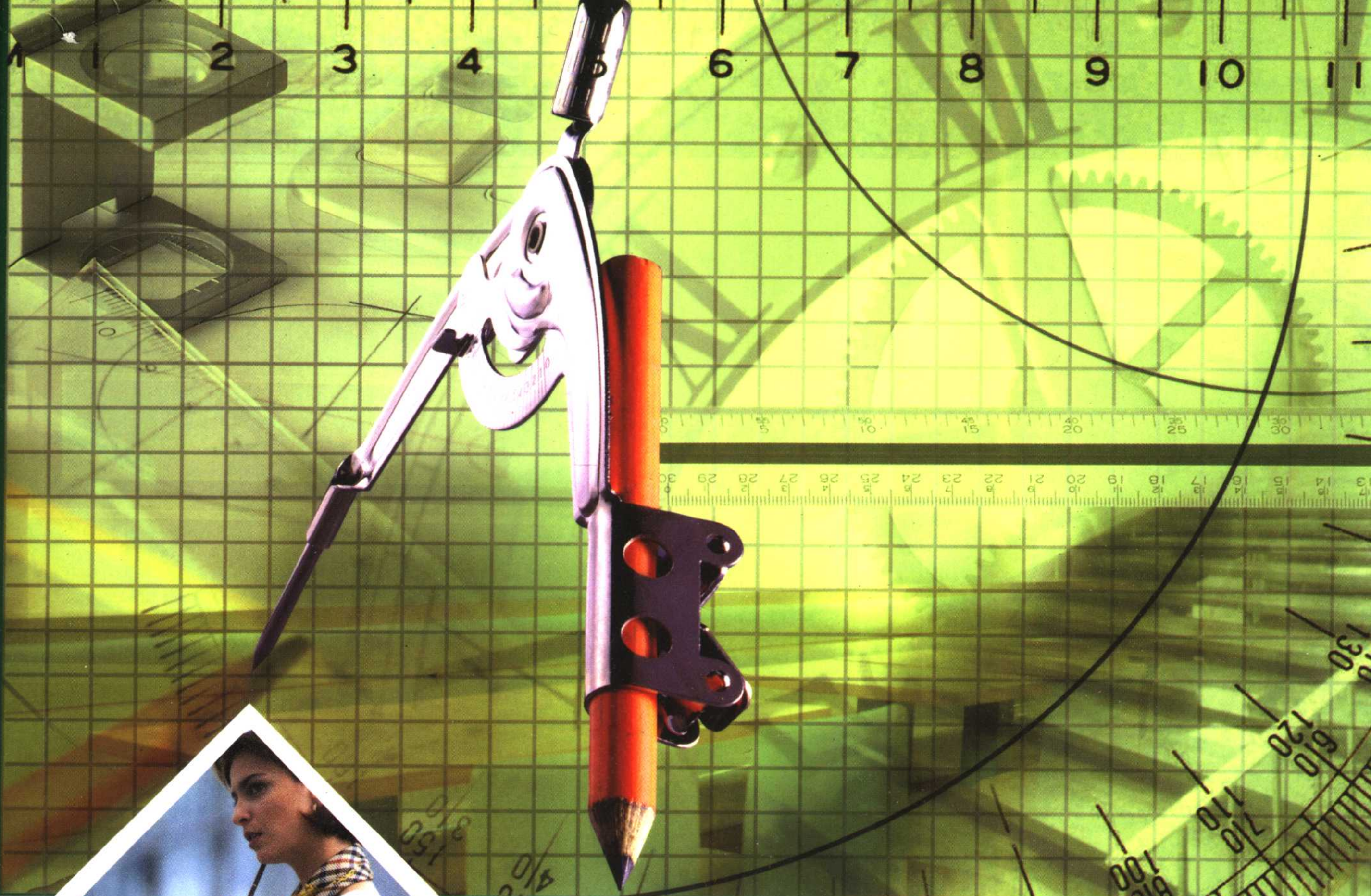

高等数学

GAODENGSHUXUE

■ 高职高专公共课教材

王金金　李广民　主　编
任春丽　陈慧婵　副主编

清华大学出版社

高 等 数 学

王金金　李广民　主　编
任春丽　陈慧婵　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者近年来在建设“高等数学”(高职高专)国家精品课程的教学实践中，以培养应用型人才为目的，从打好基础、培养能力、兼顾后续课程需要出发，在我们编写的“高等数学”(专科)教材的基础上，学习吸收国内外教材的优点，为适应我国各类高等职业技术教育“高等数学”的教学而编写。

本书可作为高等(专科)职业学校“高等数学”的教材，也可作为职工大学、函授、网络教育及培训班的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王金金，李广民主编；任春丽，陈慧婵副主编. —北京：清华大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-302-15537-9

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①王…　②李…　③任…　④陈…　Ⅲ.高等数学　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 094184 号

责任编辑：刘建龙　桑任松
封面设计：杨玉兰
版式设计：北京东方人华科技有限公司
责任校对：马素伟　李玉萍　周剑云
责任印制：何　芊
出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772015　**客户服务**：010-62776969
印 刷 者：北京市世界知识印刷厂
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　**印　张**：26.75　**字　数**：622 千字
版　　次：2007 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2007 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～5000
定　　价：34.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：024844－01

前　言

