GAODENGXUEXIAO
HANSHOUSHIYONGJIAOCAI

高等学校函授试用教材

数学物理方法

李家荣 主编

华中师范大学出版社

前　言

随着函授等成人高教事业的蓬勃发展，迫切需要能保证教学质量、体现函授等成人教育特点并适合于自学的教材。华中师范大学、华南师范大学、陕西师范大学、广西师范大学、湖南师范大学、湖北大学、河南大学、河南师范大学、陕西教育学院和湖北教育学院十所高等学校，根据原教育部颁发执行的《中学教师进修高等师范本科物理专业教学大纲》，结合各校多年来举办函授和中学教师进修的实践，合作编写了物理专业中１７门课程的函授教材。本书是其中的一种。

数学物理方法是高等师范院校物理专业的一门重要基础课，它一方面为深入学习物理理论作了必要的数学准备，另一方面也为实际中如何运用物理理论创造了条件。本书共分三编十章，第一编讨论复变函数的基本理论；第二编建立常见的数理方程及其定解条件，讨论定解问题的各种基本解法；第三编讨论几种特殊函数。在物理专业，数学物理方法是作为一门工具性的课程而设置的，教学过程中要特别注意联系物理实际而提出问题和解决问题。

在编写过程中，我们力图使教材符合规格，保证教学质量，达到全日制高师本科物理专业的水平。为了使教材体现函授等成人教育的特点，便于自学，在叙述中特别注意图象清晰，层次分明；对于基本方法注意概括出原则步骤，并辅以适当的例题；在每章后面还给出了小结、思考题和习题，书末并附有习题参考答案。为了照顾不同层次学员的需要，有些章节的内容超过了大纲的要求，教学中可以不予讲授。

本书由华中师范大学李家荣教授主编。参加编写的有湖南师

范大学王瑞旦副教授，负责编写第一、二、三章，李家荣教授负责编写第四、六、七、八章，湖北大学朱先烙副教授负责编写第五、九、十章。全书由主编统审定稿。余汉香同志绘制了书中全部插图。

由于我们编写函授教材经验不足，水平有限，书中难免有不少缺点和错误，诚恳希望使用本书的教师和读者批评指正。

《数学物理方法》函授教材编写组

1987年11月

目　录

第一篇　复变函数

第二编　数学物理方程

第三编　特 殊 函 数

第一编 复变函数

第一章 复变函数论基础

复变函数是自变量为复数的函数。复变函数的理论在物理学中有广泛的应用。本章作为复变函数论的基础，首先介绍复数的概念、运算规则及表示法；然后再说明复变函数及其极限、连续与导数等概念；并引进解析函数与它的判别方法、重要性质和应用；最后讨论解析函数的积分理论。

§ 1.1 复 数

（一）复数的定义与运算规则

在微积分和解析几何中，用到的数主要是实数，但是要解决许多自然科学与工程技术问题，实数显然是不够用的。例如，代数方程 $x^2=-1$，在实数范围内就没有解，因为不存在任何一个实数的平方等于-1。为了使这类方程有解，就有必要将“数”的概念加以扩大，引进虚数单位i，规定$i^2=-1$。

满足下述运算规则的形如$z=x+iy$的数，称为复数。其中$i=\sqrt{-1}$($i^2=-1$)称为虚单位。x,y均为实数，分别称作复数z的实部与虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z \tag{1.1}$$

一个复数z，当虚部$y=0$时，则$z=x+io=x$，即z是一个实数，因而全部实数是复数的一个部分，复数可视为实数的推广，而实数$x=0$时，则$z=0+iy$，这时z是一个纯虚数或虚数。例

如，$z=5i$就是一个纯虚数；$z=3$为实数，$z=7+9i$为复数。

一个复数，如果其实部和虚部同时为零，则称这复数等于零。

复数的运算规则是这样规定的：

1. 复数的加、减法

设$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2), \tag{1.2}$$

称作复数z_1与z_2的和。

从上述定义，可直接得出复数加法满足下述规律：

(1)交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$；

(2)结合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$。

从加法规则还可得出复数的差：

$$z_1-z_2=z_1+(-z_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2). \tag{1.3}$$

