

DAXUE SHUXUE XILIE FUDAO JIAOCAI

大学数学系列辅导教材

GAILULUN YU SHULITONGJI
XUEXI SHIYI JIENAN

概率论与数理统计学习释疑解难

苏德矿 章迪平 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

021/240C

2007

大学数学系列辅导教材

概率论与数理统计 学习释疑解难

主 编 苏德矿 章迪平
副主编 赵雅因 吴志松
主 审 张继昌



浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习释疑解难/苏德矿,章迪平主编. —杭州:浙江大学出版社,2007.10
(大学数学系列辅导教材)
ISBN 978-7-308-05444-7

I. 概… II. ①苏…②章… III. ①概率论—高等学校—教学参考资料②数理统计—高等学校—教学参考资料 IV. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 130156 号

内 容 提 要

本书根据教育部高等学校数学课程教学指导委员会拟定的概率论与数理统计课程教学基本要求,参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲,结合苏德矿、张继昌等编写的,由高等教育出版社出版的《概率论与数理统计》教材编写的。在内容上,我们力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂,并注意数学思维与数学方法的论述,通过对典型错误的分析,加深对数学概念、定理的理解,并对教材中部分习题进行了详细解答。虽然解数学问题没有什么万能的模式,但它们仍然有着某些规律、方法和技巧,通过我们所给解题方法的归纳,可以使读者抓住重点,较充分地理解教学内容,掌握解题的“钥匙”,大大加快解题速度。本书可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生学习概率论与数理统计的参考书,也可作为经济、管理类有关专业本科生学习的参考书,同时适合考研学生在基础复习阶段使用。

概率论与数理统计学习释疑解难

主 编 苏德矿 章迪平

责任编辑 徐素君 夏庆民

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 10.25

字 数 218 千

版 印 次 2007 年 10 月第 1 版 2007 年 10 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-05444-7

定 价 15.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

前 言

概率论与数理统计是一门重要的大学公共基础课程,概率论与数理统计的教学一般有教学内容的讲授和习题课的教学。概率论与数理统计习题课是概率论与数理统计学习的一个重要环节,它在加深学生对数学概念的理解,逻辑推理能力的培养,以及计算技巧的训练等方面都起着重要的作用。习题课起到了教与学、疏与熟、学与用的桥梁作用。随着科学技术的日益发展,大学期间开设的新课程越来越多,每门课程所给的课时却越来越少,但教学内容几乎没有减少。概率论与数理统计课程也是如此,用作习题课的课时变得很少,甚至没有时间上习题课。加之教师与学生接触的时间又较少,因而,学生在学习概率论与数理统计的过程中,会遇到许多困难,而且无人指导,影响了学生学习概率论与数理统计的兴趣和积极性,从而也直接影响了教学质量。

本书根据教育部高等学校数学课程教学指导委员会拟定的概率论与数理统计课程教学基本要求,参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲,结合苏德矿、张继昌等编写的,由高等教育出版社出版的《概率论与数理统计》教材编写的。在内容上,我们力求表述确切、思路清楚、由浅入深、通俗易懂,并注意数学思维与数学方法的论述,通过对典型错误的分析,加深对数学概念、定理的理解,并对教材中部分习题进行了详细的解答。虽然解数学问题没有什么万能的模式,但它们仍然有着某些规律、方法和技巧,通过我们所给解题方法的归纳,可以使读者抓住重点,较充分地理解教学内容,掌握解题的“钥匙”,大大加快解题速度。这对学好概率论与数理统计,在有关考试中取得好成绩都有直接的帮助。

本书可作为高等学校工科、理科(非数学类专业)本科生学习概率论与数理统计的参考书,也可作为经济、管理类有关专业本科生学习的参考书,同时适合考研学生在基础复习阶段使用。

