



高等学校数学及其应用系列丛书

数学建模 精解精练

——沈继红◎主编



哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

0141.4/13=2A

2007

数学建模精解精练

主编 沈继红

主审 施久玉

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学建模精解精练/沈继红主编,一哈尔滨:哈尔滨
工程大学出版社,2007.11

ISBN 978 - 7 - 81133 - 068 - 7

I.数… II.沈… III.数学模型-高等学校-解
题 VI.022-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 161941 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451 - 82519328
传 真 0451 - 82519699
经 销 新华书店
印 刷 肇东粮食印刷厂
开 本 850mm × 1 168mm 1/32
印 张 6.3125
字 数 160 千字
版 次 2007 年 11 月第 1 版
印 次 2007 年 11 月第 1 次印刷
定 价 15.00 元

<http://press.hrbeu.edu.cn>

E-mail: heupress@hrbeu.edu.cn

前 言

本书是与《数学建模》(哈尔滨工程大学出版社出版,沈继红等编著)一书配套的习题指导书。本书为初学数学建模的读者提供了学习参考。

考虑到某些题目的篇幅及容量,个别题目作了提示性或构思性的部分解答。由于《数学建模》一书中综合实习题部分都是选自生产实践的实际问题,完整解答篇幅过大,因此,本书只选择其中部分题目给出参考性解答。

本书由沈继红教授主编,施久玉教授主审,罗跃生、高振滨、张晓威及韩明莲参与了编写工作。

由于数学建模课程的特点,其习题多与客观实际接轨。尽管编者参考了大量的文献,但是本书提供的方法很难说一定正确或标准;不完善甚至错误的地方在所难免,请读者谅解,同时真诚地希望读者提供更加符合实际的解答。

编 者

2007年10月

目 录

习题 1 解答	1
习题 2 解答	5
习题 3 解答	15
习题 4 解答	37
习题 5 解答	54
习题 6 解答	64
习题 7 解答	73
习题 8 解答	89
习题 9 解答	98
习题 10(综合练习部分题)解答	126

习题 1 解答

1-1 兄妹二人沿某街分别在离家 3 公里与 2 公里处同向散步回家,家中的狗一直在二人之间来回奔跑。已知哥哥的速度为 3 公里/小时,妹妹的速度为 2 公里/小时,狗的速度为 5 公里/小时。试分析半小时后,狗在何处?一小时后,狗在何处?

解 (1) 注意到本题并未给出开始散步时狗的具体位置,因此,我们无法确定半个小时后狗在何处。即使假设开始散步时狗在哥哥处,我们仍然无法确定狗在半小时后的位置,因为题目中并没有给出的狗的奔跑方式(比如说狗是从哥哥处沿街道跑到妹妹处,再沿路返回,周而复始)。因此,最后的答案仍是狗可以在任何位置。

(2) 注意到哥哥与妹妹的速度分别为 3 公里/小时及 2 公里/小时,因此一小时后,哥哥与妹妹都已到家,而狗一直在二人之间,因此狗也到家。

题外的话:一定有读者对本题答案不以为然,或有被戏耍的感觉。我们一直有这样的习惯心理,就是给你的题目一定都有明确的答案。在一般的教科书里是这样,但在现实的客观世界里未必如此!很多人一见本题就自然联想到初中的“追击或相遇问题”,题目还没有看清,便开始列方程了。长期的灌输式教育已使我们在某种程度上逐渐丧失了思考的习惯,而逐渐进入某种框定的思维定式。归根到底,我们过分相信我们的理论,过分相信我们所学的知识,又过分依赖我们手中的笔,而惟独没有启用的是我们头脑中或许还尚存的创造性思维!仅以此题为戒。

1-2 请查阅开卜勒(kepler)三定律,并利用这三个定律及牛顿第二定律证明万有引力定律。

证明:开卜勒三定律如下:

- (1) 行星轨道是一个椭圆, 太阳位于此椭圆的一个焦点上。
- (2) 行星在单位时间内扫过的面积不变。
- (3) 行星运行周期的平方正比于椭圆长轴的三次方, 比例系数不随行星而改变。极坐标系及变动的直角坐标系如图 1.1 所示。由条件(2), 行星在单位时间内扫过的面积为

