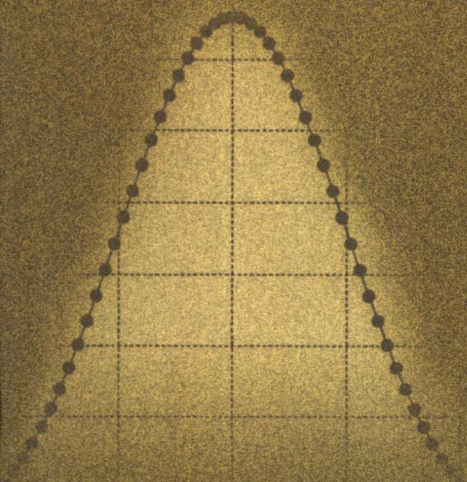


应用数理统计

—— 基本概念与方法

费 宇 编著



科学出版社

www.sciencep.com

应用数理统计

—— 基本概念与方法

周 华 编



清华大学出版社

应用数理统计

——基本概念与方法

费 宇 编著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书介绍了数理统计学的基本概念和方法, 主要内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析、多元正态分布、聚类分析、判别分析、主成分分析和因子分析等。

本书可作为经济学和管理类专业的硕士研究生教材, 也可以作为本科生和统计工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数理统计: 基本概念与方法 / 费宇编著. —北京: 科学出版社, 2007
ISBN 978-7-03-019521-0

I. 应… II. 费… III. 数理统计—研究生—教材 IV. 0212

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第117930号

责任编辑: 吕 虹 赵彦超 杨 然/ 责任校对: 包志虹

责任印制: 赵德静 / 封面设计: 王 浩

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司 印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年8月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2007年8月第一次印刷 印张: 14

印数: 1—3 000 字数: 261 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈明辉〉)

作者简介



费宇，统计学博士，教授，云南大学经济学院应用经济与政策研究所所长，云南省中青年学术技术带头人培养人选。

1968年5月生于云南，1993年毕业于云南大学统计系，获理学硕士学位。2003年获理学博士学位。1998年1月至8月访问荷兰Nijenrode大学，2002年1月至3月访问美国Bentley大学，2002年3月至2003年3月先后访问了英国Keele大学和Manchester大学，2004年获英国皇家学院（The Royal Society）基金资助到英国Manchester大学数学系做博士后研究。

主要从事多元统计模型的诊断分析研究，已发表论文20多篇，2005年7月出版专著《线性混合效应模型的影响分析》（科学出版社），主持完成的科研项目“增长曲线模型影响分析评价”获2003年度云南省自然科学三等奖。先后承担国际合作科研项目1项，省级项目3项。

前 言

数理统计是一门方法论学科,它以概率论为基础,研究如何有效地收集数据,如何对所获得的数据进行科学的整理和分析,从而做出有效的估计、推断和预测,为决策提供依据和建议。

数理统计有丰富的实际背景和广泛的应用,是经济学和管理类本科生和研究生最重要的基础课程之一,数理统计理论有一定的抽象性,涉及的计算复杂,许多计算必须借助计算机软件在计算机上实现。如何才能提高学生的学习兴趣和效率?如何将数理统计的理论和方法形象生动地讲授给学生?如何使学生很好地掌握统计方面的计算技能?基于这样的考虑,我认真总结了十多年的教学实践经验,利用在英国 Manchester 大学做博士后工作的两年时间,认真研究了国外数理统计教学的可借鉴之处,写了这样一本书。

本书是写给非数学专业的研究生使用的应用数理统计读物,力求将数理统计的基本理论、方法、计算技能和计算机应用融为一体,统计计算和分析过程通过统计软件 SPSS 实现,帮助学生实现由知识向能力转化。