本书由苏德矿、章迪平主编,赵雅因、吴志松副主编,王志江、沈灏、张志英、章迪平、王勤、吴志松、赵雅因、周君兴(按编写内容排序)共同编写。第一章由中国计量学院王志江编写,第二章由杭州电子科技大学沈灏编写,第三章由浙江理工大学张志英编写,第四章由浙江科技学院章迪平编写,第五章由浙江工业大学王勤编写,第六章由浙江林学院吴志松编写,第七章由浙江大学城市学院赵雅因编写,第八章由浙江财经学院周君兴编写。全书由浙江大学张继昌主审。

由于编者水平有限,本书难免会有欠妥和错误之处,衷心希望得到专家、同行和读者的批评指正,使本书在实践中得以逐步完善。

作者于杭州

2007年9月

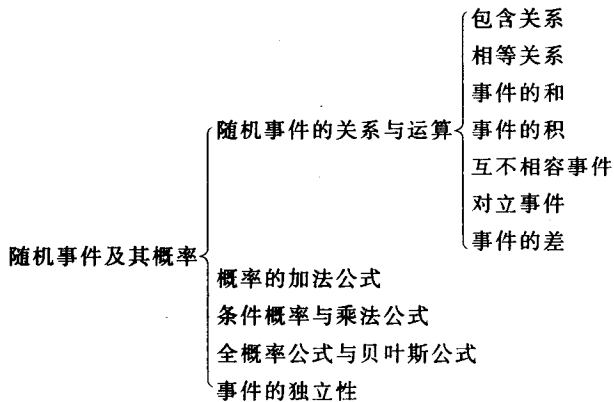
目 录

第一章 随机事件及其概率	(1)
知识网络图	(1)
内容与要求	(1)
概念、定理的理解	(2)
解题方法与题例	(6)
习题选解	(15)
练习题	(22)
第二章 随机变量及其分布	(23)
知识网络图	(23)
内容与要求	(23)
概念、定理的理解与典型错误分析	(24)
解题方法与题例	(27)
习题选解	(34)
练习题	(48)
第三章 多维随机变量及其分布	(50)
知识网络图	(50)
内容与要求	(50)
概念、定理的理解与典型错误分析	(51)
解题方法与题例	(59)
习题选解	(64)
练习题	(71)
第四章 随机变量的数字特征	(74)
知识网络图	(74)
内容与要求	(74)
概念、定理的理解与典型错误分析	(75)

解题方法与题例	(80)
习题选解	(83)
练习题	(87)
第五章 大数定理与中心极限定理	(89)
知识网络图	(89)
内容与要求	(89)
概念、定理的理解与典型错误分析	(89)
解题方法与题例	(91)
习题选解	(97)
练习题	(99)
第六章 数理统计基础	(101)
知识网络图	(101)
内容与要求	(101)
概念、定理的理解与典型错误分析	(103)
解题方法与题例	(107)
习题选解	(110)
练习题	(117)
第七章 参数估计	(119)
知识网络图	(119)
内容与要求	(119)
概念、定理的理解与典型错误分析	(119)
解题方法与题例	(123)
习题选解	(130)
练习题	(133)
第八章 假设检验	(135)
知识网络图	(135)
内容与要求	(135)
概念、定理的理解与典型错误分析	(136)
解题方法与题例	(137)
习题选解	(141)
练习题	(150)
参考答案	(152)

第一章 随机事件及其概率

知识网络图



内容与要求

事件之间的关系与基本运算,古典概率,掌握概率的加法定理,条件概率与乘法公式,全概率公式与贝叶斯公式,事件独立性,事件独立性进行概率计算.

(1) 理解随机事件的概念,熟悉事件之间的关系与基本运算,了解事件频率的概念,了解随机现象的统计规律性.

(2) 理解古典概率的定义,了解概率的统计定义,掌握古典概率的计算.

(3) 掌握概率的加法定理.

(4) 理解条件概率的概念,掌握乘法公式.

(5) 掌握全概率公式与贝叶斯公式.