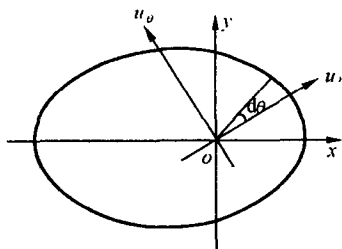


图 1.1

$$A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$

引入单位向量

$$u_r = \cos\theta i + \sin\theta j$$

$$u_\theta = -\sin\theta i + \cos\theta j$$

则 r 又可表示为

$$r = r u_r = r \cos\theta i + r \sin\theta j \quad (1.1)$$

利用

$$\begin{cases} \dot{u}_r = \dot{\theta} u_\theta \\ \dot{u}_\theta = -\dot{\theta} u_r \end{cases}$$

可得出

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{r} u_r + r \dot{\theta} u_\theta \\ \ddot{r} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) u_r \end{aligned} \quad (1.2)$$

(1.2) 中 u_θ 方向的分量为零, 这说明 $\ddot{r} \parallel r$ 。

现将椭圆方程改写成

$$\begin{cases} r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \\ p = a(1 - e^2), b^2 = a^2(1 - e^2) \end{cases} \quad (1.3)$$

其中 a, b 为椭圆的两个半轴, e 为离心率。

对(1.3)中的 r 关于 t 求导两次:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \dot{\theta} = \left(\frac{p}{1 + e \cos \theta} \right)^2 \dot{\theta} \frac{e}{p} \sin \theta \\ &= \frac{2Ae}{p} \sin \theta \\ \ddot{r} &= \frac{2Ae}{p} \dot{\theta} \cos \theta = 2Ae \left(\frac{1 + e \cos \theta}{p} \right) - \frac{2Ae}{p} \\ &= \frac{2A\dot{\theta}}{pr} (p - r) \end{aligned}$$

注意到 $\dot{\theta} = \frac{2A}{r^2}$, 故

$$\ddot{r} = \frac{(2A)^2(p - r)}{pr^3} \quad (1.4)$$

根据(1.4)可计算得

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{(2A)^2(p - r)}{pr^3} - r \frac{(2A)^2}{r^4} = -\frac{(2A)^2}{pr^2} \quad (1.5)$$

将(1.5)代入(1.2), 并根据牛顿第二定律立即可知, 作用力与 r^2 成反比。进而可以证明, 比例系数 $(2A)^2/p$ 是一个绝对常数, 即与哪一颗行星无关。事实上, 记行星运行周期为 T , 则 $TA = ab\pi$ 。由(1.3), $T^2 = Ka^3$, K 为绝对常数, 故

$$\frac{A^2}{p} = \frac{(ab\pi)^2}{T^2 p} = \frac{(ab\pi)^2}{Ka^3 p} = \frac{\pi^2}{K}$$

此即需证。根据以上分析可知, 作用于任一行星上的力, 方向在太阳与行星的连线上, 指向太阳; 其大小与两者之间距离的平方成反比, 比例系数 $(2A^2)/p$ 是一个绝对常数, 这就是万有引力定律。

1-3 有一条逻辑定理是: 随便一句假话都能推出任何一句

话。结果真的有人要英国大哲学家罗素证明：从“ $2 + 2 = 5$ ”推出“罗素是教皇”。你能否帮助罗素解决这个问题。

解 从 $2 + 2 = 5$ 可以推出 $1 = 2$, 这说明两个人就是一个人, 罗素与教皇是两个人, 因此他俩是一个人。

题外的话: 本题似乎与数学建模没什么联系, 我们想通过这样一个题目强调逻辑的严谨性与思维的开放性的结合。要学会推导的严密性, 同时要发挥想像力, 使思维插上翱翔的翅膀。

习题 2 解答

2-1 甲乙两人约定中午 12:00 至 13:00 在市中心某地见面,并事先约定先到者在那等待 10 分钟,若另一个 10 分钟内没有到达,先到者将离去。用图解法计算,甲乙两人见面的可能性有多大。

解 设甲、乙两人分别在 12 点 x 分及 y 分等可能到达约定地点,显然, $0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60$ 。

若两个相遇则有 $|x - y| \leq 10$ 。这是一个几何概率问题,其中,样本空间为

$$A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\}$$

它构成了平面直角坐标系中的正方形,见图 2.1。相遇空间为

$$G = \{(x, y) | |x - y| \leq 10\}$$

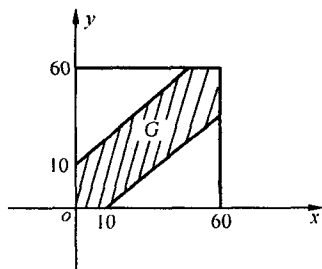


图 2.1

其图形见图 2.1 阴影处。用 S_A, S_G 分别表示区域 A 与 G 的面积。从而相遇的概率为

$$P = \frac{S_G}{S_A} = \frac{60 \times 60 - 2 \times \frac{1}{2} \times 50^2}{60 \times 60} \approx 0.306$$

