高等医药院校药学专业教材

# 线性代数及应用

XIANXING DAISHU JI YINGYONG

主编/杨 访　丁 峻

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

# 线性代数及应用

主编　杨　访　丁　峻

东南大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数及应用/杨访,丁峻主编. —南京:东南大学出版社,2007.8

ISBN 978-7-5641-0826-7

Ⅰ.线... Ⅱ.①杨...②丁... Ⅲ.线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第115633号

| | |
|---|---|
| 出版发行 | 东南大学出版社 |
| 社　　址 | 南京市四牌楼2号(邮编:210096) |
| 出 版 人 | 江　汉 |
| 印　　刷 | 南京玉河印刷厂 |
| 开　　本 | 787mm×1092mm　1/16 |
| 印　　张 | 8.75 |
| 字　　数 | 235千字 |
| 印　　数 | 1～4000 |
| 版　　次 | 2007年8月第1版第1次印刷 |
| 书　　号 | ISBN 978-7-5641-0826-7/O·49 |
| 定　　价 | 15.00元 |

# 前　言

线性代数理论有着悠久的历史和丰富的内容.近年来,随着科学技术的发展,特别是电子计算机使用的日益普遍,线性代数作为重要的数学工具已深入应用到自然科学、社会科学、工程技术、经济管理等各个领域.

同微积分一样,线性代数也是高等院校普遍开设的基础数学课程.与微积分相比,线性代数更多地是从离散的角度研究客观世界的空间形式和数量关系.学习线性代数课程,无论是对于全面培养学生的数学思想、提高数学素质,还是为进一步学习其他课程,都有着不可替代的重要作用.对于计算机科学的迅猛发展,数字化处理技术已渗透到科学乃至当今日常生活的各个领域,学习和掌握线性代数的意义就显得尤为突出.

如何理解线性代数的基本思想和基础理论知识,掌握其基本方法,并能灵活应用于实际问题是线性代数教学的主要任务.对于非数学专业学生基础知识较薄、学时较少的特点,我们编写了这部教材.通过精心选取和安排教学内容,使其能保持一定的系统性和完整性,同时又密切结合应用背景,通过对实际问题例子的讲解激发学生学习的兴趣,增强运用数学知识分析和解决实际问题的能力,努力做到融科学性和实用性于一体.

本书的前四章内容涵盖了线性代数课程的基本内容和教学要求,各章前后穿插了有关的实际问题引例和实际应用问题的实例.而以附录的形式介绍了 MATLAB 软件,用以说明线性代数的计算问题可以借助于计算机来解决.

本书由中国药科大学数学教研室的杨访、丁峻老师任主编,参加前四章内容编写的有孙爱玲、李雪玲、韩可勤、易登录老师,附录 MATLAB 部分的内容由蒋秋浩老师编写.

在此我们衷心感谢中国药科大学基础部领导曹凤岐老师和东南大学出版社对本书的出版给予的大力支持.

由于编者的水平有限,书中难免存在不足和不妥处,敬请专家和读者批评指正.

**编者**

2007 年 6 月

# 目 录


第一章 行列式 …… (1)

第一节 $n$阶行列式 …… (1)

一、二阶和三阶行列式 …… (1)

二、$n$阶行列式 …… (3)

三、几种特殊的行列式 …… (4)

第二节 行列式的基本性质 …… (6)

第三节 行列式的计算 …… (9)

一、利用行列式性质,把行列式化为上(下)三角行列式 …… (9)

二、利用行列式性质和按行(列)展开计算行列式 …… (11)

三、利用加“边”法,计算行列式 …… (13)

第四节 克莱姆法则 …… (14)

一、克莱姆法则 …… (14)

二、应用问题 …… (17)

习题一 …… (20)

第二章 矩阵 …… (23)

第一节 矩阵的概念 …… (23)

一、引例 …… (23)

二、矩阵的定义 …… (24)

第二节 矩阵的运算及其性质 …… (24)

一、矩阵的加法 …… (24)

二、数与矩阵的乘法(数乘) …… (25)

三、矩阵与矩阵相乘 …… (25)

四、矩阵的转置 …… (32)

五、方阵的行列式 …… (32)

第三节 逆矩阵 …… (33)

一、逆矩阵的概念 …… (33)

二、逆矩阵的性质 …… (34)

三、逆矩阵的求法 …… (34)

四、应用问题 …… (38)

第四节 几类特殊矩阵 …… (42)

一、对角矩阵 …… (42)

二、三角形矩阵 …… (43)

