高职高专"十一五"规划教材

GAOZHI GAOZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

高等数学与经济数学训练教程

GAODENG SHUXUE YU JINGJI SHUXUE

阎章杭　任树华　黄士林　主编

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学与经济数学训练教程

阎章杭　任树华　黄士林　主编

化学工业出版社
·北京·

本书是《高等数学与经济数学》（第二版）的配套辅助教材，同时又有较强的独立性，其内容涉及微积分及应用、概率论与数理统计初步、线性代数及应用等各章内容小结、常见问题分类及解法、复习题及全解、典型习题解答与提示和自我测验五部分组成．并在书后附有几套精选往届期终考试试卷，以供学生自我检验和提高学习兴趣之用．本书内容精炼、例题典型、解题全面透彻．

编者还将本书的主体内容与主教材的主体内容合并制作了电子教案，并免费赠送教师使用．另外还建有专门网站——数学规划教材网（www. shuxue 999. net），提供如教材分析、教学建议、辅导答疑等相应网上服务．

本书可作为高职高专院校、成人教育学院的经济、管理等专业的学生学习《高等数学与经济数学》习题课教材和辅导教材．另外也可作为经济、管理人员以及从事本课程教学的教师阅读与参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学与经济数学训练教程/阎章杭，任树华，黄士林主编．北京：化学工业出版社，2007.1
（高职高专“十一五”规划教材）
ISBN 978-7-5025-9659-0

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①阎…②任…③黄… Ⅲ. ①高等数学-高等学校：技术学院-教材②经济数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ. ①O13 ②F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 010193 号

责任编辑：高　钰　　　　装帧设计：3A 设计艺术工作室
责任校对：李　林

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：三河市宇新装订厂
787mm×1092mm　1/16　印张 10¾　字数 258 千字　2007 年 4 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http：//www. cip. com. cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：17.00 元

前　　言

当前，我国高职高专教育成为社会关注的热点，面临大好的发展机遇．同时，国家的经济、科技和社会发展也对高职高专教育人才的培养提出了许多更高要求．而大学数学是高职高专院校各专业必修的一门重要的基础课，它对培养、提高学生的思维素质、创新能力、科学精神以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用．为了进一步推动全国大学数学课程的改革及相应的教材建设，使其更加适应当前形式发展的需要，开封大学、河南大学、石家庄铁路职业技术学院、包头职业技术学院、徐州建筑职业技术学院、天津渤海职业技术学院、石家庄职业技术学院、吉林交通职业技术学院、漯河职业技术学院、南阳理工学院、三门峡职业技术学院、无锡职业技术学院、漳州职业技术学院、雅安职业技术学院、邵阳职业技术学院、盐城纺织职业技术学院、山西工程职业技术学院等院校的优秀教师和专家，先后经过长达八年的通力合作，于近几年联合编写并成功出版了《高等数学与工程数学》、《高等数学与经济数学》、《应用数学基础》（五年制）、《高等数学》（少学时）、《高等应用数学》（少学时）等多套教育部高职高专规划教材．为了使教材更上一个层次，教材编委会还于近两年投入相当大的人力、财力、物力将该系列教材完善成立体化教材．由于教材很有自身特色，多年来，所编教材深受全国几十所使用该教材院校的欢迎．其中教材《高等数学与工程数学》（第二版）已被教育部列为普通高等教育“十一五”国家级规划教材．

《高等数学与经济数学训练教程》教材是高职高专规划教材《高等数学与经济数学》（第二版）配套的辅助教材，同时该教材又有较强的独立性．该书所涉及的内容有：微积分学及应用，概率论与数理统计基础，线性代数初步以及数学实验等．

本书针对当前高职高专学生普遍存在的课程难学、规律难寻、习题难做、表述难全等问题，对主教材的每一章，从学习内容、学习方法、解题训练到习题解答、自我测验等方面进行全面的、系统的、科学的辅导．特别注重培养学生的自学能力和运用数学知识解决实际问题的能力．同时该书的内容编排也为主教材的习题课提供了充实的资料和素材，大大方便了教师的备课及学生的学习．为了便于阅读，本书在章节顺序上及内容的表述、解题方法、符号标志等方面都与主教材保持一致，每一章的辅导内容均有五个板块，即：每章内容小结、常见问题分类及解题方法、复习题及全解、典型习题解答与提示、自我测验．另外在本书的附录中还精选了几套期终考试试题，以利于学生自我检测学习效果，提高学习的主动性和积极性．