2. 复数的乘法与除法

设$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$，则

$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2), \tag{1.4}$$

称作复数z_1与z_2的积。

这样定义的复数乘法，可按照代数多项式的乘法规则，将x_1+iy_1与x_2+iy_2相乘，再用-1代替i^2后即得出结果。

例1 已知$z_1=2+3i, z_2=4+7i$，求z_1z_2。

解
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2+3i)(4+7i) \\ &= 8+14i+12i+21i^2 \\ &= (8-21)+(14+12)i \\ &= -13+26i. \end{aligned}$$

从上述乘法定义可得出复数乘法满足下列规则：

(1) 交换律 $z_1z_2=z_2z_1$；

(2) 结合律 $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$；

(3) 分配律 $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$。

下面再介绍复数的除法.

设$z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ $(z_2\neq 0)$，则

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \tag{1.5}$$

例 2 已知$z_1=3+4i$，$z_2=12+5i$，求$\frac{z_1}{z_2}$.

解 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{3+4i}{12+5i}\cdot\frac{12-5i}{12-5i}=\frac{56+33i}{169}=\frac{56}{169}+i\frac{33}{169}$.

两个复数的相等与共轭规定如下：

当$x_1=x_2$，$y_1=y_2$，则称二复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$相等。从复数相等的规定可以看出，一个复数z对应且只对应着一对有序的实数x与y，记作$z(x,y)$。

将复数$z_1=x_1+iy_1$中的i换成$-i$，则得$z_2=x_1-iy_1$，我们称此二复数$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_1-iy_1$是互为共轭的。即z_2为z_1的共轭复数或z_1为z_2的共轭复数。通常用记号$z_1=\bar{z}_2(z_2{}^*)$或$\bar{z}_1(z_1{}^*)=z_2$来表示。例如$\overline{3+2i}=3-2i$。又如

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.$$

在复数除法的运算(1.5)中，就是利用这一性质将分母"实数化"．具体作法是把分子和分母同乘以分母的共轭复数，于是分母化成正实数，再分别用分母除实部和虚部。

(二)复数的几何表示法与三种表示式

复数一般可采用两种几何表示法，即在复数平面或复数球面上表示。

1．复数平面及复数的三种表示式

在这种表示法中，是用平面上的点来表示复数，即建立复数和平面上的点的一一对应关系，这个平面称为复数平面．由于采用的坐标系不同，又常分为笛卡尔直角坐标表示法和极坐标表示法。

在笛卡尔直角坐标表示法中，在坐标平面 xOy 上，采用坐标 (x, y) 的点来表示复数 $z=x+iy$，即复数 z 的实部 x 值用 x 轴（实轴）上的长度来表示，而其虚部 y 值用 y 轴（虚轴）上的长度来表示。如点 $(2,6)$ 就表示 $2+6i$。这样，在 xOy 平面上每一个具有坐标 (x, y) 的点，都与一个复数 $z=x+iy$ 对应。反过来也一样。所以，全部复数与 xOy 平面上的点建立起一一对应的关系，这样的 xOy 平面称为复数平面或复平面.

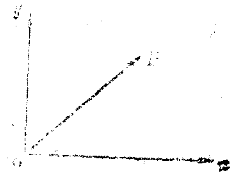

图 1.1

还可以在复平面上，引入从原点出发指向点 $P(x, y)$ 的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示复数 $z=x+iy$（见图1.1）。

不难看出，(1.2)式定义的二复数之和，对应于复数平面上以矢量 z_1, z_2 为邻边作平行四边形的对角线（参看图1.2）. 由此可知：二复数是按照平行四边形法则相加的。

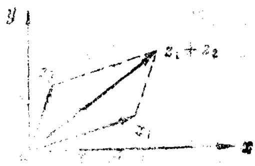

图 1.2

利用 $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，再按照平行四边形法则将矢量 z_1 与 $-z_2$ 相加，就可以得到表示 z_1-z_2 的矢量。

由复数加、减法的几何作图（见图1.2、图1.3），并根据初等几何学中的下述定理："三角形二边之和大于第三边"与"三角形的一边大于其余二边之差"，容易得到下面两个常用的不等式：

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1-z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|.$$