(6) 理解事件独立性的概念,会应用事件独立性进行概率计算.

重点 古典概率 全概率公式与贝叶斯公式 用事件独立性进行概率计算

难点 古典概率 互不相容事件与独立事件的关系



概念、定理的理解

一、随机试验与样本空间

把满足以下条件的试验称为**随机试验**：

- (1) 试验在相同条件下是可重复的；
- (2) 试验的全部可能结果不止一个，且都是事先可以知道的；
- (3) 每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果，至于是哪一个结果则事前无法预知。

今后凡是随机试验简称试验，并记之以英文字母 E ，称试验的每一个结果为样本点，并称全体样本点的集合为试验的样本空间，样本点与样本空间分别用希腊字母 ω 和 Ω 表示。

二、随机事件

试验的结果称为事件，如果在每次试验的结果中，某事件可能发生，也可能不发生，则这一事件叫做**随机事件**，简称事件。如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做**必然事件**；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做**不可能事件**。

通常用 $A, B, C, \dots$ 表示随机事件，而 Ω 表示必然事件， $\emptyset$ 表示不可能事件。

三、随机事件的关系及运算

1. 事件的包含

如果事件 A 的发生必然导致事件 B 发生，即事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点，则称事件 B 包含事件 A ，或称事件 A 包含于事件 B 中，此时，也称事件 A 是事件 B 的子集，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$ 。

2. 事件的和(并)

“事件 A 与 B 中至少有一事件发生”这一事件叫做事件 A 与事件 B 的和(并)，记作 $A \cup B$ 。

类似地：“事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中至少有一个发生。”这一事件称为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的和事件，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ 。

3. 事件的积(交)

“事件 A 与 B 同时发生”。这一事件称事件 A 与事件 B 的积事件(或交事件)记作 $A \cap B$ 或 AB 。

类似地“ n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 同时发生”这一事件称为事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的

积事件(交事件),记作 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\prod_{i=1}^n A_i$.

4. 互不相容事件(互斥事件)

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生,即 $AB = \emptyset$,则称事件 A 与事件 B 是互不相容事件(或互斥事件).互不相容事件 A 与 B 没有公共样本点.

5. 事件的差

“事件 A 发生而事件 B 不发生”.这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A - B$, $A - B$ 是由属于事件 A 但不属于事件 B 的样本点组成的集合.

6. 对立事件(互逆事件)

如果二事件 A 与 B 互不相容,并且它们中必有一事件发生,即二事件 A 与 B 有且仅有一事件发生,即 $A \cup B = \Omega$, $A \cap B = \emptyset$,则称事件 A 与事件 B 对立(或互逆),称事件 B 是事件 A 的对立事件(或逆事件),同样,事件 A 也是事件 B 的对立事件(或逆事件)记作, $B = \bar{A}$ 或 $A = \bar{B}$.

$\bar{A}$ 是由所有属于 Ω 而不属于 A 的样本点组成的集合, $A \cup \bar{A} = \Omega$.

7. 完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容,且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$,则称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 构成一个完备事件组.

根据以上定义,容易得到以下事件之间的运算规律

- (1) 交换律 $A \cup B = B \cup A; AB = BA$
- (2) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (AB)C = A(BC);$
- (3) 分配律 $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC); A \cup (BC) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$
- (4) 摩根律 $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}; \overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}; \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i; \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i$

四、概率的定义

由随机事件的频率的稳定性可以看出,随机事件发生的可能性可以用一个数来表示.这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的介于 0 与 1 之间的数叫做随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$.该定义通常称为概率的统计定义.