2-2 设有 N 个人参加某一宴会, 已知没有人认识所有的人, 证明: 至少存在两人, 他们认识的人一样多。

证明 设第 i 个人认识的人数为 $S(i)$, 则 $S(i) \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 。我们利用反证法证明本题。假设没有 2 个人认识的人数一样多, 则 $S(1), S(2), \dots, S(N)$ 互不相等, 则 $S(i) (i = 1, 2, \dots, N)$ 将取遍集合 $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ 中的每一个值, 即至少存在某两人 k_1, k_2 使 $S(k_1) = N-1, S(k_2) = 0$ 。而对第 k_1 人, 由于 $S(k_1) = N-1$, 故他必然认识第 k_2 人, 故 $S(k_2)$ 至少为 1, 与 $S(k_2) = 0$ 矛盾, 得证。

2-3 某人第一天上午 8:00 由 A 点出发, 于下午 6:00 到达 B 处。第二天上午 8:00 他又从 B 处出发按原路返回, 并于下午 6:00 回到 A 处。证明: 途中至少存在一点, 此人在两天中同一时间到达该处。

解 我们从 A 点为始点记路程, 设从 A 点到 B 点的路程函数为 $f(t)$, 即 t 时刻走的距离为 $f(t)$; 同样, 设从 B 点到 A 点的路程函数为 $g(t)$ 。由题意有

$$f(8) = 0, f(18) = |AB|, g(8) = |AB|, g(18) = 0.$$

令 $h(t) = f(t) - g(t)$, 则有

$$h(8) = f(8) - g(8) = -|AB| < 0,$$

$$h(18) = f(18) - g(18) = |AB| > 0$$

又注意 $f(t), g(t)$ 都是时刻 t 的连续函数, 因此 $h(t)$ 也是时刻 t 的连续函数, 由连续函数的介值定理, 一定存在某时刻 t_0 使 $h(t_0) = 0$, 即 $f(t_0) = g(t_0)$ 。

2-4 你要在雨中从一处沿直线走到另一处, 雨速是常数, 方向不变。你是否走得越快, 淋雨量越少呢?

(1) 人体简化为长方柱, 表面积之比为前: 侧: 顶 = $1 : a : b$ 。

选坐标系将人的速度表为 $(v, 0, 0)$, 即沿 x 轴方向行走, $v > 0$, 而设雨速为 (u_x, u_y, u_z) , 行走距离为 L , 写出淋雨量的表示式。

(2) 用图解法说明在什么情况下, 走得越快淋雨量越少, 在什么情况下则不是这样。

解 淋雨量

$$Q(v) = [|u_x - v| + a|u_y| + b|u_z|] \cdot \frac{L}{v}$$

记 $q = a|u_y| + b|u_z|$, 则

$$Q(v) = \begin{cases} L(\frac{q + u_x}{v} - 1), & v \leq u_x \\ L(\frac{q - u_x}{v} + 1), & v > u_x \end{cases}$$

在 $q \geq u_x$ 和 $q < u_x$ 两种情形下作图 2.2。

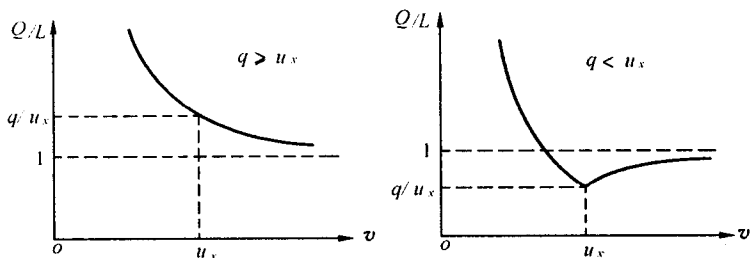


图 2.2

从图 2.2 易看出, 当 $q \geq u_x$ 时, 走的速度越快, 淋雨量越小; 当 $q < u_x$ 时, 如果人的速度不超过雨的水平速度 u_x , 人走的速度越快, 淋雨量越小, 但当人的速度超过雨的水平速度 u_x 时, 人走得越快, 淋雨量越增加。

2-5 建立铅球投掷的模型。不计空气阻力, 在初速度、出手高度一定的条件下, 求最佳出手角度。如果你理解铁饼的运动方

式,试建立铁饼掷远的模型。

解 设初速度为 v , 出手高度为 h , 出手角度为 a , 则在下图所示的坐标系下, 铅球运动方程为

$$\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g, x(0) = 0, y(0) = h,$$

$$\dot{x}(0) = v \cos a, \dot{y}(0) = v \sin a,$$

从中解出 $x(t), y(t)$ 后, 可以求得铅球投掷距离为

$$R = \frac{v^2}{g} \sin a \cos a + \left(\frac{v^2}{g^2} \sin^2 a + \frac{2h}{g} \right)^{1/2} v \cos a$$