三、对称矩阵和反对称矩阵 …… (43)
第五节 分块矩阵 …… (44)
一、分块矩阵的概念 …… (44)
二、分块矩阵的运算 …… (44)
三、分块对角矩阵的逆矩阵 …… (46)
第六节 矩阵的初等行变换 …… (47)
一、矩阵的初等变换 …… (47)
二、初等方阵 …… (47)
三、运用初等行变换求逆矩阵 …… (49)
第七节 矩阵的秩 …… (50)
一、矩阵秩的概念 …… (50)
二、用矩阵的初等行变换求矩阵的秩 …… (51)
三、矩阵的秩的性质 …… (52)
习题二 …… (53)
**第三章 线性方程组** …… (56)
第一节 高斯(Gauss)消元法 …… (56)
第二节 线性方程组的相容性定理 …… (61)
第三节 $n$ 维向量及向量组的线性相关性 …… (64)
一、$n$ 维向量的概念 …… (64)
二、向量组的线性组合 …… (65)
三、向量组的线性相关性及其判别 …… (70)
第四节 向量组的秩 …… (73)
一、向量组的等价关系 …… (73)
二、极大线性无关组 …… (74)
三、向量组的秩 …… (74)
第五节 向量空间 …… (76)
一、向量空间的定义 …… (76)
二、向量空间的基与维数 …… (77)
第六节 线性方程组解的结构 …… (79)
一、齐次线性方程组解的结构 …… (79)
二、非齐次线性方程组的解的结构 …… (81)
三、应用问题 …… (83)
习题三 …… (90)
**第四章 相似矩阵与二次型** …… (94)
第一节 正交矩阵 …… (94)
第二节 方阵的特征值与特征向量 …… (98)
第三节 相似矩阵 …… (102)
第四节 实对称矩阵的对角化 …… (104)
第五节 二次型及其标准形 …… (105)

第六节 正定二次型…………………………………………………………………………（110）
第七节 应用问题…………………………………………………………………………（111）
习题四……………………………………………………………………………………（118）
**附录 MATLAB 软件基础** ………………………………………………………………（121）
第一节 MATLAB的命令窗口和编程窗口 ……………………………………………（121）
一、命令窗口 ……………………………………………………………………………（121）
二、程序编辑窗口 ………………………………………………………………………（122）
第二节 矩阵的一般运算符………………………………………………………………（124）
一、矩阵的加减运算 ……………………………………………………………………（124）
二、矩阵的乘法运算 ……………………………………………………………………（125）
三、矩阵的数量乘法(简称数乘) ………………………………………………………（125）
四、矩阵的乘方运算 ……………………………………………………………………（126）
五、矩阵的数量乘方 ……………………………………………………………………（126）
第三节 线性方程系统……………………………………………………………………（127）
一、行列式、逆和秩 ……………………………………………………………………（127）
二、线性方程组的求解和行阶梯形矩阵 ………………………………………………（129）

# 第一章　行列式

行列式是线性代数中的一个基本工具. 在初等代数中，为便于求解二元和三元线性方程组，引进了二阶、三阶行列式，为了研究一般的 $n$ 元线性方程组，需要进一步讨论 $n$ 阶行列式. 本章将在二阶、三阶行列式的基础上，给出 $n$ 阶行列式的定义、基本性质及计算方法. 作为行列式的初步应用，还将介绍用行列式解线性方程组的一种重要方法 —— 克莱姆法则.

## 第一节　$n$ 阶行列式

### 一、二阶和三阶行列式

在初等数学中，求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

时，用消元法得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \end{cases} \tag{2}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，求得解为

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{3}$$

为了便于记忆，引入记号

$$D = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{4}$$

并称由 $a,b,c,d$ 四个数构成的两行两列的式子

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

为二阶行列式，利用二阶行列式的概念，则式(3) 可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{5}$$

可见用二阶行列式来表示二元线性方程组的解确实简洁明了.

类似地，如果在求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{6}$$

的过程中引入下列三阶行列式的记号，并规定三阶行列式的展开式为

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned} \tag{7}$$

则当三元线性方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，用消元法求解这个方程组可得

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{8}$$

式中，$D_j\,(j=1,2,3)$ 是用常数项 $b_1,b_2,b_3$ 替换 $D$ 中的第 $j$ 列所得的三阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

解的表达式(5)和(8)很容易记忆，分母均是相应的系数行列式，$x_j$ 的分子是把系数行列式的第 $j$ 列换成方程组中的常数项，其余列不动所得到的行列式.

**例 1**　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

**解**　利用展开式计算，得

$$\begin{aligned} D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 8 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 2(0\times 8-5\times 6)-(4\times 8-5\times(-1))+3(4\times 6-0\times(-1)) \\ &=-25 \end{aligned}$$

**例 2**　解三元线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1-3x_2+x_3=7 \\ x_1+x_2-x_3=-4 \\ -3x_1+x_2+2x_3=1 \end{cases}$$

**解**　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 7 \\ 1 & 1 & -4 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 3$$

鉴于二、三阶行列式在讨论二、三元线性方程组时所起的作用，在讨论 $n$ 元线性方程组之前，我们先将二、三阶行列式的概念推广到 $n$ 阶行列式，其中 $n$ 是任意的正整数.