随机试验的样本空间为 Ω ,对随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,若满足下列三个公理,则称 $P(A)$ 为 A 的概率:

- (1) 非负性: $P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性: $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可加性: A 与 B 互不相容,则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

五、概率的性质

由概率的定义,我们可以得到概率的下列性质:

性质 1 $P(\emptyset) = 0$

性质 2 如果 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容,则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

特别有 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

性质 3 若 $B \supset A$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

性质 4 对任意两个随机事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

推论 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

六、古典概型(等可能概型)

古典概型的特点是:

(1) 每次试验中,所有可能发生的结果只有有限个,即样本空间 Ω 是个有限集

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

(2) 每次试验中,每一种可能结果发生的可能性相同,即

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) \text{ 其中 } A_i = \{\omega_i\} (i = 1, 2, \dots, n)$$

满足上述两个条件的数学模型称为古典概型(或等可能概型).

设试验结果共 n 个基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$, 而且这些事件的发生具有相同的可能性,而事件 A 由其中的 m 个基本事件组成,则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{A \text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} = \frac{m}{n}$$

七、条件概率

如果我们在事件 B 已经发生的条件下考虑事件 A 的概率,则这种概率叫做事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率,记作 $P(A|B)$.

定义 1 设 A, B 为同一个随机试验中的两个随机事件,且 $P(B) > 0$, 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下,事件 A 发生的条件概率.

八、乘法定理

乘法定理 设 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

同理, 有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$ ($P(B) > 0$). 上式可以推广到有限个事件的乘积情形:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

九、全概率公式与贝叶斯公式

定理 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 构成一个完备事件组, 且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任一随机事件 A , 有

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i) \\ P(B_i|A) &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

定义 1 设 A, B 为任意两个随机事件, 如果 $P(B|A) = P(B)$, 即事件 B 发生的可能性不受事件 A 的影响, 则称事件 B 对于事件 A 独立.

显然 B 对 A 独立, 则 A 对 B 也独立, 故称 A 与 B 相互独立. 由事件独立的定义, 可得

(1) 必然事件 Ω 及不可能事件 $\emptyset$ 与任何事件 A 均独立.

(2) 事件 A 与 B 独立的充分必要条件是 $P(AB) = P(A)P(B)$.

(3) 若 A 与 B, A 与 $\bar{B}, \bar{A}$ 与 $B, \bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中任一对事件独立, 则其余三对均独立

定义 2 设 A, B, C 为三个事件, 如果下列四个等式成立:

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

$$P(BC) = P(B)P(C)$$

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称 A, B, C 为相互独立的事件.

上述定义中若 A, B, C 仅满足前三个式子, 则称 A, B, C 两两独立. 需要指出的是: 两两独立的事件组未必是相互独立的事件组.

一般地设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 如果对于任意 $k (1 < k \leq n)$, 任意 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的事件组.

解题方法与题例

例 1 袋中装有 a 个白球和 b 个黑球, 用下列 3 种方式从中任取 k 个球 ($1 \leq k \leq a+b$), 试求所取的 k 个球中恰有 m 个白球的概率 (其中 $1 \leq m \leq \min\{k, a\}$):

- (1) 一次性抽取 k 个;
- (2) 无放回地抽取 k 次, 每次取 1 个;
- (3) 有放回地抽取 k 次, 每次取 1 个.

解 设 $A = \{\text{所取的 } k \text{ 个球中恰有 } m \text{ 个白球}\}$.

(1) 样本点总数为 C_{a+b}^k , A 所包含的样本点数为 $C_a^m C_b^{k-m}$, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{C_a^m C_b^{k-m}}{C_{a+b}^k}$$

(2) 样本点总数为 A_{a+b}^k , A 所包含的样本点数 $C_a^m C_b^{k-m} k!$, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{C_a^m C_b^{k-m} k!}{A_{a+b}^k} = \frac{C_a^m C_b^{k-m}}{C_{a+b}^k}$$

(3) 样本点总数为 $(a+b)^k$, A 所包含的样本点数为 $C_k^m a^m b^{k-m}$, 故所求概率为

$$P(A) = \frac{C_k^m a^m b^{k-m}}{(a+b)^k}$$

注 由本例可知, “一次性抽取 k 个”与“无放回地抽取 k 次, 每次取 1 个”, 这两种抽取方法的效果完全相同.