本书有以下特点:①结构合理,写作深入浅出,采用实际问题引入数理统计的概念,结合实例讲解理论和方法;②着重介绍数理统计的基本理论和方法,强调其应用性,适当减少一些繁琐的定理证明和公式推导;③结合统计软件讲解统计理论和方法,采用统计软件 SPSS 13.0 作统计分析和计算,使学生在学习数理统计的基本概念、理论和计算方法的基础上掌握运用统计软件进行分析计算的技能。

本书参阅了大量国内外教材和资料,并引用部分例题和习题,在此对有关的作者表示衷心感谢。本书得到了云南大学研究生教材基金资助,并得到云南省中青年学术技术带头人后备人才项目支持。本书的出版得到了科学出版社编辑人员的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

为了方便读者使用,作者将书中例题和习题的有关数据编制成 SPSS 格式的文件,需要这些数据文件的读者可以联系作者(feiyukm@yahoo.com.cn)。

由于作者水平有限,难免有不妥与谬误之处,恳请同行专家及广大读者提出批评和建议。

费 宇

2007 年 4 月于昆明

目 录

第 1 章 数理统计的基本概念	1
§ 1.1 总体、样本和统计量	1
§ 1.1.1 总体和总体分布	1
§ 1.1.2 样本和样本分布	2
§ 1.1.3 统计量	2
§ 1.1.4 χ^2 分布	4
§ 1.1.5 t 分布	5
§ 1.1.6 F 分布	6
§ 1.1.7 正态总体的抽样分布	7
§ 1.2 小结	10
§ 1.2.1 主要概念和公式	10
§ 1.2.2 统计软件简介	11
习题 1	12
第 2 章 参数估计	13
§ 2.1 点估计及其求法	13
§ 2.1.1 矩估计法	13
§ 2.1.2 最大似然法	14
§ 2.2 点估计的评价标准	17
§ 2.2.1 无偏性	17
§ 2.2.2 有效性	19
§ 2.2.3 一致性(相合性)	20
§ 2.3 区间估计	21
§ 2.3.1 区间估计的概念	21
§ 2.3.2 单个正态总体参数的区间估计	21
§ 2.3.3 两个正态总体参数的区间估计	24
§ 2.3.4 非正态总体参数的区间估计	26
§ 2.4 小结	28
§ 2.4.1 主要概念与公式	28
§ 2.4.2 SPSS 使用说明	30
习题 2	33

第 3 章 假设检验	35
§ 3.1 假设检验的基本概念	35
§ 3.1.1 假设检验的一般步骤	36
§ 3.1.2 两类错误	37
§ 3.2 正态总体参数检验	39
§ 3.2.1 单个正态总体均值 μ 的假设检验	39
§ 3.2.2 单个正态总体方差 σ^2 的假设检验: χ^2 检验	46
§ 3.2.3 两个正态总体均值差的检验: t 检验	48
§ 3.2.4 两个正态总体方差比的检验: F 检验	50
§ 3.2.5 成对数据的检验: t 检验	52
§ 3.2.6 检验的 p 值	53
§ 3.3 非正态总体参数的检验	56
§ 3.3.1 非正态总体的大样本方法	56
§ 3.3.2 指数分布参数的检验	57
§ 3.3.3 总体比例 p 的检验	57
§ 3.4 小结	59
§ 3.4.1 主要概念与公式	59
§ 3.4.2 SPSS 使用说明	63
习题 3	68
第 4 章 方差分析	70
§ 4.1 单因素方差分析	70
§ 4.1.1 方差分析的基本概念	70
§ 4.1.2 统计模型	71
§ 4.1.3 统计分析	71
§ 4.1.4 方差分析中的多重比较	74
§ 4.2 双因素方差分析	75
§ 4.2.1 无重复观测双因素方差分析	75
§ 4.2.2 等重复观测双因素方差分析	79
§ 4.3 小结	84
§ 4.3.1 主要概念与公式	84
§ 4.3.2 SPSS 使用说明	86
习题 4	90
第 5 章 回归分析	92
§ 5.1 相关分析	92
§ 5.1.1 相关的概念	92

