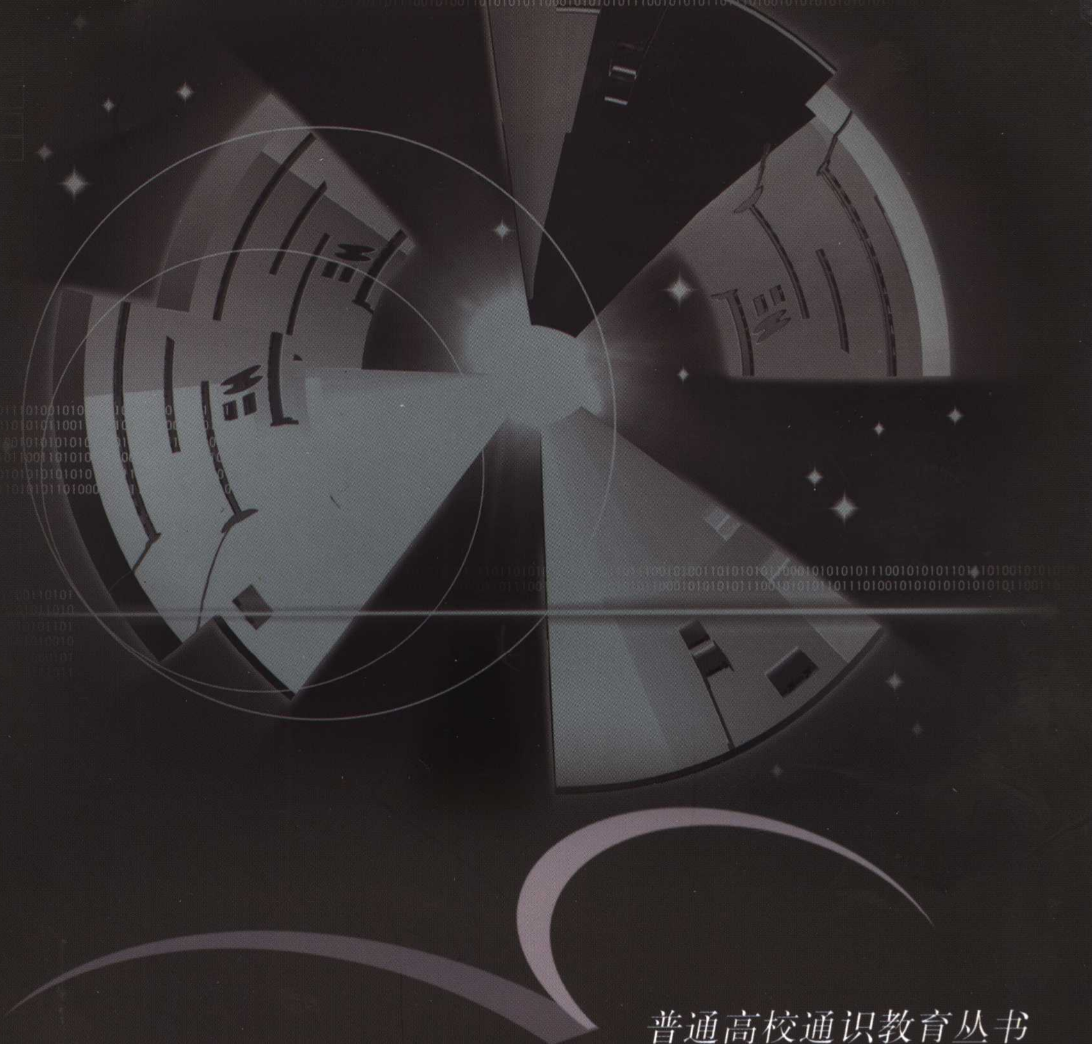
SHUXUE DE SIXIANG FANGFA JI YINGYONG
—DAXUE WENKE SHUXUE



普通高校通识教育丛书

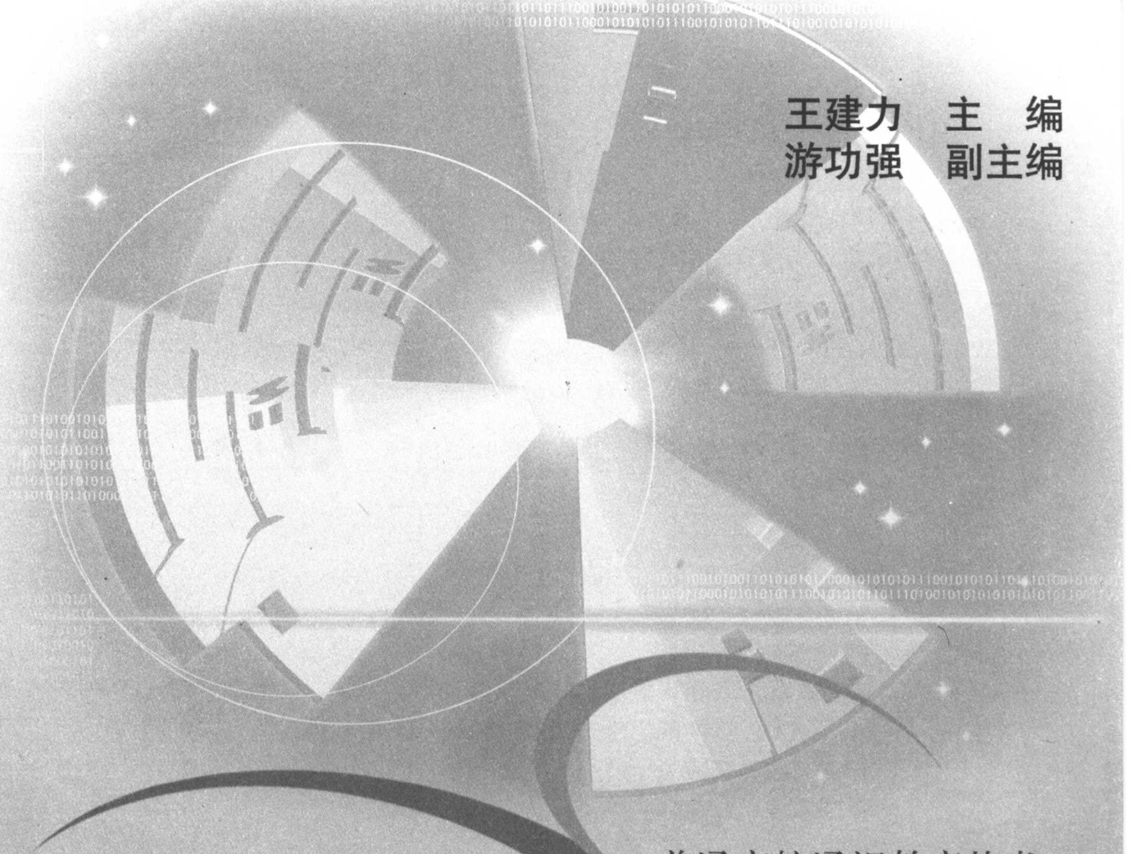
数学的思想方法及应用

——大学文科数学

王建力 主 编
游功强 副主编

浙江科学技术出版社

王建力 主编
游功强 副主编



普通高校通识教育丛书

SHUXUE DE SIXIANG FANGFA JI YINGYONG
——DAXUE WENKE SHUXUE

数学的思想方法及应用

——大学文科数学

浙江科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学的思想方法及应用：大学文科数学 / 王建力主编. 杭州：浙江科学技术出版社，2007.4

（普通高校通识教育丛书）

ISBN 978-7-5341-3004-5

Ⅰ. 数… Ⅱ. 王… Ⅲ. 数学—思想方法—高等学校—教材 Ⅳ. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 014219 号

