21世纪高等院校教材

微积分

周 勇 主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪高等院校教材·

微 积 分

周 勇 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程. 每章均配备典型例题分析及丰富的习题，书末附有习题答案.

本书适合于高等院校经济类、管理类各专业本科生使用，也可供科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

微积分/周勇主编.—北京：科学出版社，2007

（21 世纪高等院校教材）

ISBN 978-7-03-019591-3

I.微… II.周… III.微积分－高等学校－教材 IV.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 123670 号

责任编辑：冯贵层／责任校对：董 丽

责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 7 月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2007 年 7 月第一次印刷 印张：20 3/4

印数：1—6 000 字数：388 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《微积分》编者名单

主　编　周　勇

副主编　李成福　梁开福

编　者　（以姓氏笔画为序）

文立平　朱　砾　李成福

周　勇　骆先南　梁开福

谢清明

序

经济学在历史上一开始是具有人文色彩的.语言描述成为其研究和处理问题的主要工具,推理则是叙述性的.然而,随着经济的发展以及数学向各学科领域的渗透,经济学家开始采用归纳推理的方法,广泛利用数学工具,使其迅速向数理经济学转化,以适应经济社会发展的需要.特别是随着计算机的迅速发展和数学的广泛应用,数学在经济、管理学科中占有重要的地位,这已经成为一个共识.因此,如何提高经济、管理类专业学生的数学素质和应用能力,已成为高校数学教学的一项重要任务.为完成这一目标,必须要有一套合适的教科书.由湘潭大学数学与计算科学学院周勇教授等主编的系列教材《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》就是针对这类专业的教学需要而编写的.这套教材的出版,为经济、管理类各专业的学生提供丰富的知识载体,以满足日益拓广的专业需要.

本书着眼于提高学生数学素质和专业发展的需要,保留了传统数学中的经典内容,增加了与经济、管理密切相关的数学理论与方法,并注重它们在该领域中的应用,旨在培养应用能力,增强创新意识;在具体编排上,体系和谐,结构严谨;在叙述方法上,重在启发、探索和揭示过程,并考虑到文科学生的思维方式和数学基础,重要概念从它们的实际背景出发逐步延伸,尽量避开数学本身的抽象;在理论推导上,科学、适度,体现了直观平易、简便适用的原则;例题和习题的选取与配置,能起到对理论的诠释和方法的示例作用,并能达到良好的练习效果.总之,本书具有鲜明的专业特色,凝聚了作者多年的教学和教材编写的经验体会,是近年来在教材建设上的又一成果.本书不仅可作为经济、管理类本科各专业的教学用书,而且对于广大经济、管理和其他科技工作者以及报考经济、管理类专业研究生的考生也是一套有实用价值的参考书.

一套教材的成熟,需要时间去雕琢,相信在同行专家的支持下,该系列教材一定会进一步趋于完善.

周维楚

2007年7月

前　　言

微积分在经济学、管理科学中有着十分广泛的应用，它已成为经济类、管理类各专业一门重要的基础理论课.

本书是我们在多年教学实践的基础上，针对高等院校经济类、管理类各专业培养高层次、复合型、应用型人才的要求而编写的. 内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理及导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，无穷级数，微分方程与差分方程. 为适应经济类、管理类专业教学的需要，我们加进了微积分处理经济问题的一些内容，包括一些例题与习题，这有助于提高学生用数学思想和方法分析问题和解决问题的能力，增强创新意识.

在本书的编写过程中，湘潭大学数学与计算科学学院、湘潭大学教务处给予了大力支持，在此深表感谢！

限于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，望同行专家和广大读者批评指正.

编　者

2007 年 7 月 2 日

目　　录

第一章　函数、极限与连续

变量是微积分研究的对象，而极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章首先复习函数的有关概念，然后介绍极限及函数的连续性.

第一节　函　　数

一、函数的概念

1. 变量

在考察自然现象或技术过程时，所遇到的各种量往往表现出不同的性态，如有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的值，这种量称为常量；有的量在过程中则有变化，也就是可以取不同的值，这种量称为变量. 例如，在物体作匀速直线运动的过程中，物体运动的速度 v 是常量；物体运动的时间 t 及所经过的路程 s 都是变量.