令 $\frac{dR}{da} = 0$, 得到最佳出手角度 a^* 及最佳投掷距离 R^* 如下:

$$a^* = \arcsin \frac{v}{\sqrt{2(v^2 + gh)}}, \quad R^* = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gh}$$

2-6 在不允许缺货的存贮模型中, 某公司边生产边出售, 生产速度 K 大于销售速率 r (K, r 均为常数)。时刻 t_0 以后只销售不生产。公司仓库的贮存量 q 呈图 2.3 的周期状。设每次生产开工费为 c_1 , 单位时间每件产品的贮存费为 c_2 , 问周期 T 为多大时才使总费用最少? 讨论 $K \gg r$ 及 $K \approx r$ 的情况。

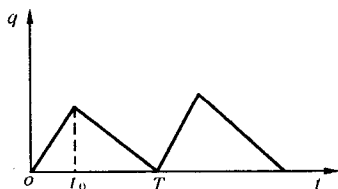


图 2.3

解 单位时间总费用

$$C(T) = \frac{c_1}{T} + \frac{c_2 r (K - r)}{2K} \cdot T$$

令 $\frac{dC(T)}{dT} = 0$, 我们可得到使 $C(T)$ 最小的最佳周期

$$T^* = \sqrt{\frac{2c_1 K}{c_2 r(K-r)}}$$

讨论:

(1) 当 $K \gg r$ 时, $T^* = \sqrt{\frac{2c_1}{c_2 r}}$, 相当于不生产的情况。

(2) 当 $K \approx r$ 时, $T^* \rightarrow \infty$, 因为产量被销售量抵消, 所以无法形成贮存量。

2-7 观察鱼在水中的运动发现, 它不是水平地游动, 而是突发性地、锯齿状地向上游动和向下滑动。可以认为这是在长期进化过程中, 鱼类选择的消耗能量最小的运动方式。

(1) 鱼类是以常数 v 运动, 鱼在水中的净重是 W , 向下滑动的阻力是 W 在运动方向的分力; 向上游动时付出的力是 W 在运动方向的分力与游动所受阻力和, 而游动的阻力是滑行阻力的 k 倍; 水平游动的阻力也是滑行阻力的 k 倍。写出这些力。

(2) 如图 2.4, 证明当鱼从 A 点运动到同一水平线上的 B 点时, 沿折线 ACB 运动消耗的能量与沿水平线 AB 运动消耗的能量之比为

$$\frac{k \sin \alpha + \sin \beta}{k \sin(\alpha + \beta)}$$

可认为向下滑行不消耗能量。

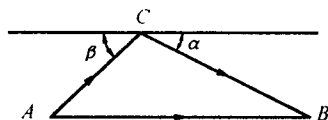


图 2.4

(3) 从经验观察到 $\tan \alpha \approx 0$ 。

2, 针对不同的 k 值 ($k = 1.5, 2, 3$)

根据消耗能量最小的原则, 估计最

佳的 β 角。

解 (1) 由图形分析易看出, 向下滑行的阻力是 $f_1 = W \sin \alpha$, 向上游动的力是 $f_2 = W \sin \beta + k W \sin \alpha$, 水平游动的阻力为 $f_3 = k W \sin \alpha$ 。

(2) 由于沿 ACB 运动的能量 $E_{ACB} = f_2 |AB|$, 沿 AB 运动的能量 $E_{AB} = f_3 |AB|$, 又 $|AC|/|AB| = \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta)$,

从而 E_{ACB} 与 E_{AB} 之比为

$$Q = (k \sin \alpha + \sin \beta) / k \sin(\alpha + \beta)$$

(3) 由 $\frac{\partial Q}{\partial \alpha} = 0$ 和 $\frac{\partial Q}{\partial \beta} = 0$, 可求得最佳角度 α, β 满足

$$\cos(\alpha + \beta) = 1/k \quad (k > 1)$$

由 $\tan \alpha = 0.2$, 得 $\alpha = 11.3^\circ$, 对于 $k = 1.5, 2, 3$ 分别求出 $\beta = 37^\circ, 45^\circ, 59^\circ$ 。