§ 5.1.2 相关的种类	93
§ 5.1.3 相关关系的度量	94
§ 5.2 一元线性回归	96
§ 5.2.1 回归的含义	96
§ 5.2.2 一元线性回归	97
§ 5.2.3 最小二乘估计	97
§ 5.2.4 回归方程的检验	101
§ 5.2.5 估计与预测	104
§ 5.3 多元线性回归	106
§ 5.3.1 多元线性回归模型	106
§ 5.3.2 多元线性回归方程的检验	107
§ 5.3.3 估计与预测	112
§ 5.4 虚拟变量回归	113
§ 5.5 Logistic 回归	114
§ 5.6 回归分析的扩展	116
§ 5.6.1 异方差	116
§ 5.6.2 多重共线	118
§ 5.7 可化为线性情形的非线性回归	119
§ 5.8 小结	120
§ 5.8.1 主要概念与公式	120
§ 5.8.2 SPSS 使用说明	123
习题 5	133
第 6 章 多元正态分布	137
§ 6.1 多元正态分布	137
§ 6.2 多元正态分布参数的估计和假设检验	138
§ 6.3 小结	142
§ 6.3.1 主要概念与公式	142
§ 6.3.2 SPSS 使用说明	143
习题 6	144
第 7 章 聚类分析	145
§ 7.1 相似性的度量	145
§ 7.2 系统聚类法	146
§ 7.3 小结	149
§ 7.3.1 主要概念与公式	149
§ 7.3.2 SPSS 使用说明	150

习题 7	151
第 8 章 判别分析	153
§ 8.1 距离判别	153
§ 8.2 Fisher 判别	155
§ 8.3 小结	160
§ 8.3.1 主要概念与公式	160
§ 8.3.2 SPSS 使用说明	162
习题 8	166
第 9 章 主成分分析	168
§ 9.1 总体主成分	168
§ 9.2 样本主成分	170
§ 9.3 小结	173
§ 9.3.1 主要概念与公式	173
§ 9.3.2 SPSS 使用说明	175
习题 9	176
第 10 章 因子分析	178
§ 10.1 正交因子模型	178
§ 10.2 因子模型的估计	181
§ 10.3 因子正交旋转	182
§ 10.4 因子得分	183
§ 10.5 小结	186
§ 10.5.1 主要概念与公式	186
§ 10.5.2 SPSS 使用说明	188
习题 10	191
参考文献	192
附录 A 常见数理统计表	193
§ A.1 泊松分布表	193
§ A.2 标准正态分布函数值表	195
§ A.3 正态分布常用上侧分位数表	197
§ A.4 χ^2 分布上侧分位数表	198
§ A.5 t 分布上侧分位数表	200
§ A.6 F 分布上侧分位数表	201
§ A.7 相关系数检验临界值表	210
附录 B 部分习题参考答案	211
后记	214

第 1 章 数理统计的基本概念

老子：“道可道，非常道。”
——《道德经·第一章》

什么是数理统计？一般的教科书上给出的定义为：数理统计是以概率论为基础，研究如何有效地收集、整理和分析数据，并根据数据作出推断的一门方法论科学，是一门数学学科。按照《不列颠百科全书》的定义，（数理）统计是“收集和分析数据的科学和艺术”。这与一般的教科书上的定义略有不同，它认为数理统计既是**科学**，也是**艺术**，因为数理统计方法的应用讲究灵活性，不能教条主义，不能只记住一些公式和方法，碰到具体问题就不加分析地使用。本书强调这一点是想提醒读者注意，数理统计的理论和方法固然重要，但**正确应用数理统计的理论和方法更重要**。所以，本书特色之一就是突出数理统计的应用特点，深入浅出地介绍数理统计的基本理论和方法，使读者在学习之后能够获得解决和处理问题的能力，并能自己解决一些统计问题。如何有效地收集数据是数理统计学的两个重要分支学科——试验设计和抽样调查研究的问题，本书不涉及这一方面，只讨论在已有数据（样本）的前提下如何进行统计分析的问题。