为了使教材更上一个层次，编者还将该套书完善成立体化教材，即将该书的主体内容与主教材的主体内容合并制作了该套教材的电子教案，并免费赠送教师使用，另外还建有专门的网站：数学规划教材网（www. shuxue 999. net)，提供如教材分析、教学建议、典型教案、辅导答疑等相应的网上服务．

本书由阎章杭总策划，负责组织实施．本书的主编为：阎章杭、任树华、黄士林；副主编为：白水周、宋姝、杜跃鹏；编审人员有：第一篇为辛自力、郭建萍、齐春玲，第二篇为路世英、任树华、黄士林、杜跃鹏，第三篇为路世英、宋姝、阎育华、张小慧．

在本书的编写过程中，曾得到有关院校的领导、系部领导和有关专家的大力支持和帮助，杜跃鹏老师积极参与了利用 Mathematica 软件进行数学实验以及在电子教案中积极参与数学动画库的制作。河南大学的教授、专家阎育华、王国胜曾对本书的应用数学部分进行了认真的审核，并提出了许多宝贵的意见，在此一并表示衷心的谢意！

由于我们水平有限，不足之处恳请广大读者批评指正.

数学立体化系列规划教材编审委员会

2007 年 1 月

目　录

第一篇　微积分及应用

第二篇　概率论与数理统计基础

第三篇　线性代数初步及应用

附　　录

第一篇　微积分及应用

第一章　函数、极限与连续

第一节　本章内容小结

一、本章主要内容

函数的定义；几种常见的经济类函数；函数的几种特性；复合函数、反函数与初等函数的概念；数列与函数极限的定义；极限的运算法则；无穷小与无穷大的概念；两个重要极限；无穷小的比较；函数在点与区间的连续性及间断性；闭区间上连续函数的性质.

二、本章重点

函数的概念、极限的概念及运算法则、函数连续的概念及性质.

三、教学建议

建议认真掌握以下内容：

1. 几个常用的基本极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} c=c$，（$c$ 为常数）；(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$，（$\alpha$ 为正的常数）；

(5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ n=m\\ 0, & 当\ n>m\\ \infty, & 当\ n<m\end{cases},$$

其中 a_0，a_1，…，a_m 和 b_0，b_1，…，b_n 都是常数，且 $a_0\neq0$，$b_0\neq0$；

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$；(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；(9) $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}$；

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty} q^x=0\quad(|q|<1)$.

2. 几个充要条件

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，[当 $\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}$ 时 $\alpha\to0$]；

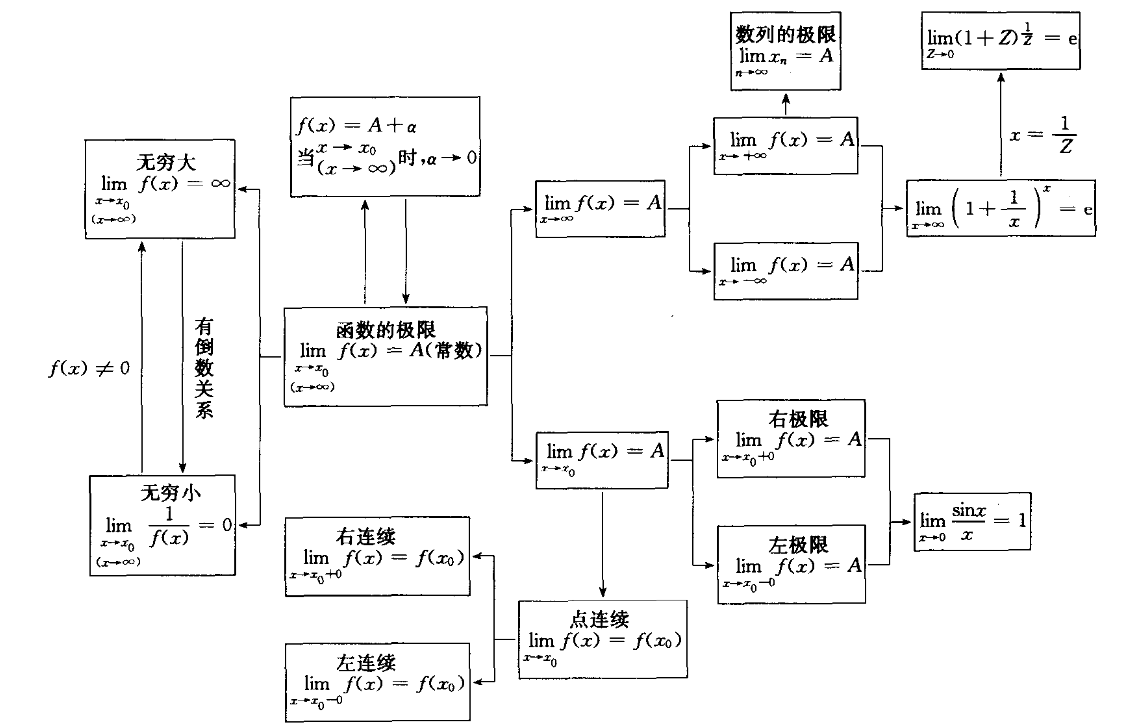
(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