本书文字通俗易懂，例题较多，便于学生学习和理解。为了适应各类学时的班级使用，故内容包括了高职类“高等数学”的全部内容，使用者可根据学时及专业需要适当取舍。全书内容共分为 10 章：第 1 章，函数、极限与连续；第 2 章，导数与微分；第 3 章，微分中值定理与导数的应用；第 4 章，不定积分；第 5 章，定积分及其应用；第 6 章，微分方程；第 7 章，向量代数与空间解析几何；第 8 章，多元函数微分法及其应用；第 9 章，多元函数积分学；第 10 章，无穷级数。讲授本书全部内容，建议教学时数至少为 140 学时，带*的内容可根据需要取舍。

本书不追求严密论证，但仍注意学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及分析和解决应用问题能力的培养，重要概念均从实例引出，重视其几何意义和物理意义，加深对概念的理解。根据高职学生的特点，书中选编了较多的典型例题，并注意从图例引出结论，略去了部分较难定理的证明，分散难点，以提高学生的学习兴趣。

本书由 4 位编者分工编写，其中第 1、2 章由王金金教授执笔，第 4、9 章由李广民教授执笔，第 3、7、8 章由任春丽副教授执笔，第 5、6、10 章由陈慧婵副教授执笔。最后由王金金教授统稿。

本书由西安电子科技大学理学院教授、全国数学教学指导委员会委员、陕西省数学学会副理事长、陕西大学数学教学委员会副主任刘三阳主审，他对本书的编写提出了很多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。

本书在编写过程中得到西安电子科技大学理学院领导及从事“高等数学”教学的广大教师的热情支持，他们对本书的编写提出了许多宝贵意见，编者在此致以深深的谢意。本书的出版得到清华大学出版社领导及编辑的大力支持，特别是刘建龙责任编辑为本书的出版付出了辛勤劳动，编者在此一并表示致谢。

编者虽然对本书的编写做出了最大努力，但由于水平与经验有限，错误与不妥之处一定难免，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数的概念是高等数学中最重要的基本概念之一，它是高等数学研究的对象. 极限方法是高等数学中的基本方法，它是通过对变量在不同条件下变化趋势的研究，以解决常量数学(初等数学)所不能解决的问题. 事实上，高等数学中的许多基本概念，像连续、导数、定积分等本身就是某种特殊形式的极限. 在这一章中，我们首先在初等数学中关于函数概念的基础上，给出函数的一般定义，介绍函数的简单性质，然后讨论函数的极限和函数的连续性.