本章介绍数理统计的基本概念、术语和常用统计量的分布，这些内容在以后各章将会涉及，最后介绍 SPSS 等八个常用统计软件的特点。

§1.1 总体、样本和统计量

总体、样本和统计量是数理统计学的三个最基本的概念。

§1.1.1 总体和总体分布

什么是总体？我们研究对象的全体就称为**总体**或**母体**，总体中的元素称为**个体**。如果总体包含的个体的数目是有限的，则称之为**有限总体**；如果总体包含的个体的数目是无限的，就称之为**无限总体**。

例 1.1.1 一批电子元件共 1 万个，研究这批电子元件的平均使用寿命，则该批全部电子元件的使用寿命就构成一个总体，而每个电子元件的使用寿命就是个体。

例 1.1.2 考察一年级新生的身高情况，则全体新生的身高就构成一个总体，而其中每个学生的身高就是个体。

从以上两个例子可以看出,数理统计学中的总体实际是指研究对象的某个(或某几个)数量指标 X 取值的全体,比如,例 1.1.1 中数量指标 X 是使用寿命,而相应的总体是由使用寿命 X 的可能取值的全体构成的集合;例 1.1.2 中数量指标 X 是身高,相应的总体是由身高 X 的可能取值的全体构成的集合.由于对于不同的个体, X 取不同的值,且事先无法准确预言,所以 X 是 **随机变量**,也简单地称 X 是 **总体**,而 X 的分布就称为 **总体分布**.

§1.1.2 样本和样本分布

从总体中取出的部分个体构成的集合称为 **样本**,样本中的个体数目称为 **样本容量**.取得样本的过程称为 **抽样**,常用的抽样方法有 **简单随机抽样**、**分层抽样**、**整群抽样**、**等距抽样** 等.最简单的抽样方法是简单随机抽样,即在取样时,总体中的每个个体入选的机会是相同的.如果没有特别说明,我们讨论的样本都是指简单随机抽样得到的 **简单随机样本**,简称为 **样本**.采用 $(X_1, \dots, X_n)$ 记样本容量为 n 的样本,其中, $X_1, \dots, X_n$ 是相互独立的与总体 X 同分布的 n 个随机变量; $(X_1, \dots, X_n)$ 的观测值称为 **样本值**,记作 $(x_1, \dots, x_n)$;为了简便起见,有时把样本和样本值统称为样本.

对于简单随机样本 $(X_1, \dots, X_n)$,若总体 X 的分布函数为 $F(x)$,则样本 $(X_1, \dots, X_n)$ 的联合分布函数为

$$F(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i).$$

若总体 X 的概率密度函数为 $f(x)$,则样本 $(X_1, \dots, X_n)$ 的联合概率密度函数为

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i).$$

若总体 X 是离散型随机变量,其概率函数为 $p(x) = P(X = x)$,则样本 $(X_1, \dots, X_n)$ 的联合概率函数为

$$p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i).$$

样本分布 ($F(x_1, \dots, x_n)$, $f(x_1, \dots, x_n)$ 或 $p(x_1, \dots, x_n)$) 是统计推断的基础.

§1.1.3 统计量

抽样获得样本后,根据样本信息推断总体时,通常需要对样本信息进行加工整理,针对不同的问题构造适当的样本函数 $T = T(X_1, \dots, X_n)$,这种用来推断总体

的样本函数称为 **统计量**. 统计量是用作统计推断的量, 所以统计量 $T(X_1, \dots, X_n)$ 不能含有未知参数.

设 $(X_1, \dots, X_n)$ 是来自于总体 $X \sim (\mu, \sigma^2)$ 的样本, 常见的统计量有以下几个:

(1) 样本均值.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (1.1.1)$$

称为 **样本均值**, 它是总体期望 μ 的无偏估计.