在一个过程中，一个变量取值的范围往往受到某种限制，这种取值的范围称为变量的变化范围或取值范围. 例如，调查某城市历年来的人口结构，则人口数 N 是一个变量，它的取值范围是由一些正整数构成的集合. 广泛一类变量的取值范围是一个(或若干个)区间. 在某些问题中，变量可以取任何数值.

2. 函数

在同一现象或过程中，往往有几个变量出现，并且有些变量取值时是相互制约、相互联系的，它们之间有确定的数量关系. 最简单的是两个变量相互关联的情形.

例 1　在自由落体运动中，物体下落的时间 t 与物体下落的距离 s 都是变量. 如果物体开始下落的时刻为 $t=0$，则下落过程中 s 与 t 之间有如下关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 为重力加速度，是常量. 如果物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一个数值时，就可以由上式确定距离 s 的相应数值.

定义 1.1　设有两个变量 x 与 y，如果当变量 x 在其取值范围内任意取定一个数值时，变量 y 按照某一确定的法则总有确定的数值和它对应，就称变量 y 是

变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$，并且称 x 为自变量，y 为因变量. 自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，而因变量 y 的取值范围称为函数的值域.

有一个特殊情况：当自变量 x 在其取值范围内任意取值时，y 总取某个固定的数值 C，在此情况下有时我们也将 y 看成是 x 的函数，称为常值函数.

函数 $y=f(x)$ 中的字母 f 既表明"y 是 x 的函数"，也代表 y 与 x 之间的对应法则. 表示对应法则的字母是可以任意采用的，当在同一问题中讨论了几个函数时，则应选用不同的字母来区别不同的函数的对应法则.

从函数的定义可知，函数概念包含了三个"要素"：函数的定义域、函数的值域和函数关系（即因变量与自变量之间取值的对应法则）. 下面对它们作一些说明.

在函数的定义中，并没有限定用什么方法表达函数关系. 常见的表达函数关系的方法有三种：

（1）公式法　用数学式子表示因变量与自变量之间的函数关系的方法称为公式法，也称为解析法. 如例 1 中的 $s=\frac{1}{2}gt^2$，就是用公式法表示了因变量 s 与自变量 t 之间的函数关系.

（2）表格法　将自变量的一系列值与对应的函数值列成表格来表示函数关系的方法称为表格法，如平方表、三角函数表、对数表等等就是用表格法表示函数关系.

（3）图示法　在坐标系中用点的轨迹的图形表示函数关系的方法，称为图示法. 图形中点的一个坐标表示自变量的值，另一个坐标表示对应的函数值. 如温度自动记录仪描出的温度曲线（见图 1-1）就表示了温度 T 与时间 t 的函数关系. 反过来，在坐标系中，用自变量的每一个值和对应的函数值作为坐标的一切点构成的图形，称为该函数的图形.

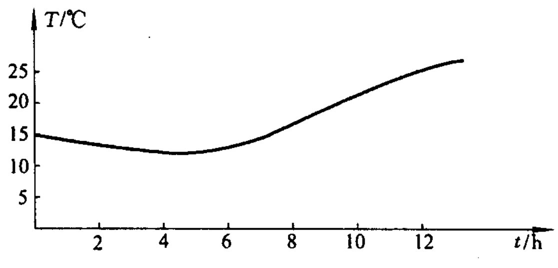

图 1-1

除了以上三种表示法外，函数关系还有其他表示方法. 我们知道，任何一个实数可以写成一个整数与一个正的纯小数或零的和，这个整数称为这个实数的整数部分. 例如，因为 $3.06=3+0.06$，$2=2+0$，$-7\frac{1}{2}=-8+0.5$，所以 3.06，2，$-7\frac{1}{2}$ 的整数部分分别是 3，2，-8. "y 是 x 的整数部分"这个语句就表示了变量 y 与 x

的一种函数关系，通常记为 $y=[x]$ 或 $y=E(x)$，称为 x 的取整函数. 这个函数关系也可分段表示如下：

$$y=[x]=\begin{cases}\cdots\cdots \\ -2, & \text{当} -2\leqslant x<-1, \\ -1, & \text{当} -1\leqslant x<0, \\ 0, & \text{当 } 0\leqslant x<1, \\ 1, & \text{当 } 1\leqslant x<2, \\ 2, & \text{当 } 2\leqslant x<3, \\ \cdots\cdots\end{cases}$$

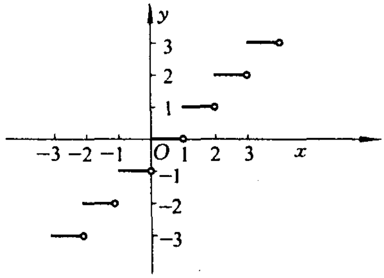

图 1-2

它的图形如图 1-2 所示.