## 二、$n$ 阶行列式

现给出 $n$ 阶行列式的归纳式定义.

**定义** 由 $n\times n$ 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 $n$ 行 $n$ 列(横的称行，竖的称列)，并在左、右两边各加一竖线的算式，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶行列式，并且规定其值如下：

(1) 当 $n=1$ 时

$$D_1 = |a_{11}| = a_{11}$$

(2) 当 $n=2$ 时

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(3) 当 $n>2$ 时

$$D_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$$

以上，数 $a_{ij}$ 称为第 $i$ 行第 $j$ 列的元素；$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，其中 $M_{ij}$ 为由 $D_n$ 划去第 $i$ 行第 $j$ 列后余下元素构成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 $M_{ij}$ 为 $a_{ij}$ 的余子式.

**例 3** 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0&2\\-1&0&1&0\\1&0&3&1\\0&1&0&0\end{vmatrix}$$

**解** $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$$=1\times\begin{vmatrix}0&1&0\\0&3&1\\1&0&0\end{vmatrix}-1\times\begin{vmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\0&0&0\end{vmatrix}+0-2\times\begin{vmatrix}-1&0&1\\1&0&3\\0&1&0\end{vmatrix}=1\times1-0+0-2\times4$$

$=-7$

实际上,行列式不但可以按第一行元素展开,而且也可以按第一行以后的任一行或者任一列元素展开,其结果都是相同的,即有以下定理.

**定理 1** $n$ 阶行列式 $D$ 等于它的任意一行(列)元素与它们所对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in},\qquad \forall i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj},\qquad \forall j=1,2,\cdots,n \tag{10}$$

定理证明略.

在例 3 中,如果按第四行元素展开行列式,就得到

$$D=1\times(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&0\\1&3&1\end{vmatrix}=-7$$

这与按 $n$ 阶行列式定义计算的结果是一致的.

## 三、几种特殊的行列式

下面利用行列式的定义来计算几种特殊的 $n$ 阶行列式.

1. 对角行列式:只有在对角线上有非零元素的行列式称为对角行列式.

**例 4** 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_{n-1}&0\\0&0&\cdots&0&\lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{11}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{12}$$

其中行列式(11)主对角线上的元素是$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,行列式(12)次对角线上的元素是$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$,其他元素都是零.

**证明** 对于行列式(11),利用$n$阶行列式的定义依次降低其阶数,则得

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} = \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

对于行列式(12),利用$n$阶行列式的定义依次降低其阶数,则得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_4 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n}(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

2. 上(下)三角行列式:主对角线以下(上)的元素都为零的行列式称为上(下)三角行列式.

**例5** 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{13}$$

**证明** 利用定理 1,按第一列元素展开,依次降低其阶数,得

$$D=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\cdots=a_{11}(-1)^{1+1}a_{22}(-1)^{1+1}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理,对下三角行列式按第一行展开,得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

## 第二节 行列式的基本性质

由行列式的定义直接计算行列式的值,当行列式的阶数 $n$ 较大时,计算过程是比较繁琐的. 为了简化行列式的计算,下面介绍行列式的一些基本性质.

将行列式 $D$ 的行、列互换后所得到的行列式,称为行列式 $D$ 的转置行列式,记为 $D^{\mathrm{T}}$(或 $D'$). 即设 $n$ 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

**证明** 利用数学归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时,命题显然成立.

(2) 设对 $n-1$ 阶行列式命题成立,下面证明对 $n$ 阶行列式命题也成立.

将 $D$ 和 $D^{\mathrm{T}}$ 分别按第一行和第一列元素展开,得

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{1+k}M_{1k} \tag{14}$$

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n}a_{1k}\cdot(-1)^{k+1}N_{k1} \tag{15}$$

式中,$A_{1k}$,$M_{1k}$ 是 $D$ 的第一行元素的代数余子式和余子式;$B_{k1}$,$N_{k1}$ 是 $D^{\mathrm{T}}$ 的第一列元素的代数余子式和余子式.

$M_{1k}$,$N_{k1}$ 都是 $n-1$ 阶行列式,很容易看出 $N_{k1}$ 是 $M_{1k}$ 的转置行列式. 由假设知 $N_{k1}=M_{1k}$,$\forall k=1,2,\cdots,n$ 都成立,从而由式(14)和(15)得 $D=D^{\mathrm{T}}$,即命题对 $n$ 阶行列式也成立.

综上所述，命题得证.