例 2 袋中有 $m+n$ 个球, 其中有 m 个白球, n 个黑球, 将球一个一个地取出来, 取后不放回, 求第 k 次 ($1 \leq k \leq m+n$) 取出的是白球的概率.

解 **方法 1** 将 $m+n$ 个球看作是各不相同的, 按取出的先后次序, 将球排在直线上的 $m+n$ 个位置上, 每一种取法对应着 $m+n$ 个球在 $m+n$ 个位置上的一个排列, 不同的排列总数为 $(m+n)!$, 这就是样本点总数. 令 $A = \{\text{第 } k \text{ 次取出的是白球}\}$, 则 A 发生, 当且仅当在直线上第 k 个位置上放白球, 而其余 $m+n-1$ 个位置上的球由剩余的 $m+n-1$ 个球作全排列, 故 A 包含的样本点数 $C_m^1 (m+n-1)!$. 因此, 所求概率为

$$P(A) = \frac{C_m^1 (m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{m}{m+n}$$

方法2 将 m 个白球看作是无区别的, 将 n 个黑球也看作是无区别的, 设想按取出的先后次序, 将球排放在直线的 $m+n$ 个位置上, 每一种放法对应着 m 个白球在 $m+n$ 个位置上的一种放法, 故样本点总数为 C_{m+n}^m . 令 $A = \{\text{第 } k \text{ 次取出的是白球}\}$, 则 A 发生, 当且仅当第 k 个位置上放白球, 而其余 $m+n-1$ 个位置中选出 $m-1$ 个位置放白球, 故 A 所包含的样本点数为 C_{m+n-1}^{m-1} . 因此所求概率为

$$P(A) = \frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m} = \frac{m}{m+n}$$

注 值得注意的是, 所求概率与次序 k 无关, 这实际上就是“抽签”的理论依据, 即“中签”与否与抽签的次序无关.

例3 从 0 至 9 这 10 个数字中, 不重复地任取 4 个, 求

- (1) 能排成一个 4 位奇数的概率;
- (2) 能排成一个 4 位偶数的概率.

解 显然, 样本空间中包含的样本点总数为 A_{10}^4 , 令 $A = \{\text{能排成一个 4 位奇数}\}$, $B = \{\text{能排成一个 4 位偶数}\}$.

(1) 当 4 个数字能排成 4 位奇数时, 末位数为 1, 3, 5, 7, 9 中的一个, 故末位数有 C_5^1 种取法, 而首位数不能取 0, 故首位数有 C_8^1 种取法; 首位与末位取定后, 中间两位数可以从其余的 8 个数字中任取两个来排列, 故有 A_8^2 种取法. 因此, 事件 A 包含的样本点数为 $C_5^1 C_8^1 A_8^2$, 于是所求概率为

$$P(A) = \frac{C_5^1 C_8^1 A_8^2}{A_{10}^4} = \frac{4}{9}$$

(2) 当 4 个数字能排成 4 位偶数时, 末位数为 0, 2, 4, 6, 8 中的一个, 若末位不为 0, 则末位有 C_4^1 种取法, 而首位有 C_8^1 种取法, 中间两位有 A_8^2 种取法; 若末位取 0, 则前 3 位有 A_9^3 种取法, 故事件 B 包含的样本点数为 $C_4^1 C_8^1 A_8^2 + C_1^1 A_9^3$. 因此所求概率为

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_8^1 A_8^2 + C_1^1 A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{41}{90}$$

例4 从区间 $[0, 1]$ 中任取两数, 求:

- (1) 两数之和大于 $\frac{1}{2}$ 的概率;
- (2) 两数之积小于 $\frac{1}{e}$ 的概率.