3. 表1-1 列出了当$x\to\infty$和 $x\to x_0$ 时函数的极限与由此引申出来的有关概念之间的关系

表 1-1



4. 表1-2 列出函数$y=f(x)$的点连续与区间连续的概念

表 1-2

条　　件	结　　论
(1) 如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	那么 $y=f(x)$在点 x_0 连续
(2) 如果 $y=f(x)$在(a,b)内每一点连续	那么 $y=f(x)$在(a,b)内连续
(3) 如果 $y=f(x)$在(a,b)内连续，且 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$，$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$	那么 $y=f(x)$在$[a,b]$上连续

四、本章关键词

函数　极限　连续

第二节　常见问题分类及解法

一、求函数的定义域

函数的定义域就是指使函数有意义的自变量 x 的取值范围. 判断函数有意义的方法有以下几种.

(1) 分式的分母不等于零;

(2) 偶次方根式中,被开方式大于等于零;

(3) 含有对数的式子,真数式大于零;

(4) 反正弦、反余弦符号内的式子绝对值小于等于 1;

(5) 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集;

(6) 若已知 $y=f(x)$ 的定义域是 $[a, b]$,求 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域,方法是解不等式组 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$.

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+\arccos(3x-18)$;(2) $y=\dfrac{\ln(5x-2)}{x^2-7x+10}+\sqrt{10-x}$.

解 所求定义域应使函数式中各部分都有意义,即求解不等式组,

(1) 若使函数有意义,必须

$\begin{cases}x^2-3x+2>0\\ |3x-18|\leqslant1\end{cases}$,解得 $\begin{cases}x<1 \text{ 或 } x>2\\ \dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}\end{cases}$,故所求函数定义域为 $\dfrac{17}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{19}{3}$;

(2) 若使函数有意义,必须

$$\begin{cases}5x-2>0\\ x^2-7x+10\neq0\\ 10-x\geqslant0\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x>\dfrac{2}{5}\\ x\neq2,\ x\neq5\\ x\leqslant10\end{cases}$$

故所求函数的定义域为 $\dfrac{2}{5}<x\leqslant10$ 且 $x\neq2$,$x\neq5$.

例 2 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[2, 5]$,求函数 $y=f(4x-3)$ 的定义域.

解 由已知得 $2\leqslant4x-3\leqslant5$,即 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant2$,故所求函数的定义域为 $\dfrac{5}{4}\leqslant x\leqslant2$.

二、判断两个函数是否相同

一个函数的确定取决于其定义域和对应关系,因此判断两个函数是否相同必须判断其定义域是否相同,且要判断函数表达式是否统一即可.

例 3 判断下列各对函数是否相同.

(1) $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$;(2) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 与 $g(x)=1$.

解 利用定义域和对应法则来判断

(1) 因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}$ 的定义域是一切实数,而 $g(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$ 的定义域也是一切实数,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的定义域,又因为 $f(x)=\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)=g(x)$,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 具有相同的对应法则,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数;

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 的定义域是 $x\neq0$ 的一切实数,而 $g(x)=1$ 的定义域是一切实数,所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

三、判断函数奇偶性

判断函数的奇偶性，主要的方法就是利用定义，其次是利用奇偶的性质，即奇（偶）函数之和仍是奇（偶）函数；两个奇函数之积是偶函数；两个偶函数之积仍是偶函数；一奇一偶之积是奇函数.