1.1　函数的概念与简单性质

1.1.1　集合、常量与变量

1. 集合

具有某种特定性质事物的总体叫做**集合**. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. 一般用大写字母 A、B、C、…表示集合，用小写字母 a 、b 、c 、…表示集合中的元素. 例如，一个班级的学生构成一个集合，一个商店的商品也构成一个集合. 若 a 是集合 A 中的**元素**，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$ ；若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$.

一个集合，若它只含有有限个元素，称为有限集；含有无限个元素的集合称为无限集. 不含任何元素的集合叫空集，空集用 $\varnothing$ 表示. 可以用列举所有元素的方法来表示集合，例如，方程 $x^2-5x+6=0$ 解的集合为 $A=\{2,3\}$ ；也可以把所含元素的共同特性用描述性语言或数学表达式表示，例如上述集合可以表示为 $A=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$. 集合 $\{x\mid x\in \mathbf{R}, x^2+1=0\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 如果不加特别说明，以后提到的数都是实数. 常见的数集有：全体自然数的集合记作 **N**、全体整数的集合记作 **Z**、全体有理数的集合记作 **Q**，全体实数的集合记作 **R**.

A、B 是两个集合，如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ (读作 A 包含于 B). 例如，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$ ，$\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}$ ，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$. 如果集合 $A\subset B$，且 $B\subset A$ ，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

集合的运算主要有：

集合的并：由集合 A 和集合 B 中所有元素构成的集合称为集合 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$ ，读作 A 与 B 的并， $A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$.

集合的交：由集合 A 和集合 B 的公共元素构成的集合，称为集合 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$ ，读作 A 与 B 的交， $A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$.

例如：设 A={2,3,4,5}，B={3,4,6}，那么 $A\cup B=\{2,3,4,5,6\}$　$A\cap B=\{3,4\}$.

集合运算满足交换律、结合律、分配律等一系列性质.

2. 区间与邻域

区间是用得比较多的一类数集. **开区间(a,b)**用集合$\{x\,|\,a<x<b\}$或用不等式 $a<x<b$表示，在数轴上则是以a,b为端点但不包含端点a和b的一条线段.

闭区间$[a,b]$用集合$\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$或用不等式$a\leqslant x\leqslant b$表示，在数轴上则是以$a,b$为端点，且包含端点$a$和$b$的一条线段.

半开区间$[a,b)$用集合$\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$或用不等式$a\leqslant x<b$表示，在数轴上则是以a,b为端点，且包含左端点a的一条线段. 类似的可定义半开区间$(a,b]$.

以上这些区间称为有限区间，数$b-a$称为这些区间的长度. 此外，还有无限区间. 引入记号$+\infty$(正无穷大)和$-\infty$(负无穷大)，即可表示无限区间. 无限区间主要有以下几种：$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$，表示大于$a$的全体实数的集合；$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$，表示大于或等于$a$的全体实数的集合；$(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\}$，表示小于$a$的全体实数的集合；$(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}$，表示小于或等于$a$的全体实数的集合；$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$，表示全体实数，在几何上表示整个数轴.

以上各种区间，无论是开区间还是闭区间、有限区间还是无限区间，统称为区间，常用字母I表示.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点a为中心的任何开区间称为点a的邻域，记为$U(a)$.

设δ是任一正数，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点a的一个δ邻域，记为$U(a,\delta)$，即$U(a,\delta)=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}$，点$a$称为该邻域的中心，$\delta$称为该邻域的半径，如图 1.1所示.

由于$a-\delta<x<a+\delta$相当于$|x-a|<\delta$，因此$U(a,\delta)=\{x\,\|\,x-a|<\delta\}$.

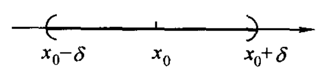

图 1.1

有时需要用到不含中心a的邻域. 点a的δ邻域去掉中心a后，称为点a的**去心 δ 邻域**，记为$\mathring{U}(a,\delta)$. 即$\mathring{U}(a,\delta)=\{0<|x-a|<\delta\}$. 这里$0<|x-a|$表示$x\neq a$.