这个性质说明了行列式中行、列地位的对称性，凡是行列式对行成立的性质对列也成立.

**性质 2**　互换行列式中两行(列)，行列式的值改变正负.

设行列式

$$D=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix}$$

互换第 $i$ 行与第 $j$ 行$(1\leqslant i,j\leqslant n)$ 得

$$\bar{D}=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \end{matrix}$$

则由性质 2 得

$$\bar{D}=-D$$

性质 2 可用数学归纳法证明，此处从略.

**推论 1**　如果行列式中有两行(列) 元素对应相等，则此行列式的值为零.

**性质 3**　行列式中的某行(列) 中所有的元素都乘以同一数 $k$，等于用数 $k$ 乘以行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证明**　将等式左、右两边的行列式分别记为$\bar{D}$和 $D$，并将行列式$\bar{D}$ 按第 $i$ 行展开，得

$$\bar{D}=ka_{i1}A_{i1}+ka_{i2}A_{i2}+\cdots+ka_{in}A_{in}=k(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})=kD$$

**推论 2**　行列式中某一行(列) 的元素的公因数，可以提到行列式符号的前面.

**推论 3**　如果行列式中某行(列) 的元素全为零，则此行列式的值等于零.

**推论 4**　如果行列式的两行(列) 元素对应成比例，则此行列式的值等于零.

**性质 4**　如果行列式中某行(列) 的各元素都是两数之和，则此行列式可拆成两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证明** 将上述三个行列式分别按第 $i$ 行展开，并注意到它们第 $i$ 行元素的代数余子式都是相同的，于是有

$$\text{左边} = (a_{i1}+b_{i1})A_{i1}+(a_{i2}+b_{i2})A_{i2}+\cdots+(a_{in}+b_{in})A_{in}$$
$$=(a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in})+(b_{i1}A_{i1}+b_{i2}A_{i2}+\cdots+b_{in}A_{in})=\text{右边}$$

**性质 5** 将行列式的某一行(列)的各元素都乘以一个常数 $k$ 后，再加到另一行(列)的对应元素上，则行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}+\lambda a_{i1} & a_{k2}+\lambda a_{i2} & \cdots & a_{kn}+\lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

**证明** 由性质 4 得

$$\text{右边} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

又由推论 4 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

所以右边 = 左边.

以后用“$r_i \times k(c_i \times k)$”表示第 $i$ 行(列)元素乘 $k$；“$r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$”表示将第 $i$ 行(列)与第 $j$ 行(列)交换位置；“$r_j + kr_i(c_j + kc_i)$”表示将第 $i$ 行(列)乘数 $k$ 加到第 $j$ 行(列)上.

**性质 6** 行列式 $D$ 的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0, \qquad \forall i \neq j$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0, \qquad \forall i \neq j$$

**证明** 作行列式(把原行列式中的第 $j$ 行元素换为第 $i$ 行元素)

$$\bar{D}=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}$$

由性质 2 的推论 1 可知,当 $i\neq j$ 时,$\bar{D}=0$. 再将它按第 $j$ 行展开(注意到行列式$\bar{D}$与行列式 $D$ 仅第 $j$ 行的元素不同,第 $j$ 行的代数余子式是相同的),则又有

$$\bar{D}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=0$$

命题得证.

由本章第一节定理 1 与性质 6,我们得到如下结论:

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{16}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}\tag{17}$$

## 第三节 行列式的计算

尽管行列式的计算方法比较多,综合性强,计算较复杂,但是我们还是可以归纳出一些有效方法,如利用行列式的性质、利用行列式的展开式、利用递推公式和“加边”等方法.

### 一、利用行列式性质,把行列式化为上(下)三角行列式

**例 6** 计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

**解** 对于这种用数字表示的没有任何规律的行列式,一般应将其化为上三角行列式.

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1}-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&-10&15\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3}\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&8&-10\\0&0&0&\frac{5}{2}\end{vmatrix}=40$$

**例 7** 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}a_0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

其中 $a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

**解** 从第二列至第 $n+1$ 列分别提出 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，再用第一列减去其他各列，得

$$D_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0&\frac{1}{a_1}&\frac{1}{a_2}&\cdots&\frac{1}{a_n}\\1&1&0&\cdots&0\\1&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=\prod_{j=1}^{n}a_j\begin{vmatrix}a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&\frac{1}{a_1}&\frac{1}{a_2}&\cdots&\frac{1}{a_n}\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})\prod_{j=1}^{n}a_j$$

**例 8** 计算 $n$ 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

**解** 分别将第二行至第 $n$ 行加到第一行上去，提出公因式 $x+(n-1)a$，再将第二行至第 $n$ 行分别减去第一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}x+(n-1)a&x+(n-1)a&x+(n-1)a&\cdots&x+(n-1)a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$$