例 4 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ （$a>0$ 且 $a\neq 1$）；（2）$f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$.

解 用定义判断：

（1）因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)=\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$是奇函数；

（2）用性质判断，因为 x^3 是奇函数，$2x^2+\tan x^2$ 是偶函数，所以 $f(x)=x^3(2x^2+\tan x^2)$是奇函数.

四、数列极限的求法

利用数列极限的四则运算法则、性质以及已知极限求极限.

1. 若数列通项的分子、分母都是关于 n 的多项式，则用分子分母中 n 的最高次项的幂函数同除分子分母，然后由四则运算法则求极限.

例 5 求下列数列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+5}{n^3+3n^2+5n-3}$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{5n^2+3n-4}$；（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+3n-2}}$.

解 （1）分子分母同除以 n^3 得 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{5}{n^3}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}=0$；

（2）分子分母同除以 n^2 得 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{2}{5}$；

（3）分子分母同除以 n 得 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}}=1$.

2. 若通项中含有根式，一般采用先分子或分母有理化，再求极限的方法.

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})$.

解 对通项式有理化得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

3. 若所求极限是无穷项之和，通常先利用等差或等比数列的前 n 项和公式求和，再求

极限.

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^n}\right)$.

解 先求由 $a_1=1$，$q=-\frac{1}{2}$所构成的等比数列的前 n 项和，再求极限.

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left[1-(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}\right]=\frac{2}{3}$$

*4. 利用两边夹定理求数列极限，方法是将极限式中的每一项放大或缩小，并使放大、缩小后的数列具有相同的极限.

例 8 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)$.

解 因为$\frac{n}{n^2+i\pi}\geqslant\frac{n}{n^2+n\pi}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，$\frac{n}{n^2+i\pi}\leqslant\frac{n}{n^2+\pi}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，

$$所以\ n\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\leqslant n\frac{n}{n^2+\pi},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nn}{n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nn}{n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\pi}{n^2}}=1$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+\pi}+\frac{n}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{n}{n^2+n\pi}\right)=1$.

*5. 若通项式为形如 1^∞ 形式的不定式，一般采用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求极限.

例 9 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^n$.

解 用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求极限.

(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2=\mathrm{e}$；

(2) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1-1}{2}}\right]^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2.$$

五、函数极限的求法

函数的极限比数列的极限复杂，原因有两个，一是自变量的变化过程多；二是函数式复杂，因此，求函数的极限首先要观察自变量的变化和函数表达式，然后选择适当方法，一般地，函数极限有以下几种求法.

① 数列极限的求法也适合求函数的极限.

② 利用函数的连续性求函数的极限，即若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

例 10 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{x^2+5x+4}$.

解 因为函数$\dfrac{x+1}{x^2+5x+4}$在 $x=4$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{x^2+5x+4}=f(4)=\dfrac{1}{8}$.

③ 若求分段函数在分界点处的极限，则利用极限存在的充要条件求极限. 即函数在某一点极限存在的充要条件是函数在该点的左、右极限存在且相等.

例 11 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 1\\ x-1, & 1<x<3\\ \sin x+1, & x\geqslant 3\end{cases}，求 \lim_{x\to 1}f(x),\lim_{x\to 3}f(x).$$

解 在 $x=1$ 处，求 $f(x)$的左、右极限，

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^2+2x-3)=0,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0$$

所以 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$；

在 $x=3$ 处，求 $f(x)$的左、右极限，

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}(x-1)=2,\quad \lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^+}(\sin x+1)=\sin 3+1$$

因为 $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$不存在.

④ 利用两个重要极限求函数的极限. 即若所求极限为形如$\dfrac{0}{0}$形式的不定式，并且极限式中含有三角函数，一般通过三角函数的恒等变换再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，求极限；若所求极限为形如 1^∞ 形式的不定式，并且所求函数易转化为$(1+u)^{\frac{1}{u}}$或$\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^u$ 的形式，通常采用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 求极限.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\arcsin 5x}$.

解 因为已知极限为$\dfrac{0}{0}$形式不定式，且含有三角函数，则有

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\frac{\sin 5x}{\arcsin 5x}\frac{7x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\arcsin 5x)}{\arcsin 5x}\lim_{x\to 0}\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$$

例 13 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\cos x-1}}$.