为了方便，称开区间$(a-\delta,a)$为a的左δ邻域，称开区间$(a,a+\delta)$为a的右δ邻域.

3. 常量与变量

在任何一个生产过程或科学实验过程中，常常会遇到各种不同的量，其中有些量在过程中不起变化，也就是保持一定数值的量，这种量叫做常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同数值的量，这种量叫做变量

例如，把一个密封容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持不变，它们是常量；而气体的温度和压力在变化，它们是变量，其数值越来越大.

一个量是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体过程做具体分析. 例如，重力加速度g，严格地说，它的数值是随着与地心距离的不同而变化的，因而它是变量. 而当精确度要求不高时，在地面附近一般取$g=9.8$，这就是常量了.

在高等数学中，通常用字母x,y,z等表示变量，用字母a,b,c等表示常量.

1.1.2　函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量同时变化. 而这几个变量并不是彼此孤立变化的，而是相互有联系，遵从一定规律变化的.

现在考虑两个变量的简单情形.

例 1　圆的面积问题. 考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的依赖关系：$A=\pi r^2$. 当圆的半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，圆的面积 A 也就随之确定了. 当半径 r 变化时，其面积 A 也变化.

例 2　自由落体问题. 设物体下落的时间为 t，下落距离为 h，假定从 $t=0$ 时开始下落，那么 h 与 t 之间的依赖关系由公式 $h=\dfrac{1}{2}gt^2$ 给出，其中 g 为重力加速度. 在这个关系中，下落距离 h 随时间 t 的变化而变化. 若物体落地的时刻为 $t=T$，则当时间 t 在区间 $[0,T]$ 内任意取定一个数值时，由上式即可确定下落距离 h. 例如，当 $t=1$ 秒时，$h=\dfrac{1}{2}g$；当 $t=2$ 秒时，$h=2g$；等等.

例 3　一块钢坯从温度为 1000℃的炉中取出后，放入温度为 0℃的冷水中冷却. 每隔一分钟测量一次钢坯的温度，得到如下的数据：

时间/min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
温度/℃	607	367	223	135	82	50	30	18	11	6	4	2.5	1.8	1.3	0.9	0.6

从这个表格可以清楚地看出钢坯的温度随着时间变化的规律，随着时间的推移，钢坯的温度逐渐下降，越来越接近冷水的温度.

上述几个例子描述的问题各不相同，但当抽去所考虑的量的具体含义后，它们都表达了两个变量之间的依赖关系：当其中一个变量在某一范围内取定一个值时，另一个变量就按一定的法则有一个确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质. 下面给出函数的定义.

定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则(或关系)总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量(或函数)**，数集 D 称为这个函数的定义域，而因变量 y 的变化范围称为函数 $f(x)$ 的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用 φ、F 等其他字母表示，此时函数记作 $y=\varphi(x)$、$y=F(x)$ 等.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如在例 1 中，定义域 $D=\{r|r\in(0,+\infty)\}$；在例 2 中，定义域 $D=\{t|t\in[0,T]\}$. 如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，则函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域是 $[-2,1)\cup(1,2]$.

由于函数的对应法则是多种多样的，一般表示一个函数主要采用解析法、表格法和图示法. 这几种方法在中学都比较熟悉了. 以上的例 1 和例 2 采用的就是解析法，例 3 采用的是表格法. 在高等数学中还常常用到**分段函数**，即用几个式子分段来表示一个函数. 下面举几个分段函数的例子.

例 4　函数 $u_a(t)=\begin{cases}0, t<a;\\1, t>a;\end{cases}(a>0)$，这个函数的定义域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值域为 $\{0,1\}$. 此函数在电子技术中经常遇到，称为单位阶跃函数. 这种用两个以上解析式表示的函数称为分段函数. 该函数的图形如图 1.2 所示.