丛 书 名	普通高校通识教育丛书
书　　名	**数学的思想方法及应用——大学文科数学**
主　　编	王建力
副 主 编	游功强
出版发行	浙江科学技术出版社 杭州市体育场路 347 号　邮政编码:310006 联系电话:0571-85152486 E-mail:cl@zkpress.com
排　　版	杭州兴邦电子印务有限公司
印　　刷	浙江全能印务有限公司
经　　销	全国各地新华书店
开　　本	710×1000　1/16　**印张**　14.25
字　　数	223 000
版　　次	2007 年 4 月第 1 版　2007 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5341-3004-5　**定价**　21.00 元

策划组稿　张祝娟　**责任编辑**　陈　岚

封面设计　金　晖　**责任校对**　顾　均

责任印务　田　文

普通高校通识教育丛书

序

高等学校人才培养模式改革涉及的核心课题之一，是构建符合现代社会理念并能体现科技进步水平的教学知识体系。理想的大学教学知识体系应具有时代性、先进性、学术性和适切性，并且具体体现在能够展现上述先进理念与特征的教材体系与课程内容之中。

综观当今世界，高校本科教育越来越重视受教育者的身心素质的培养和基础知识技能的掌握，这已成为高等院校教育教学改革与发展的主要趋势之一。通识教育由于重视科学精神与人文精神的培养，重视人的发展的全面性，重视知识的交叉、广博与综合，因而越来越受到高等院校管理者、教师和学生的重视。尤其在我国，自 20 世纪 90 年代初以来，高等院校在“文化素质教育”思想的指导下，在本科人才培养模式、课程体系、教材内容、专业建设等方面进行了大量的创新，以纠正长期以来我国本科教学过早专门化和过分专门化的倾向。

浙江师范大学、杭州师范学院、温州师范学院、绍兴文理学院和湖州师范学院是浙江省以教师教育为主要特色的多科性高等院校。多年来，五院校坚持党的教育方针，坚决走改革创新之路，认真落实“育人为本”、“学术强校”的办学理念，大力推广教育部倡导的大学生文化素质教育改革工作，并在办学体制、课程设置、教育科研和研究生培养等方面开展了广泛的校际合作，取得了良好效果。《普通高校通识教育丛书》的出版，旨在发挥五院校的综合学术优势，进一步推动五院校的校际协作和浙江省高等院校本科教学的改革，探索培养更多素质优、知识广、能力强的大学生的有效途径，从而为浙江省高等教育事业发展作出积极的贡献。

徐　辉

2005 年 5 月于浙师大初阳湖畔

前　言

本书是普通高校通识教育系列丛书之一，授课对象主要是文、史、哲、艺术、语言等人文学科的学生。

数学在自然科学中所起的作用和地位已经是不言而喻的了，但是问起数学在人文科学中的作用，至今恐怕还是有不少人感到茫然，数学就是数学，难道还与文学、史学、艺术等人文科学有关？出于对数学功能认识的模糊，再加上数学本身的高度抽象性，致使许多人文学科的学生，只要一进入数学课堂，便产生一种本能的抵触，或不屑一顾，或敬而远之。因此，高校的数学教师通常都把承担以人文学科学生为对象的数学课视为一桩吃力不讨好的苦差事。

之所以出现这种局面，原因是多方面的。要改变这种现状，需要从事高校文科数学教学的教师勇于探索、改革和实践。

首先，我们必须明晰对人文学科的学生开展数学教育的目的。学习数学对人文学科的学生来说其意义无疑是多方面的，但我们认为其中最主要的是能够更好地完善一个人的思维结构。一般来说，人文学科的学生往往比较偏重形象思维，善于联想和想像，喜作野马似的在广阔的原野上纵横驰骋，这的确是很可贵的，但这种海阔天空般的思维方式也容易使思想漫无目的、不着边际。数学作为人类知识的结晶，具有高度的抽象性和严格的逻辑推理性，对于人文学科的学生来说，既是掌握一种思维的工具，也是培养一种思维的方式，其作用恰似安在野马头上的笼套，能够不断提醒自己，在思想纵横驰骋时始终保持明晰的目标。因此，对于人文学科的学生，进行必要的数学训练，能够使他们的思维更加缜密、更加深刻、更加聪颖。