如果一个函数的定义域分成若干部分，在每个部分上用一个式子表达因变量与自变量的对应关系，则这种函数称为分段函数. 上面的 $y=[x]$ 就是一个分段函数. 分段函数虽然在自变量的不同范围内一般有不同的表达式，但它只是一个函数.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 如在例 1 中，自由落体下落时，时间 t 可取 0 到 T 的一切实数值，对物体下落以前与落到地面以后的时间及状况我们并不关心，所以函数的定义域是闭区间 $[0,T]$.

对于用公式法表达的函数，若不考虑它在实际问题中的意义，则它的定义域通常就是使表达函数关系的公式有意义的一切自变量值构成的集合.

设自变量 x 取某个值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 有确定的值和它对应，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 有定义，对应的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

例 2　设有常值函数 $f(x)=2$，则对于它的定义域中的任何一个数值 x_0，有 $f(x_0)=2$.

例 3　已知分段函数（见图 1-3）

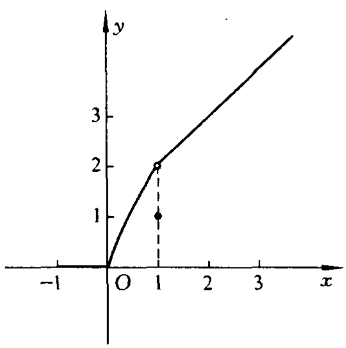

图 1-3

$$y=\begin{cases}0, & \text{当} -1\leqslant x<0, \\ 2\sqrt{x}, & \text{当 } 0\leqslant x<1, \\ 1, & \text{当 } x=1, \\ x+1, & \text{当 } x>1.\end{cases}$$

求 $y|_{x=-0.3}$，$y|_{x=0.5}$，$y|_{x=1}$，$y|_{x=4}$.

解　函数的定义域为 $[-1,+\infty)$，且

$$y|_{x=-0.3}=0,\quad y|_{x=0.5}=2\sqrt{0.5}=\sqrt{2},$$

$$y|_{x=1}=1,\quad y|_{x=4}=4+1=5.$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应

的函数值总只有一个，那么这种函数称为单值函数；否则称为多值函数. 例 1 到例 3 中的函数都是单值函数，下面我们给出一个多值函数的例子.

例 4 在直角坐标系中，圆心在原点、半径为 r 的圆(见图 1-4)的方程是

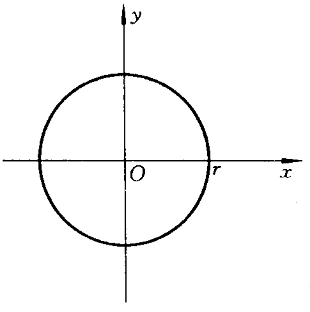

图 1-4

$$x^2+y^2=r^2.$$

变量 x 在 $[-r,r]$ 上任取一个值时，由该方程可确定 y 的一个或两个对应值，因此这个方程在闭区间 $[-r,r]$ 上确定一个以 x 为自变量、y 为因变量的多值函数. 由该方程解得 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$，这是两个单值函数，它们都称为上述方程确定的多值函数的单值支.

用 x、y 的一个二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数称为隐函数；如果因变量用含自变量的数学式子表示时，这种函数称为显函数. 例 1 到例 3 中的函数都是显函数；例 4 中的二元方程确定 y 为 x 的隐函数，而由此方程解出 y，则得显函数 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$. 把一个隐函数化为显函数，称为隐函数显化.

二、函数的几种简单特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 X 上有定义(X 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以是定义域的一部分). 如果存在正数 M，使得对于任意 $x\in X$，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界的；如果这样的正数 M 不存在，则称函数在 X 上是无界的. 函数的无界性也可以这样描述：如果不论取怎样的正数 M，总存在 $x\in X$，使得 $|f(x)|>M$，就称 $f(x)$ 在 X 上无界.