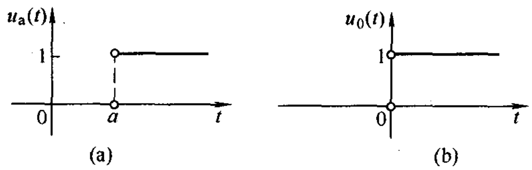

图 1.2

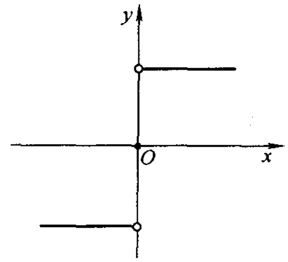

图 1.3

例 5　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为−1，0，1，它的图形如图 1.3 所示.对于任何实数 x，关系式 $|x|=x\cdot\operatorname{sgn}x$ 恒成立.

例 6　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$，则函数 $y=[x]$ 称为取整函数. 其图形如图 1.4 所示，在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1. 它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为所有整数. 这个函数的特点是，与 x 相对应的函数值 y 为不超过 x 的最大整数，例如，$\left[\dfrac{4}{9}\right]=0$，$[\pi]=3$，$[-4.2]=-5$.

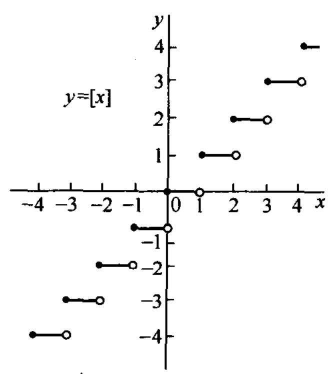

图 1.4

例 7　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ x^2-6x+9, & 2\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$$

求 $f(0.5)$、$f(1)$、$f(3)$、$f(4)$ 的值.

解　由于 $x=0.5$、$x=1$、$x=3$、$x=4$ 分别属于不同的区间，因此可分别求出其相应的函数值如下：

$$f(0.5)=\frac{1}{2}x\Big|_{x=0.5}=0.25$$
$$f(1)=x\big|_{x=1}=1$$
$$f(3)=x^2-6x+9\big|_{x=3}=0$$
$$f(4)=x^2-6x+9\big|_{x=4}=1$$

1.1.3　函数的简单性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(见图 1.5)；若当 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)>f(x_2)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(见图 1.6). 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 从图形上看，单调增加函数表现为曲线从左到右上升，单调减少函数表现为曲线从左到右下降.

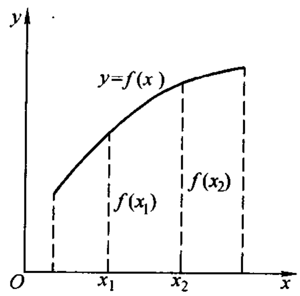

图 1.5

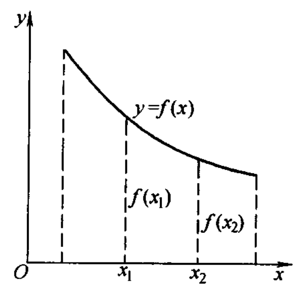

图 1.6

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的(见图 1.7).

又如，函数 $y=x^3$ 的在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的(见图 1.8).

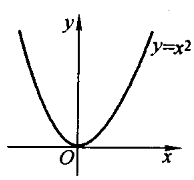

图 1.7

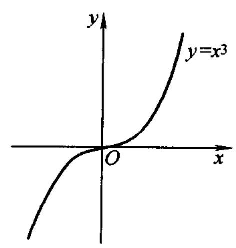

图 1.8

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点是对称的，且对于任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

从函数图形上看，偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的

(见图 1.9).