其次，为使数学教育能够被广大人文学科的学生所接受，必须在教材改革上下工夫。数学研究注重其自身理论体系的系统性和完备性，这种

对自身理论体系的系统性和完备性的追求，在客观上让许多普通人感到其理论与人们的日常生活的距离似乎已越来越远。但数学来源于普通生活，数学理论的产生和我们日常工作的距离并非真的那么遥远。作为以人文学科学生为对象的数学教育，我们大可不必去刻意追求单一理论的系统性和完备性，而应当以数学思维训练和培养文科学生用数学解决实际问题的自觉性和能力为出发点。

基于以上认识，我们组织编写了面向文、史、哲、语言和艺术等文科学生的数学教材，内容涉及微积分、随机数学、数学模型、线性代数及运筹学初步，并尽力体现出以下特点：

（1）以介绍数学的思想方法为主，而不特别强调数学自身的完备性。如，在微积分部分用割圆术的实例，直观地讲清了极限、积分等概念；在概率论和数学模型部分尽可能从应用实例入手逐步介绍数学知识；运筹学部分则完全使数学科普化，以便使学生感到学习数学其实很轻松。

（2）书中例题内容尽可能选自文科素材，使文科学生感到数学对文科有用。

（3）教材的目的是让文科学生得到数学思想的初步训练，分清楚他们在应用中所遇到的数学问题属于哪一类，然后寻求数学工作者来解决，而不是寄希望于让文科学生自己也能够用书中所介绍的数学方法去解决实际问题。

在此教材的成稿过程中我们已经充分感受到上述要求其实是不低的，要想编写出能够完全体现上述特点的数学教材，并不容易，因此，教材中肯定存在着不少纰漏、错误和问题，敬请读者指正。

通识教育课程的学分各校各不相同，本书是为 3～4 学分的课程编写的，其中第一章的大部分内容在现行的高中数学中已有涉及，作为预备知识简单阐述一下即可。如是 2 学分的课程，建议讲授第一、第二、第三、第四章。

本书的讲义已在绍兴文理学院面向文、史、哲学生的选修课中试用了两轮，本教材正是在上述两轮教学实践的基础上，在吸收了许多文科师生的建议之后，经集体多次讨论、修改完成的。其中，微积分部分由顾黎成副教授和游功强副教授执笔，随机数学和数学模型部分由李平副教授执笔，线性代数部分由陈志祥博士和陆仲坚副教授执笔，运筹学部分由盛宝怀教授执笔，最后由王建力教授、游功强副教授统稿完成。

绍兴文理学院数学系 2003 级应神州同学在本书中绘制了部分图形；

数学系教师李峰伟、叶青芳、王淑华也为本书的编写提出了许多修改意见；政法学院朱志勇教授对于本书的编写和出版也给予了极大的支持和鼓励，在此一并表示感谢。

编 者

2006 年 6 月

目　录

第一章　极限与连续

微积分学是现代科学的主要数学工具，它以极限理论为基础，着重研究函数的连续性、可微性和可积性等，它研究的基本对象就是函数. 因此，在这一章里，我们将对函数的有关概念和极限概念进行较系统的学习，为以后各章的学习做好准备.

第一节　预备知识

一、实数与数轴

为了后面叙述的需要，我们在这里简要回顾一下实数的概念及其性质.

人们对数的认识是逐步发展的，从生产实践中，首先抽象得出的是自然数 0，1，2，…. 全体自然数的集合叫做自然数集，记为 $\mathbf{N}$. 在 $\mathbf{N}$ 中我们可以定义加法和乘法运算，接着考虑加法运算和乘法运算的逆运算——减法运算和除法运算，继而发展到有理数，它包括一切整数（整数的集合用 $\mathbf{Z}$ 表示）与分数. 每一个有理数都可以表示成$\dfrac{p}{q}$的形式（其中 $p,q\in\mathbf{Z}$，且 $q\neq0$），也可用有限十进小数或无限十进循环小数来表示. 我们把全体有理数的集合叫做有理数集，记为 $\mathbf{Q}$. 在 $\mathbf{Q}$ 中我们可以定义四则运算. 下面我们先来介绍有理数的两个性质.