2-8 报童每天订购的报纸, 每卖出一份赢利 a 元, 如果卖不出去并将报纸退回发行单位, 将赔本 b 元。每天买报人数不定, 报童订报份数如超过实际需要, 就要受到供过于求的损失; 反之, 要受到供不应求的损失。设 $P(m)$ 是售出 m 份报纸的概率, 试确定合理的订报份数, 使报童的期望损失最小。

解 设报童每天订购 Q 份报纸, 则其收益函数为

$$y(m) = \begin{cases} am - (Q - m)b, & m \leq Q \\ am & m > Q \end{cases}$$

利润的期望为

$$E[y(m)] = \sum_{m=0}^Q [(a+b)m - bQ]P(m) + \sum_{m=Q+1}^{+\infty} aQP(m)$$

比较各个 m 的 $E[y(m)]$ 值, 使其最大者即为所求。若 m 的取值过多, 可将 $E[y(m)]$ 当成 m 的连续函数或借鉴连续函数求极值的办法令 $\frac{dE[y(m)]}{dm} = 0$ 。

2-9 水库在 t 时刻的水位线高度为 $x(t)$, 水库蓄水速度为 $y(t)$, 且 $0 \leq y(t) \leq y_0$, y_0 为某个常数。水库排水发电, 排水速度为 m , 因此水位高度的变化为

$$\frac{dx}{dt} = y(t) - m \quad (2.2)$$

又已知 $x(0) = x_1, x(T) = R$, 且水库的效益函数为

$$U(x, y) = a[y - Y]^2 + b[x - X]^2$$

其中 X 为合理水位, Y 为合理的蓄水速度, 那么, 在时间 $[0, T]$

内,应如何控制 $y(t)$,使水库的效益达到最大?

解 由题目的意思,我们理解,水库的效益最大应是指蓄水速度与水位都达到合理标准。换句话说,由 $U(x, y)$ 的表达式,水位的效益最大应是效益函数 $U(x, y)$ 达到最小。据此,我们对 $U(x, y)$ 求导,得到

$$2a(y - Y)(y' - Y') + 2b(x - X)(x' - X') = 0 \quad (2.3)$$

再将(2.2)式从 0 到 t 积分,得到

$$x(t) - x(0) = \int_0^t y(t)dt - mt \quad (2.4)$$

再由题给条件,得到

$$\int_0^T y(t)dt = mT + x_1 - R \quad (2.5)$$

又将(2.4)式代到(2.3)式,得到

$$\begin{aligned} 2a(y - Y)(y' - Y') = \\ - 2b\left(\int_0^t y(t)dt - mt + x_1 - X\right)(y(t) - m - X') \end{aligned} \quad (2.6)$$

(2.5)式及(2.6)式联合构成了对 $y(t)$ 的控制。

2-10 遗传病属于常染色体遗传模型。记正常基因为 A ,不正常基因为 a ,其后代 AA, Aa 及 aa 分别表示正常人、隐性患者和显性患者。为防止出现显性患者,我们要求正常人或隐性患者必须与正常人结合。试建立此遗传模型,并讨论若干代之后,正常人与隐性患者的分布趋势。

解 假设 $a_n, b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ 分别表示第 n 代中,基因型为 AA, Aa 的后代占后代总数的百分比。令 $x^{(n)} = (a_n, b_n)^T$ 为第 n 代的基因分布, $x^{(0)} = (a_0, b_0)^T$ 表示人的基因型的初始分布,显然有

$$a_0 + b_0 = 1 \quad (2.7)$$

我们现在考虑第 n 代与第 $n-1$ 代之间的遗传关系。注意到,第 $n-1$ 代的 AA 型与 AA 型结合,后代全部为 AA 型;第 $n-1$ 代的 Aa

型与 AA 型结合,后代是 AA 型的可能性为 50%。因此,我们有

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}/2 \quad (2.8)$$

同理我们可得到

$$b_n = b_{n-1}/2 \quad (2.9)$$

注意到将(2.8)式与(2.9)式相加,得到

$$a_n + b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

递推上式即得到

$$a_n + b_n = a_0 + b_0 = 1$$

我们现在求解(2.8)与(2.9)式联立的方程组。令

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则(2.8)与(2.9)联立的方程组可写成

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

递推上式得到

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = \dots = M^n x^{(0)} \quad (2.11)$$

(2.11)式即为第 n 代基因分布与初始分布的关系。下面我们计算 M^n 。利用线性代数知识,我们易得到

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix}$$

将上式代入(2.11)式,得

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - (\frac{1}{2})^n \\ 0 & (\frac{1}{2})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = (a_0 + b_0 - b_0/2^n, b_0/2^n)^T$$

最终有