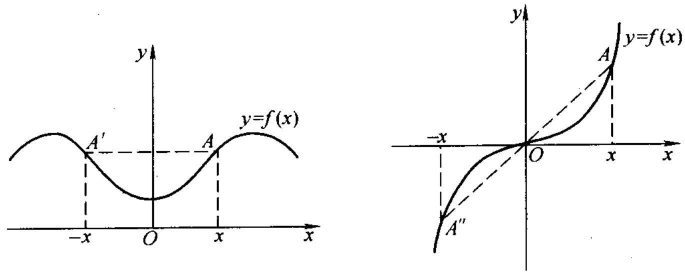

图 1.9

例如，对于函数 $y=x^3$，由于 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以它是奇函数；而对于函数 $y=x^4$，由于 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$，所以它是偶函数. 一般，x 的奇次幂是奇函数，x 的偶次幂是偶函数.

除了奇函数和偶函数以外，还存在大量的非奇非偶函数. 可以证明，任何一个在对称区间 $(-a,a)$ 上有定义的函数一定能写成一个奇函数和一个偶函数之和. 实际上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},\quad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则容易验证，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，并且 $f_1(x)$ 是偶函数，$f_2(x)$ 是奇函数.

读者还可自行证明：两个奇函数的积是偶函数，两个偶函数的积是偶函数，奇函数与偶函数的积是奇函数.

3. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零数 l，使得对于任意的 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常我们所说的周期指的是最小正周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 都是周期函数，其最小正周期均为 2π. 正切函数 $y=\tan x$ 也是周期函数，其最小正周期为 π.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$，如果存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界. 函数无界是指对于无论多么大的正数 M，总存在 $x_1\in I$，使得 $|f(x_1)|>M$.

若存在正数 K_1，使得对任意 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有**上界**，而正数 K_1 称为函数 $f(x)$ 的一个上界；如果存在正数 K_2 使得 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有**下界**，而正数 K_2 称为函数 $f(x)$ 的一个下界.

关于函数的有界性，有结论：函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在该区间上既有上界又有下界. 读者可自行证明此结论.

1.1.4　反函数和复合函数

1. 反函数

在自由落体运动过程中，物体下落距离 h 可表示为时间 t 的函数：$h=\frac{1}{2}gt^2$，在其定义域内任意确定一个时刻 t，即可由该函数得到下落的距离 h. 如果考虑此问题的逆问题，即已知下落距离 h，求时间 t. 此时有 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$. 在这里，原来的因变量和自变量进行了交换，这样将自变量和因变量交换所得到的新函数称为原来函数的反函数.

一般地，对于函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，则变量 x 是变量 y 的函数，把这个函数用 $x=\varphi(y)$ 表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x=\varphi(y)$，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数. 显然，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，那么 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

习惯上，我们把自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，可将 $x=\varphi(y)$ 写成 $y=\varphi(x)$. 由于函数的实质是自变量和因变量的对应关系，至于 x 和 y 仅仅是记号而已，$x=\varphi(y)$ 和 $y=\varphi(x)$ 中表示对应关系的符号 φ 并没有改变，它们实质上是同一个函数.

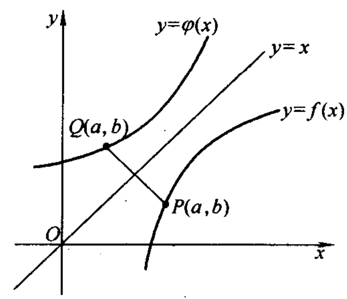

图 1.10

下面分析互为反函数的两个函数图形的关系. 如图 1.10 所示. $y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在同一坐标系中的图形是同一曲线. 若函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=\varphi(x)$，则对函数 $y=f(x)$ 图形上的任一点 $P(a,b)$，有 $b=f(a)$，因而 $a=\varphi(b)$，即反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形上必有一点 $Q(b,a)$ 与 $P(a,b)$ 对应. 而 P、Q 两点是关于直线 $y=x$ 对称的(即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ). 同样可以说，反函数 $y=\varphi(x)$ 图形上的任意一点也必有函数 $y=f(x)$ 图形上的一点与之对应，并且这两点同样是关于直线 $y=x$ 对称的. 因此，我们可以得到关于反函数图形的一条性质：在同一个坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