解 因为所求极限为 1^∞ 形式不定式，由 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 得

$$原式=\lim_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}=\mathrm{e}$$

⑤ 利用无穷小量的特性以及无穷小量与无穷大量的关系求极限. 即无穷小量与有界变量之积仍是无穷小量；有限个无穷小量之积仍是无穷小量；有限个无穷小量之代数和仍为无穷小量等. 无穷小量与无穷大量的关系是互为倒数.

例 14 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x\cos\dfrac{1}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4}$.

解 (1) 利用无穷小量的性质求该极限，因为当 $x\to 0$ 时，x^2，$\sin x$ 均是无穷小量，而

$\cos\frac{1}{x}$为有界变量，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin x\cos\frac{1}{x}=0$；

(2) 利用无穷大量与无穷小量的关系求该极限，因为当 $x\to 2$ 时 $x^2+2x-3\to 5$，$x^2-4\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2x-3}{x^2-4}=\infty$，极限不存在.

六、判断函数连续性

利用函数连续性的定义，对于分段函数在分界点的连续性，可用函数在某点连续的充要条件；以及初等函数在其定义域内是连续函数的结论等来讨论函数的连续性.

例 15 讨论 $f(x)=\begin{cases}2-e^{-x}, & x<0\\ 2x+1, & 0\leqslant x\leqslant 2\\ x^2-3x+5, & x\geqslant 2\end{cases}$，在 $x=0$，$x=2$ 处的连续性.

解 由已知，$x=0$，$x=2$ 均是分界点.

在 $x=0$ 处：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2-e^{-x})=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$，而 $f(0)=1$，所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

在 $x=2$ 处：$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(2x+1)=5$，$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-3x+5)=3$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$极限不存在，故 $f(x)$在 $x=2$ 处不连续.

例 16 讨论当 a，b 为何值时，函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin x, & x<0\\ a, & x=0\\ x\sin\frac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续.

解 在分界点 $x=0$ 处：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{x}+b)=b$，$f(0)=a$，若使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续，必须使 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$成立.

即 $b=1=a$，所以 当 $a=b=1$ 时，函数在 $x=0$ 处连续.

第三节 复习题及全解

复 习 题 一

1. 填空题：

(1) 函数 $f(x)=\frac{1}{\ln|x-2|}$的定义域是____________；

(2) 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\frac{2x-1}{7}$的定义域是____________；

(3) 若 $f(x)$的定义域为[0,1]，那么 $f(x^2)$的定义域为____________；

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ \pi, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$，则 $f\{f[f(-1)]\}=$__________；

(5) 函数 $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 的定义域是__________，在区间__________内单调增加，在区间__________内单调减少；

(6) 函数 $y=\ln\cos^2 x$ 的复合过程__________；

(7) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $f(x)$ 和 A 的关系是__________；

(8) 设 $y=x-2\arctan x$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=$__________；

(9) 若 $y=f(x)$ 是连续的奇函数，且 $f(-1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$__________；

(10) 如果 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin mx}{2x}=\frac{2}{3}$，则 $m=$__________；

(11) 如果 $x\to 0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与 $a\sin^2 x$ 等价，则 $a=$__________；

(12) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 1\\ x, & 1<x<2\\ 2x-2, & x\geqslant 2\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=$__________，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$__________，$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=$__________；

(13) 函数 $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ 的间断点是__________，函数 $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 的间断点是__________，函数 $G(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的间断点是__________.

答 (1) $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,3)\cup(3,+\infty)$；(2) $[-3,-2]\cup[3,4]$；(3) $[-1,1]$；(4) $\pi+1$；(5) $(-\infty,+\infty)$，$(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$；(6) $y=\ln u, u=v^2, v=\cos x$；(7) $f(x)=A+\alpha$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$；(8) π；(9) -1；(10) $\frac{4}{9}$；(11) $\frac{1}{2}$；(12) -3；不存在；2；(13) $x=-1$；$x=0$；$x=0$.

2. 选择题

(1) 下列各对函数中，是相同函数的是（ ）.

A. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$；　　B. $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$；

C. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$；　　D. $f(x)=\frac{x}{x}, g(x)=1$.

(2) 下列函数中是奇函数的是（ ）.