由于不等式 $|f(x)|\leqslant M$ 等价于不等式 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，从图形上看，$y=f(x)$ 在 X 上有界，就是可以找到正数 M，使函数 $y=f(x)$ 对应于 X 的那一部分图形整个地落在一对平行直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间；$y=f(x)$ 在 X 上无界，则不存在这样一对平行线.

例 5 试证函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在它的定义域内是无界的，在区间 $[1,2]$ 上是有界的.

证 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域是不为零的全体实数，不论取怎样的正数 M，可

由不等式$\left|\frac{1}{x}\right|>M$解得$|x|<\frac{1}{M}$. 因此,定义域内的$x$值只要满足$|x|<\frac{1}{M}$,对应的函数值就应满足$f(x)=\left|\frac{1}{x}\right|>M$,所以$f(x)=\frac{1}{x}$在其定义域内无界.

由于x在闭区间$[1,2]$上取值时,有$1\leqslant x\leqslant 2$,从而$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 1$,因此若取$M=1$(或取$M$为不小于1的正数)时,对任意$x\in[1,2]$,都有

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M,$$

因此,函数$f(x)=\frac{1}{x}$在$[1,2]$上有界(见图1-5). 同理,$y=\frac{1}{x}$在任意区间$(a,+\infty)$内也是有界的,其中a是某个正常数.

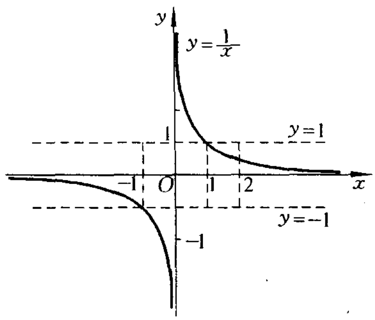

图 1-5

2. 函数的单调性

如果对于函数$f(x)$在区间X上随着x的增大而增大,即对于X上的任意两点x_1与x_2,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间X上是单调增加的,X称为函数$f(x)$的单调增(加)区间;如果函数$f(x)$在区间X上随着x的增大而减小,即对于X上的任意两点x_1与x_2,当$x_1<x_2$时,恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数$f(x)$在区间X上是单调减少的,X称为函数$f(x)$的单调减(少)区间. 单调增加函数在X上的图形随x增大而上升;单调减少函数在X上的图形随x增大而下降. 单调增大和单调减少函数统称为单调函数,函数的单调增区间与单调减区间统称为函数的单调区间.

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域X关于原点对称,如果对于任意$x\in X$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意 $x\in X$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数. 例如，当 n 为奇数时，$f(x)=x^n$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^n=-x^n=-f(x)$；当 n 为偶数时，$f(x)=x^n$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^n=x^n=f(x)$. 又如 $y=\cos x$ 是偶函数，$y=\sin x$ 是奇函数，而 $y=\cos x+\sin x$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

容易证明：偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

如果对于函数 $f(x)$，存在不等于零的常数 l，使得对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$$f(x+l)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期有无穷多个，最小的且为正数的那个周期称为最小正周期. 以后谈到周期函数的周期，通常是指它的最小正周期.

例如，函数 $\sin x$、$\cos x$ 以 2π 为周期；函数 $\tan x$、$\cot x$ 以 π 为周期.

周期函数的图形随 x 的变化而周期性地变化，如果我们以正周期 l（不一定是最小正周期）把定义域分成彼此邻接而长度为 l 的子区间，那么在每个子区间上，函数的图形有相同的形状.

三、反函数

在同一现象或过程中研究两个相关联变量的函数关系时，我们把其中一个变量称为自变量，另一个变量称为因变量或函数. 究竟哪一个变量作为自变量，实际上是由问题的性质决定的.

如在自由落体下落过程中，我们考察下落距离 s 随下落时间 t 变化时，t 是自变量，s 是因变量，得函数关系 $s=\frac{1}{2}gt^2$；如果要了解下落时间 t 由下落距离 s 如何确定时，则 s 是自变量，t 是因变量，且注意到 $t\geqslant 0$，由方程 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 直接解得 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$，这就是函数关系.