设有一条直线（通常画成水平直线），在这条直线上取一定点 O，称它为原点；规定一个正方向（习惯上规定由原点向右的方向为正方向）；再规定一个长度，称为单位长度. 这种具有原点、正方向和单位长度的直线称为数轴. 中学里大家就知道，每一个有理数都可以在数轴上找到一点来表

示它. 例如:图 1.1 中的点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 等,就可以分别代表有理数 $-4,-\frac{3}{2},\frac{1}{2},3,5$ 等. 我们把这样的点称为有理点. 有理数集 $\mathbf{Q}$ 具有有序性(在数轴上有理点是从左向右按大小次序排列的)和稠密性(任意两个有理点之间有无穷多个有理点).

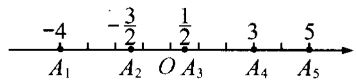


图 1.1

虽然有理点在数轴上处处稠密,但是它并没有充满整个数轴. 也就是说并不是所有数轴上的点 A 和原点 O 所决定的线段 OA 的长度与单位长度的比值都是有理数,例如边长为 1 的正方形,其对角线 OA 长记作 x(见图 1.2),由勾股定理知:$x^2=2$. 可以证明,x 不能表示成 $\frac{p}{q}$($p,q\in\mathbf{Z},q\neq 0$)的形式,它不是有限或无限循环十进小数,而是无限不循环十进小数,因此它不是有理数. 再以原点 O 为圆心,x 为半径作圆交数轴于点 B,这样线段 OB 的长度也等于 x,于是数轴上点 B 就没有对应到一个有理数,而是对应到一个无限不循环十进小数. 数轴上像这样的点还有很多,它们都对应到无限不循环小数,我们把无限不循环小数称为无理数,而数轴上对应于无理数的点称为无理点. 无理数也有无穷多个. 第一个发现无理数的人是 2500 多年前毕达哥拉斯学派的成员希伯索斯,他的发现引发了第一次数学危机,为此他被扔到海里淹死了. 因为当时毕达哥拉斯学派认为两个线段的比值必定都是有理数,事实上他们还要极端,认为世界上只有整数,连有理数都不是数,只是两个整数的比值.

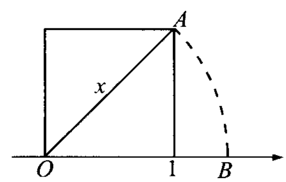


图 1.2

我们把有理数与无理数统称为实数. 全体实数构成的集合叫做实数集,记为 $\mathbf{R}$. 对每一个实数,数轴上都有唯一的一个点与它对应;反之,数轴上每一个点也对应着唯一的一个实数,即全体实数与数轴上的全体点形成一一对应的关系. 今后我们所研究的数都是实数,为简便起见,常常将实数和数轴上与它对应的点不加区别,用相同的符号表示,如点 a 和实数 a 是相同的. 与有理数集一样,在实数集 $\mathbf{R}$ 中可以定义四则运算,并具有有序、处处稠密等性质. 而且它还具有一种有理数点集 $\mathbf{Q}$ 没有的特性——实数点充满了整个数轴,这一性质叫做实数的连续性.

在讨论一些问题时，我们常常要用到实数绝对值的概念. 设 $x\in\mathbf{R}$，x 的绝对值是一个非负实数，记为 $|x|$. 其定义为 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$

例如：$|4|=4$，$|0|=0$，$|-3.2|=3.2$.