(2) 样本方差.

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.1.2)$$

称为 **样本方差**, 其算术平方根 S_n 称为 **样本标准差**. 修正样本方差

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (1.1.3)$$

也称为样本方差, 其算术平方根 S 也称为样本标准差. 因为修正样本方差是总体方差 σ^2 的无偏估计, 在实际中, S^2 比 S_n^2 更常用, 今后提到样本方差通常是指 S^2 .

(3) 样本矩.

$$A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \quad (1.1.4)$$

和

$$B_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \quad (1.1.5)$$

分别称为 **样本 k 阶原点矩** 和 **样本 k 阶中心矩**; 样本矩可以用来估计总体矩, 从而获得相应的矩估计. 显然, 按样本矩的定义, 样本均值和样本方差分别是样本一阶原点矩和样本二阶中心矩.

(4) 次序统计量. 将样本 $(X_1, \dots, X_n)$ 按 X_i 由小到大排列得到的有序样本 $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ 称为样本的 **次序统计量**, 其中, $X_{(i)}$ 为样本的第 i 个次序统计量; $X_{(1)}$ 称为样本的最小次序统计量, $X_{(n)}$ 称为样本的最大次序统计量.

(5) 样本中位数和样本极差. 设 $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ 为有序样本, 则 **样本中位数** Me 定义为

$$Me = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时,} \\ \frac{1}{2}[X_{(\frac{n}{2})} + X_{(\frac{n}{2}+1)}], & \text{当 } n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$$

样本中位数是反映样本位置特征的一个量,它可以用于推断总体分布的中位数和总体的对称中心,与样本均值相比,样本中位数不受样本中的异常值的影响,有时比样本均值更有代表性.

样本极差 定义为 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$,它是反映样本值分散程度的量,可以用于推断总体的标准差.

(6) 经验分布函数. 设 $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ 为来自于总体 $X \sim F(x)$ 的有序样本,其观测值为 $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$, 对任意实数 x , 记

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)}, \\ \frac{k}{n}, & x_{(k)} \leq x < x_{(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & x_{(n)} \leq x, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

称 $F_n(x)$ 是 **经验分布函数**, Glivenko 证明了以下结论:

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|\right) = 0\right\} = 1. \quad (1.1.7)$$

根据这个结论,当 n 充分大时,经验分布函数 $F_n(x)$ 是总体分布函数 $F(x)$ 的良好近似,这是经典统计学中一切统计推断都以样本为依据的原因所在.

统计量的概率分布称为 **抽样分布**,经典的统计推断大多是基于正态变量构造的三个著名统计量,它们在统计推断中有广泛的应用,本节就介绍这三个统计量的定义和主要性质.

§1.1.4 χ^2 分布

定义 1.1.1 设 $X_i \sim N(0, 1), i = 1, \dots, n$, 且 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 则 $X = X_1^2 + \dots + X_n^2$ 的分布称为 **自由度为 n 的 χ^2 分布**, 记为 $X \sim \chi^2(n)$. 其密度函数为

$$p(x; n) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}}, \quad x > 0, \quad (1.1.8)$$

其中 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$ 是 Γ 函数.

事实上, $\chi^2(n)$ 分布就是自由度为 $(n/2, 1/2)$ 的 Γ 分布 (记为 $\Gamma(n/2, 1/2)$), 由 Γ 分布的性质, 不难得到 χ^2 分布的性质如下.

性质 1.1.1 若 $X \sim \chi^2(n)$, 则 $E(X) = n, \text{var}(X) = 2n$.