（等号当 $|z_1|$、$|z_2|$ 在同一直线的情况下成立。）

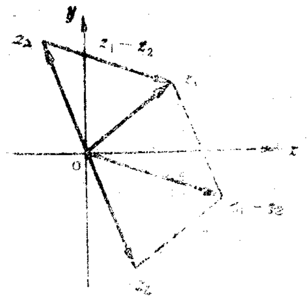

图 1.3

在极坐标表示法中，是采用平面极坐标来表示复平面上的点（见图1.4）．即引入

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta. \tag{1.7}$$

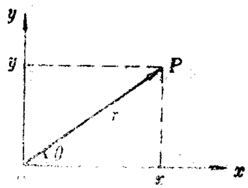

图 1.4

则复数z可以表示为三角函数形式，即

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta), \tag{1.8}$$

其中r为矢量的长度，叫做复数z的模，即

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{1.9}$$

复数$z\neq 0$所对应的矢量$\overrightarrow{OP}$与x轴正向的夹角θ叫做矢量或复数的幅角，记为$\theta\equiv\mathrm{Arg}z$．对于一个复数$z$，它的模$|z|$是唯一确定的，但其幅角$\theta$可取无穷多个值，这些值之间彼此相差$2\pi$的整数倍．设$\theta_0$是其中的一个，则公式

$$\theta\equiv\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

就给出了复数z的全部幅角．

为了使幅角成为单值的，可以将它限制在宽为2π的区间内，即可以取θ_0满足

$$-\pi<\theta_0\leqslant\pi\quad(\text{或}\ 0<\theta_0\leqslant 2\pi).$$

称θ_0为Arg$z$的主值或为z的主幅角．记作$\theta_0=\arg z$．因此，对同一复数z的各幅角之间有如下关系：

$$\theta=\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).\tag{1.10}$$

可以用复数z的实部x与虚部y来表示幅角的主值$\theta_0=\arg z$．显然当$z=(x,y)$在第一象限时，$\arg z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$，其中反正切函数的主值规定在区间$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上；当$z$在第二限象时，由于$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$取负值，即$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{|x|}$，容易看出

$$\arg z=\pi-\operatorname{arctg}\frac{y}{|x|}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$

当z在第三象限时，$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$取正值，即取值在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$之间，故得$\arg z=-\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$；最后当$z$在第四象限时，$\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$取负值$-\operatorname{arctg}\dfrac{|y|}{x}$，容易看出

$$\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

总结上述，于是得到

$$\theta_0=\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & \text{当}z\text{在第一、四象限内；}\\[2ex] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当}z\text{在第二象限内；}\\[2ex] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当}z\text{在第三象限内。}\end{cases}$$

当复数$z=0$时，则其模$|z|=0$，但其幅角Arg z没有确定值，因而不能说$z=0$的幅角等于多少。

利用(1.7)式，可以把任何不等于零的复数表为三角函数形式(1.8)。

例3 将复数$2+2i$表为三角函数式。

解 由(1.9)式知它的模

$$r=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}.$$

又幅角主值

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$$

代入(1.8)式，得

$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

用同样方法，还可求得

$$i=1\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

复数z除了有代数式$z=x+iy$和三角式(1.8)之外，还有另一种形式——指数形式。为了得到复数的指数形式，我们首先定义纯虚数的指数函数为

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, \tag{1.11}$$

这称为欧勒公式。利用它，可以将(1.8)式改写为

$$z=re^{i} \tag{1.12}$$

称(1.12)式为复数的指数形式，例如$2+2i=2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$；$i=e^{i\pi/2}$。

利用复数的三角式与指数式，复数的乘、除法就变得比较简单。

如采用复数的三角表示法，设$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

若采用复数的指数表示法，设$z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，则

$$z_1z_2=r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.13}$$

上式表明，在几何意义上，两个复数的乘积之模等于两者的模的乘积；乘积的幅角等于两者的幅角之和。

同样，对复数除法，若采用复数的三角表示法，则有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

若采用复数的指数表示，则从乘法的定义式(1.4)，求得二个复数的相除。当$z_2\neq 0$时，

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\frac{1}{z_2}=r_1e^{i\theta_1}\left(\frac{1}{r_2}e^{-i\theta_2}\right)=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad (1.14)$$