2. 复合函数

在实际问题中，经常会遇到一个函数和另一个函数发生联系. 例如，球的体积 V 是其半径的函数：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，由于热胀冷缩，随着温度的改变，球的半径也会发生变化，根据物理学知道，半径 r 随温度 T 变化的规律是 $r=r_0(1+\alpha T)$，其中，r_0、α 为常数，将这个关系代入球的体积公式，即得到体积 V 与温度 T 的函数关系

$$V=\frac{4}{3}\pi[r_0(1+\alpha T)]^3$$

这种将一个函数代入另一个函数而得到的函数称为上述两个函数的复合函数.

一般地，若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 $D(f)$，同时 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，

它的值域为$R(\varphi)$，则当$D(f)$和$R(\varphi)$的交集非空时，可以确定一个函数$y=f(u)=f[\varphi(x)]$，这个函数称为由$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**.

在复合函数的定义中，为什么要求$y=f(u)$的定义域和$u=\varphi(x)$的值域的交集非空？请读者自行说明.

例如，设$y=\cos u$，$u=x^2$，则由这两个函数复合而成的函数为$y=\cos x^2$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

又如，由三个函数$y=\cos u$，$u=v^2$，$v=x+1$复合而成的函数是$y=\cos(x+1)^2$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

需要注意的是，有些函数是不能复合的，例如，函数$y=\ln u$，$u=-x^2$就不能复合. 这是因为，函数$y=\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$，而函数$u=-x^2$的值域为$(-\infty,0]$，二者的交集为空集，根据上面的说明，这两个函数无法复合.

1.1.5 初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 基本初等函数在函数研究中起着基础的作用，因此，对这几种函数的定义、图形、主要性质要十分熟悉，我们在这里将它们的主要性质简单总结一下，以便今后做进一步讨论.

1. 幂函数

形如$y=x^\mu$(μ是常数)的函数称为**幂函数**.

幂函数的定义域与μ值有关. 当μ为正整数时，幂函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$；当μ为负整数时，幂函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 对于所有的实数$\mu$，幂函数$y=x^\mu$具有公共的定义域$(0,+\infty)$.

当μ为偶数时，幂函数$y=x^\mu$是偶函数；当μ为奇数时，幂函数$y=x^\mu$为奇函数. 当$\mu>0$时，幂函数$y=x^\mu$在$(0,+\infty)$内单调增加；当$\mu<0$时，幂函数$y=x^\mu$在$(0,+\infty)$内单调减少.

当μ取不同值时，幂函数$y=x^\mu$的图形如图 1.11、图 1.12 和图 1.13 所示.

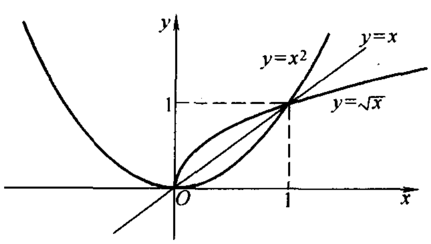

图 1.11

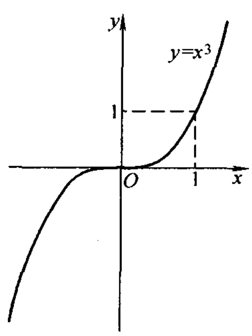

图 1.12

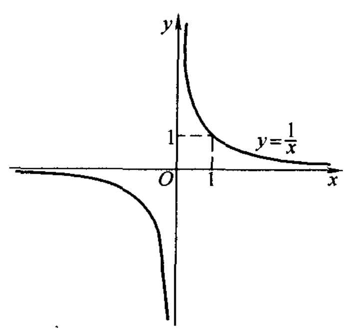

图 1.13