绝对值 $|x|$ 的几何意义是：点 x 到原点的距离. 当 $r\geqslant 0$，不等式 $|x|\leqslant r$ 表示点 x 到原点的距离小于等于 r，即 $|x|\leqslant r$ 成立当且仅当 $-r\leqslant x\leqslant r$ 成立. 设 $x,y\in\mathbf{R}$，我们记 $\rho(x,y)=|x-y|$，它的几何意义就是数轴上对应于 x,y 的两个点的距离.

二、 区间

在实数集合 R 中，我们今后会经常使用区间集合.

设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$. 我们将 $\mathbf{R}$ 的子集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)；将 $\mathbf{R}$ 的子集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a,b]$；将 $\mathbf{R}$ 的子集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 与 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，分别记为 $[a,b)$ 与 $(a,b]$. 这 3 类区间都是有限区间，这里 a,b 分别称为区间的左、右端点，$b-a$ 称为区间的长度. 此外，还有几种无穷区间，例如将 $\{x|x>a\}$ 记为 $(a,+\infty)$；将 $\{x|x\geqslant a\}$ 记为 $[a,+\infty)$；将 $\{x|x<b\}$ 记为 $(-\infty,b)$；将 $\{x|x\leqslant b\}$ 记为 $(-\infty,b]$；将 $\{x|x\in\mathbf{R}\}$ 记为 $(-\infty,+\infty)$.（注意：这里的 $+\infty$，$-\infty$ 分别读作正无穷大、负无穷大，它们只是一个符号.）

设 D 是 $\mathbf{R}$ 的子集，$a\in D$，若存在 $\delta>0$，使得 $(a-\delta,a+\delta)\subset D$，则称 a 为 D 的内部的点. 开区间内的点，都是它内部的点，而闭区间内的点，除了两个端点外，其余的点都是它内部的点. 两个端点称边界点.

为叙述方便，我们称区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，称集合 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 去心邻域.

第二节　函数的概念

一、变量与函数

在生产实践和科学研究中，会碰到各种各样的量. 在某个问题的研究过程中，保持不变的量称为常量，可以取不同数值的量称为变量. 时间是我们最熟悉的变量，很多变量的变化都依赖于时间. 例如，在自由落体问题中，物体下落的距离 s 与下落的时间 t 都是变量，它们之间的依赖关系

为 $s=\frac{1}{2}gt^2$，其中 g 是重力加速度，它是常量；在复利问题中，设本金为 A_0，计息期(如 1 年)的利率为 r，t 为计息期数，第 t 个计息期满后的本息金为 A_t，它们之间有关系式：$A_t=A_0(1+r)^t$，其中 t 与 A_t 是变量，r 是常量. 一个量是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体情况具体分析.

在高等数学中，通常用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示变量，用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量.

函数就是刻画变量之间在运动变化过程中相依关系的数学模型. 我们先看下面的例子.

【例 1】 心理学研究表明，小学生对新概念的接受能力 G(即学习兴趣、注意力、理解力的某种综合量度)随时间 t 的变化规律为

$$G(t)=-0.1t^2+2.6t+43 \qquad t\in[0,30].$$

接受能力曲线如图 1.3 所示. 通过对函数表达式的分析和曲线的几何形态的研究，我们可以了解小学生的接受能力何时上升、何时达到顶峰、何时下降，以便采取更科学的方法对小学生实施教育.

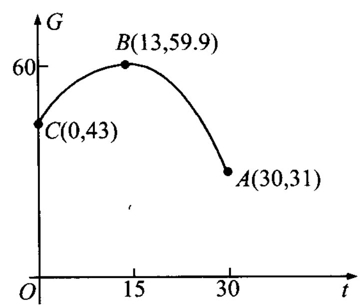


图 1.3

在微积分中，我们感兴趣的是取值范围是实数集 **R** 的子集的两个变量之间的依存关系. 这类关系称为实函数.