一般地，设给定 y 为 x 的函数 $y=f(x)$，如果把 y 当作自变量，x 当作因变量，则把由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

在上述自由落体问题中，$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 是函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 但是，如果我们

不局限于自由落体运动，而是一般地讨论由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 所确定的函数，那么由关系式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 可解得 $t=\pm\sqrt{\frac{2s}{g}}$，即 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数是多值函数，它有两个单值支：当 $t\geqslant0$ 时，$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$；当 $t\leqslant0$ 时，$t=-\sqrt{\frac{2s}{g}}$. 由函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的图形(见图 1-6)可以看出，这个函数在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，可得反函数的单值支 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$；在 $(-\infty,0]$ 上单调减少，可得反函数的单值支 $t=-\sqrt{\frac{2s}{g}}$. 对于多值反函数，我们一般只讨论它的单值支. 如在上面的例中，我们称 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 与 $t=-\sqrt{\frac{2s}{g}}$ 是函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 分别在区间 $[0,+\infty)$ 与 $(-\infty,0]$ 上的反函数.

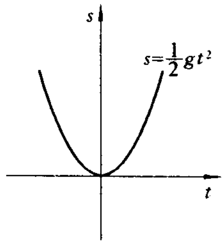

图 1-6

一般地，我们有下面的定理(证明从略)：

定理 1.1　设函数 $y=f(x)$ 在某个区间 X(X 可以是整个定义域或定义域的一部分)上单调增加(或减少)，且在这个区间 X 上相应的函数值域是 Y，那么 $y=f(x)$ 在 X 上必存在反函数 $x=\varphi(y)$，且这个反函数在 Y 上也是单调增加(或减少)的.

我们知道，函数概念仅取决于自变量和因变量的取值范围以及因变量与自变量之间的对应法则，至于自变量与因变量用什么字母来表示，那是无关紧要的. 由于习惯上采用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，因此我们往往把函数 $y=f(x)$ 的反函数 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$，或写成 $y=f^{-1}(x)$. 也就是说，不论是直接函数还是反函数，我们都用同一个字母 x 来表示自变量，而用同一个字母 y 来表示因变量.

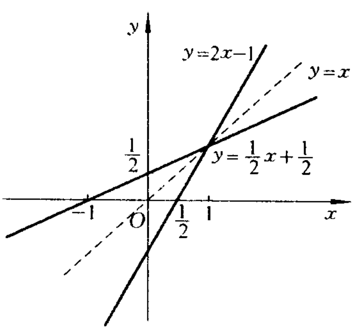

图 1-7

例如，设有函数 $y=2x-1$，由这个关系式解出 x，得到反函数的表达式 $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$. 若仍以 x 表示自变量，y 表示因变量，则反函数写成 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 我们说函数 $y=2x-1$ 的反函数是 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，在这里，反函数与直接函数都用 x 表示自变量，y 表示因变量. 由图 1-7 可以

看到，在同一坐标系中，函数 $y=2x-1$ 与其反函数 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 的图形关于第一、三象限角的平分线 $y=x$ 对称.

一般地，函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在同一直角坐标系中的图形关于直线 $y=x$ 对称(证明从略).

例 6 已知函数 $y=f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，求 $f^{-1}(x)$，并画出 $y=f^{-1}(x)$ 的图形.

解 由 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，得

$$e^x-2y-e^{-x}=0.$$

上式两边同乘以 $e^x(\neq 0)$，得

$$e^{2x}-2ye^x-1=0,$$

注意到 $e^x>0$，由上式解得

$$e^x=y+\sqrt{y^2+1}.$$

对此式两边取对数，得

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}).$$

因此

$$f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

利用我们熟知的指数函数 $y=e^x$ 与 $y=e^{-x}$ 的图形，容易画出 $y=f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的图形，然后根据反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y=f(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称的特点，即可画出 $y=f^{-1}(x)$ 的图形(见图 1-8).

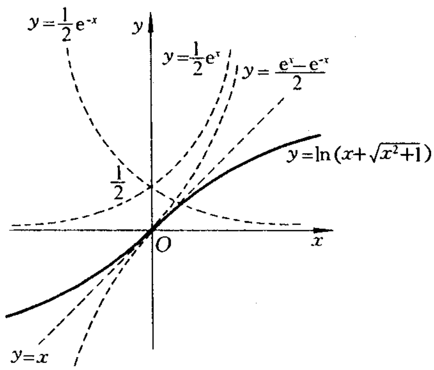

图 1-8

四、复合函数、初等函数

1. 基本初等函数

我们已学过下列函数：