性质 1.1.2(可加性) 若 $X_i \sim \chi^2(n_i), i = 1, \dots, k$, 且 $X_1, \dots, X_k$ 相互独立, 则

$$X_1 + \dots + X_k \sim \chi^2(n_1 + \dots + n_k).$$

性质 1.1.3(渐近正态性) 若 $X \sim \chi^2(n)$, 则对任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X-n}{\sqrt{2n}} \leq x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

即当 n 充分大时, $\frac{X-n}{\sqrt{2n}}$ 近似服从标准正态分布 $N(0,1)$.

图 1.1.1 给出了 $n=4, 6, 10$ 时, χ^2 分布的密度函数的曲线, 容易看出, χ^2 分布是只取非负值的偏态分布.

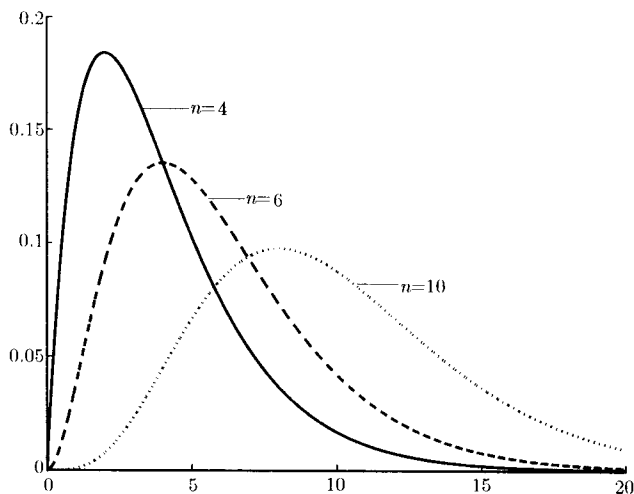


图 1.1.1 $\chi^2(n)$ 分布的密度函数

当随机变量 $X \sim \chi^2(n)$ 时, 对给定 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 称满足 $P(X > \chi_\alpha^2(n)) = \alpha$ 的 $\chi_\alpha^2(n)$ 是自由度为 n 的 χ^2 分布的 α 分位数. 分位数可以从附录 §A.4 中查到, 比如 $n=8, \alpha=0.05$, 查附录 §A.4 可得 $\chi_\alpha^2(8) = 15.507$.

§1.1.5 t 分布

定义 1.1.2 设 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim \chi^2(n)$, 且 X_1 与 X_2 相互独立, 则 $T = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/n}}$ 的分布称为 **自由度为 n 的 t 分布**, 记为 $T \sim t(n)$, 其密度函数为

$$t(x; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \quad (1.1.9)$$

t 分布有如下性质:

性质 1.1.4 若 $X \sim t(n)$, 则 $E(X) = 0$ ($n > 1$), $\text{var}(X) = \frac{n}{n-2}$ ($n > 2$).

性质 1.1.5 t 分布的概率密度函数关于 $x = 0$ 对称, 当 $x \rightarrow \infty$ 时单调下降地趋于 0.

性质 1.1.6 $\lim_{n \rightarrow \infty} t(x; n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, 即当自由度 $n \rightarrow +\infty$ 时, 自由度为 n 的 t 分布收敛于标准正态分布 $N(0, 1)$.

与标准正态分布相比, t 分布的变异程度更大, 有较厚的“尾部”(参见图 1.1.2). t 分布是一类重要分布, 它与标准正态的微小差别是英国统计学家 Gosset 发现的, 1908 年, Gosset 以“Student”为笔名发表论文提出此分布, 故 t 分布也称为学生氏分布.

当随机变量 $X \sim t(n)$ 时, 称满足 $P(X > t_\alpha(n)) = \alpha$ 的 $t_\alpha(n)$ 是自由度为 n 的 t 分布的 α 分位数. 分位数可以从附录 §A.5 中查到, 比如 $n = 5, \alpha = 0.05$, 查附录 §A.5 可得 $t_{0.05}(5) = 2.015$.