定义 1.1 **设 D 是 R 的一个非空子集，f 是一个确定的对应关系. 如果对 D 中的每一个元素 x，通过 f 都有 R 内唯一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个对应关系 f 就叫做从 D 到 R 的函数关系，简称函数. 记为**

$$f:D\to R \quad \text{或} \quad y=f(x),x\in D.$$

如果对确定的 $x_0\in D$，通过 f，有唯一的 $y_0\in \mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 于点 x_0 有定义. y_0 叫做 f 在 x_0 的值，记 $y_0=f(x_0)$. 我们称 D 为函数 f 的定义域，而 f 的全体函数值的集合 $W=\{f(x)\mid x\in D\}$ 叫做 f 的值域.

今后我们习惯用 $y=f(x),x\in D$ 来表示函数，其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量.

在例 1 中，对应关系 G 为

$$G(\quad)=-0.1(\quad)^2+2.6(\quad)+43,$$

即自变量的平方乘以 -0.1，加上自变量与 2.6 的积，再加上 43 所得的

和，其定义域为[0,30]. 显然这样计算所得到的函数值只与自变量的大小有关，而与自变量用什么记号无关，因此例 1 中的函数我们也可以用 $y=-0.1x^2+2.6x+43, x\in[0,30]$来表示.

通过上面的讨论可以看出，一个函数由对应关系 f 与定义域 D 所确定，而与其自变量与因变量所选取的符号没有关系.

由中学内容知，函数的表示法通常有 3 种：解析法、图像法、表格法.

一般，当 $f(x)$用 x 的解析式给出时，如果没有特别说明，函数的定义域就是使 $f(x)$有意义的全体 x 的集合，通常称它为自然定义域. 例如，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域是$(-\infty,+\infty)$，其中 g 是重力加速度. 函数的自然定义域通常情况下不写出来，而在实际问题中，定义域还应根据实际意义来确定. 例如，真空中，一物体在重力的作用下，从高度为 h 米处自由下落，则下落的路程 s 与下落时间 t 之间的函数关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，它的定义域是$\left[0,\sqrt{\frac{2h}{g}}\right]$.

在微积分中，我们还常会遇到下面这种表达函数关系的方式.

【例 2】 某运输公司规定每吨货物运费如下：在 a 千米以内，每千米 k 元；超过 a 千米的部分为每千米 $0.8k$ 元. 求每吨货物运费 y 与运输里程 s 之间的函数关系.

解 由题意得 $y=\begin{cases} ks, & 0\leqslant s\leqslant a, \\ ka+0.8k(s-a), & a<s, \end{cases}$

这里运费是里程的函数，定义域为$[0,+\infty)$.

这个函数在 $0\leqslant s\leqslant a$ 时，解析表达式为 $y=ks$；在 $a<s$ 时，解析表达式为 $y=ka+0.8k(s-a)$. 这种按自变量的不同取值分段给出对应关系的函数，称为分段函数. 在例 2 中，点 $s=a$ 处两侧函数的解析表达式不同，我们称这种点为分段函数的联接点.

从一些已知函数出发，我们可以构造新的函数. 下面介绍一些常用的构造方法.

(1) 设函数 $y=f(x), x\in D$，值域为 W，如果对每一个 $y_0\in W$，都有唯一确定的 $x_0\in D$ 满足 $y_0=f(x_0)$与之对应，则记这个对应关系为 f^{-1}，函数记为 $x=f^{-1}(y), y\in W$，并称它为函数 $y=f(x), x\in D$ 的反函数.

习惯上我们常用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示因变量，而前面已

经讲过函数与其表示自变量和因变量的符号无关，因此$y=f(x),x\in D$的反函数常写成$y=f^{-1}(x),x\in W$.

例如，$y=a^x$与$y=\log_a x$互为反函数，$y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$与$y=\arcsin x$互为反函数等等.

（2）通过加、减、乘、除运算，可以获得新函数. 例如，有$n+1$个幂函数$f_k(x)=a_k x^k,k=0,1,\cdots,n$，定义$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^k$，称新函数$P_n(x)$为$n$次多项式函数.