2. 复数球面

复数不仅可以用平面上的点表示，还可以用球面上的点表示。由下面的讨论可以看出，复数球面〔也称为里曼(Riemann)球面〕上的点也可以与复数构成一一对应的关系。

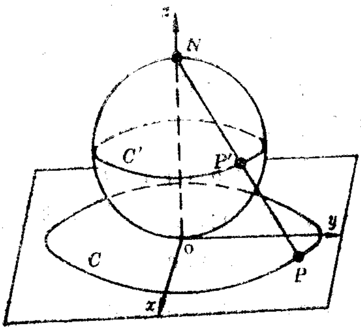

图 1.5

如图1.5所示，过复平面的坐标原点O，作一个球与复平面相切。通过O点作复平面的垂线Oz，它和上述球面相交于N点(N称为极点).用直线段将点N与球面上的任意点P'相连结，其延长线交复平面于一点P；反之，连接极点N与复平面上的任意一点P的直线段与球面也相交于点P'。这样，平面上的所有点与球面上的所有点(除极点N外)就建立了一一对应的关系。P称为

点P'在平面上的球极投影。这个球面就叫做复数球面。由图1.5还可看出，复平面上以原点O为中心的圆C，在复数球面上对应于一个和Oz轴垂直的平面上的圆C'。复平面上圆C的内部和外部分别对应于复数球面上圆C'的下方和上方。当圆C的半径R增大时，圆C'逐渐上移；当R趋于无穷大时，圆C'上移至球顶，无限接近于点N。由此可见，复平面上的无穷远处，对应于复数球面上的一点N。也就是说，N点即表示$z=\infty$。正是这个意义上，我们说复平面上无穷远是一个确定的"点"，称为无穷远点，而且无穷远点只有一个。

不难理解，在复平面上，与$z=0$一样，$z=\infty$的幅角也无确定值。

（三）复数的乘幂与开方

设$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则$n$个相同的$z$相乘，可记作$z^n$，即

$$z^n=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

$$=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) \qquad (1.15)$$

（n为正整数）

故$|z^n|=r^n$。又因$|z|=r$，$|z|^n=r^n$，由此得出

$$|z^n|=|z|^n=r^n.$$

令$r=1$，则由(1.15)式得德·莫弗(De.Moivre)公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \qquad (1.16)$$

现在来看复数的开方。设$z=re^{i\theta}$。注意到幅角的多值性〔见(1.10)式〕，即$re^{i(\theta+2k\pi)}$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$均表示复平面上的同一点，亦即表示同一个复数：

$$z=re^{i\theta}=re^{i(\theta+2k\pi)}.$$

设n为正整数，则

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=[re^{i(\theta+2k\pi)}]^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$ [illegible]

$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,1,2,\cdots,n-1) \tag{1.17}$$

需要指出的是，当$k=0,1,2,\cdots,n-1$时，由上式所得的n个幅角$\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$各不相等，因为它们之间并非相差$2\pi$的整数倍，只是在$k=n,n+1,\cdots$时才分别和$k=0,1$的幅角相等，因此$\sqrt[n]{z}$共有$n$个根。这$n$个根的模相等，但幅角不等。

例4 计算$\sqrt[4]{2+2i}$。

解 要求一个复数的方根，先将此复数用三角函数表示出来，然后再根据复数开方运算法则把方根求出来。

由例3知，$2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$。故由(1.17)式知

$$\sqrt[4]{2+2i}=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{\pi/4+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi/4+2k\pi}{4}\right),$$

$$(k=0,1,2,3).$$

当$k=0$时，$(\sqrt[4]{2+2i})_0=w_0=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{1}{16}\pi+i\sin\frac{1}{16}\pi\right)$；

当$k=1$时，$(\sqrt[4]{2+2i})_1=w_1=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{9}{16}\pi+i\sin\frac{9}{16}\pi\right)$

$$=iw_0;$$

当$k=2$时，$(\sqrt[4]{2+2i})_2=w_2=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{17}{16}\pi+i\sin\frac{17}{16}\pi\right)$

$$=-w_0;$$

当$k=3$时，$(\sqrt[4]{2+2i})_3=w_3=\sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{25}{16}\pi+i\sin\frac{25}{16}\pi\right)$

$$=-iw_0.$$

§2·1 复变函数与解析函数

（一）复变函数的定义与复平面上的区域