A. $f(x)=x^2\cos x$；　　B. $\varphi(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$；

C. $g(x)=\arccos x$；　　D. $h(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^{-0}} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^{+0}} f(x)=A$，则下列说法中正确的是（ ）.

A. $f(x_0)=A$；　　B. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；

C. $f(x)$ 在点 x_0 有定义；　　D. $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(4) 下列说法正确的是（ ）.

A. 无穷小的倒数是无穷大；　　B. 两个无穷小的商为无穷小；

C. 若 $f(x)$ 在点 x_0 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续；

D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^{-0}}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^{+0}}f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(5) 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是（　）.

A. 1；　B. -1；　C. 不存在；　D. 0.

(6) $\ln x$ 当 $x\to 0+0$ 时与 $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ 当 $x\to 0$ 时分别是（　）.

A. 无穷大，无穷小；　　B. 无穷小，无穷大；

C. 无穷大，无穷大；　　D. 无穷小，无穷小.

(7) 若变量 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+1})}$ 是无穷小量，则 x 的变化趋势是（　）.

A. $x\to 1$；　B. $x\to -1$；　C. $x\to 0$；　D. $x\to\infty$.

答 (1) B；(2) D；(3) B；(4) D；(5) C；(6) A；(7) B.

3. 判断题.

(1) 无穷小是负无穷大；

(2) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；

(3) 无穷小即非常小的数；

(4) 函数在某一点 x_0 处连续，则函数在点 x_0 处有定义；

(5) $y=\sqrt{\sin(x^2+1)}$ 的复合过程是：$y=\sqrt{u}$，$u=\sin(x^2+1)$.

答 (1) ×；(2) ×；(3) ×；(4) √；(5) ×.

4. 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\ln\dfrac{x-1}{2-x}$；　　(2) $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{2x}{x^2+1}$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}-1, & 0<x<1\\ 1, & x>1\end{cases}$.

答 (1) (1, 2)；(2) $(-4,\ -\pi]\cup[0,\ \pi]$（提示：利用图像）；

(3) $(-\infty,\ +\infty)$；(4) $(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

5. 指出下列复合函数的复合过程：

(1) $y=\sin^2 2x$；　　(2) $y=a^{\cos^2 x}$；

(3) $y=\log_a\tan(x-1)$；　　(4) $y=\arccos[\ln(x^2-1)]$.

答 (1) $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=2x$；(2) $y=a^u$，$u=v^2$，$v=\cos x$；

(3) $y=\log_a u$，$u=\tan v$，$v=x-1$；(4) $y=\arccos u$，$u=\ln v$，$v=x^2-1$.

6. 某厂预计使用 x 台机器时，成本为 $c=20x+\dfrac{2000}{x}$ 元，画出此函数的图形，并估计要使成本最小，该使用多少台机器？

答 10（图略）.

7. 设某商品的需求函数与供给函数分别为 $Q(P)=\dfrac{5600}{P}$ 和 $S(P)=P-10$.

(1) 找出均衡价格，并求此时的供给量与需求量；

(2) 在同一坐标中画出供给曲线与需求曲线；

(3) 何时供给曲线过 P 轴，这一点的经济意义是什么？

答 (1) $P_0=80, Q(P_0)=S(P_0)=70$；(2) 略；(3) $P=10$，价格低于 10 时，无人愿供货.

8. 判断下列函数奇偶性：

(1) $f(x)=1+\cos x$；　(2) $f(x)=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$；

(3) $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x}$.

答 (1) 偶函数；(2) 偶函数；(3) 奇函数.

9. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(x\tan x-1)$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{1-x^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2}{1-2x^2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^3}$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$；　(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$；

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$；　(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos2x)}$；　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$ $(x\neq0)$；

(13) $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^x$；　(14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x$；　(15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$；

(16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)\arcsin2x}{x^3}$；　(17) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}$；　(18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$；

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}-\dfrac{n}{2}\right)$；(20) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$.

答 (1) $\dfrac{\pi}{4}-1$；(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{4}{3}$；(3) -2；(4) ∞；

(5) 0；(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\dfrac{x^2}{4}}{\sin^2\dfrac{x}{2}}=4$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$；

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=0$；

(9) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x^2-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{\sqrt{1+\dfrac{a}{x}}+1}=\dfrac{a}{2}$；