) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=4$$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}=-\frac{1}{2}$$

6. 找出函数 $y=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$ 的间断点，并判断其类型.

解 当 $1-e^{\frac{x}{x-1}}=0$ 或 $x-1=0$，即 $x=0$ 或 $x=1$ 时函数无意义. 所以 $x=0$，$x=1$ 是函数的两个间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}=1$，所以 $x=0$ 是第二类间断点，$x=1$ 是第一类间断点.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{2x}} & x<1 \\ 2x+k & x\geqslant 1\end{cases}$，试确定 k 取何值时，函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+k)=k$，因为函数 $f(x)$ 在 $x=$