（3）对于一些函数，例如$y=\lg(x^2+1)$，我们可以把它看成是将$u=x^2+1$代入到$y=\lg u$中得到的. 像这样在一定的条件下，将一个函数“代入”到另一个函数中的运算称为函数的复合运算，所得到的函数称为复合函数. 一般有下面的定义.

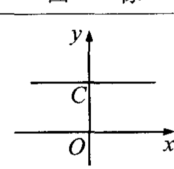
定义 1.2 **设**$y=f(u),u\in D_1$**及**$u=g(x),x\in D_2,W=\{g(x)|x\in D_2\}$. **如果**$W\cap D_1\neq\varnothing$，**则称**$y=f(g(x))$**为**$y=f(u),u\in D_1$**与**$u=g(x),x\in D_2$**的复合函数，并称**$u$**为中间变量.**

复合函数可以由多个函数复合而成. 例如，函数$y=\sqrt{\lg(x^2+1)}$是由函数$y=\sqrt{u},u=\lg v,v=x^2+1$复合而成的，这里有两个中间变量$u$和$v$.

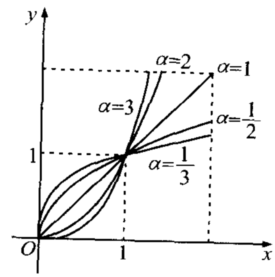
把一个复合函数分成不同层次的若干个函数，叫做复合函数的分解. 适当分解复合函数，在微积分中有着十分重要的意义. 分解的步骤是从外向里，例如复合函数$y=\log_2\sin\frac{x}{2}$，可分解为$y=\log_2 u,u=\sin v,v=\frac{x}{2}$.

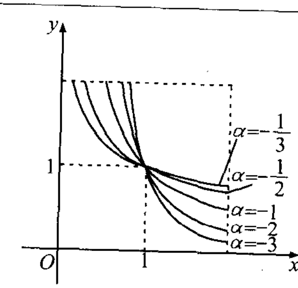
二、初等函数

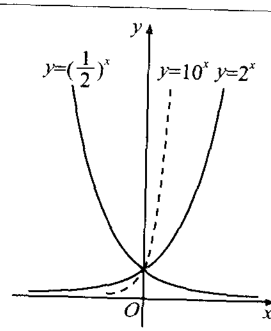
我们所研究的各种函数，特别是一些常见的函数都是由几种最简单的函数构造而成的，这些最简单的函数就是在中学数学中学过的基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 为了今后学习和查阅方便，现将它们的表达式、图像和简单性质列表如下.

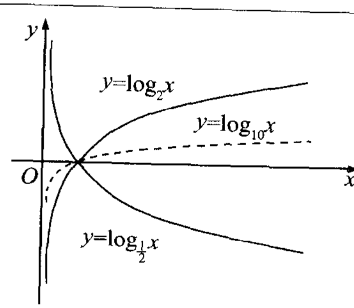
名称	表达式	图　像	简单性质
常数函数	$y=C$		定义域为$(-\infty,+\infty)$

续表

<table>
<tr><th>名称</th><th>表达式</th><th>图像</th><th>简单性质</th></tr>
<tr><td>幂函数</td><td>$y=x^{\alpha}$</td><td>




</td><td>定义域视 α 不同而异，但公共部分为 $(0,+\infty)$，其性质在 $\alpha>0$ 时与 $\alpha<0$ 时有本质不同，前者的图形叫做 α 次抛物线，后者的图形叫做 β 次双曲线 $(\beta=-\alpha)$</td></tr>
<tr><td>指数函数</td><td>$y=a^{x}$
$(a>0,a\neq1)$</td><td>


</td><td>定义域为 $(-\infty,+\infty)$，单调函数，图形在 x 轴的上方，过点 $(0,1)$</td></tr>
<tr><td>对数函数</td><td>$y=\log_a x$
$(a>0,a\neq1)$</td><td>


</td><td>定义域为 $(0,+\infty)$，单调函数，图形在 y 轴的右方，过点 $(1,0)$</td></tr>
</table>