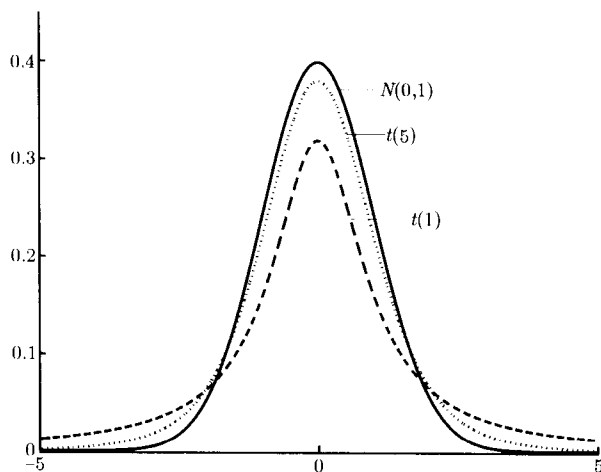


图 1.1.2 $t(n)$ 分布与标准正态 $N(0, 1)$ 的密度函数

§1.1.6 F 分布

定义 1.1.3 设 $X_1 \sim \chi^2(m), X_2 \sim \chi^2(n)$, 且 X_1 与 X_2 相互独立, 则 $F = \frac{X_1/m}{X_2/n}$ 的分布称为 **自由度为 (m, n) 的 F 分布**, 记为 $F \sim F(m, n)$, 其中 m 称为分子自由度, n 称为分母自由度. 其密度函数为

$$f(x; m, n) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad x > 0. \quad (1.1.10)$$

F 分布 (密度函数图像如图 1.1.3 所示) 有如下性质:

性质 1.1.7 若 $X \sim F(m, n)$, 则 $E(X) = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$, $\text{var}(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$, $n > 4$.

性质 1.1.8 若 $X \sim F(m, n)$, 则 $1/X \sim F(n, m)$.

性质 1.1.9 若 $T \sim t(n)$, 则 $T^2 \sim F(1, n)$.

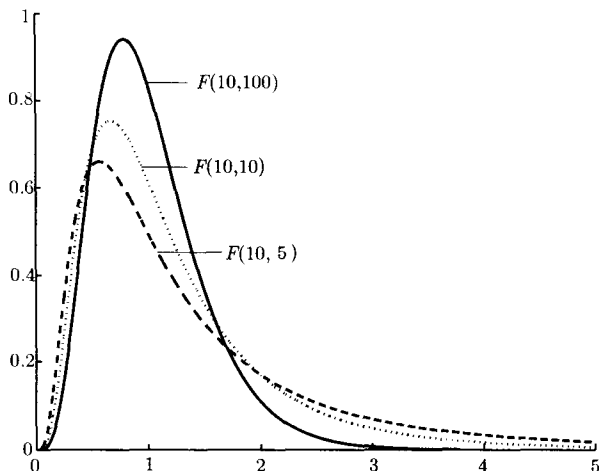


图 1.1.3 $F(m, n)$ 分布的密度函数

当随机变量 $X \sim F(m, n)$ 时, 称满足 $P(X > F_\alpha(m, n)) = \alpha$ 的 $F_\alpha(m, n)$ 是自由度为 (m, n) 的 F 分布的 α 分位数. 分位数可以从附录 §A.6 中查到, 比如 $m = 6, n = 8, \alpha = 0.05$, 查附录 §A.6 可得 $F_\alpha(6, 8) = 3.58$.

§1.1.7 正态总体的抽样分布

正态分布在统计中占非常重要的地位, 因为很多统计量的分布都与正态分布有关, 而且正态分布有许多优良性质, 下面介绍在后面各章会用到的正态总体下的抽样分布, 其中最重要的统计量是样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差 S^2 .

定理 1.1.1 设 $X_1, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}$ 和 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立, 且

- (1) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$;
- (2) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

证明 (1) 因为 $\bar{X}$ 是相互独立的正态变量的线性组合, 所以它仍为正态变量,