解 设从 $[0, 1]$ 中取出的两数分别为 x 与 y , 则点 (x, y) 与正方形 $OABC$ 内的点

——对应,即样本空间 Ω 可看作正方形 $OABC$.

(1) 由于事件 $\left\{x+y > \frac{1}{2}\right\}$ 对应于区域 D_1 (见图 1-1a), 故

$$P\left\{x+y > \frac{1}{2}\right\} = \frac{\text{区域 } D_1 \text{ 的面积}}{\text{正方形 } OABC \text{ 的面积}} = \frac{1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1} = \frac{7}{8}$$

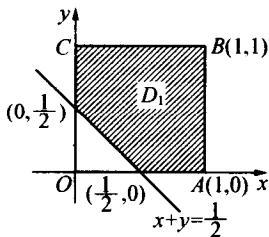


图 1-1a

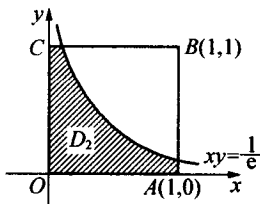


图 1-1b

(2) 由于事件 $\left\{xy < \frac{1}{e}\right\}$ 对应于区域 D_2 (见图 1-1b), 故 $P\left\{xy < \frac{1}{e}\right\} = \frac{\text{区域 } D_2 \text{ 的面积}}{\text{正方形 } OABC \text{ 的面积}} = \frac{1}{e} \times 1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{ex} dx = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} [\ln x]_{\frac{1}{e}}^1 = \frac{2}{e}$

例 5 甲、乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头,它们在一昼夜内到达的时间是等可能的.如果甲船停泊的时间是 1h,乙船停泊的时间是 2h.问:它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少?

解 设甲、乙两船到达码头的时刻分别为 x 和 y , 则 $0 \leq x \leq 24$, $0 \leq y \leq 24$, 即样本空间 Ω 可看作边长为 24 的正方形区域 $OABC$ (见图 1-2). 据题意,若甲船先到,则乙船应晚到 1h 以上,即 $y-x \geq 1$, 也即 $y \geq x+1$; 若乙船先到,则甲船应晚到 2h 以上,即 $x-y \geq 2$, 也即 $y \leq x-2$. 因此“两船都不需要等候”这一事件对应于正方形 $OABC$ 内满足不等式 $y \geq x+1$ 或 $y \leq x-2$ 的两区域 D_1 与 D_2 , 故所求概率为

$$\begin{aligned} P &= \frac{\text{区域 } D_1 \text{ 的面积} + \text{区域 } D_2 \text{ 的面积}}{\text{正方形 } OABC \text{ 的面积}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(24-1)^2 + \frac{1}{2}(24-2)^2}{24^2} \\ &= \frac{1013}{1152} \approx 0.88 \end{aligned}$$

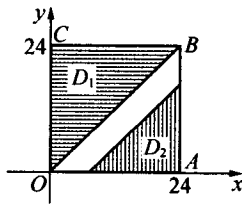


图 1-2

例 6 已知 $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, $P(A|B) = \frac{1}{2}$, 求 $P(B)$, $P(A \cup B)$ 及

$$P(\overline{AB} \cup A\overline{B}).$$

解

由 $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$, 得

$$P(B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\overline{AB} \cup A\overline{B}) &= P(\overline{AB}) + P(A\overline{B}) \\ &= P(B)[1 - P(A|B)] + P(A)[1 - P(B|A)] \\ &= \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

例 7 已知 $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$.

(1) 当 A, B 互不相容时, 求 $P(A \cup B)$, $P(A - B)$;

(2) 当 A, B 有包含关系时, 求 $P(A \cup B)$, $P(AB)$;

(3) 当 $P(B|A) = 0.1$ 时, 求 $P(AB)$, $P(A|\overline{B})$.

解

(1) 因为 A, B 互不相容, 故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.4 = 0.6$$

$$P(A - B) = P(A) = 0.2$$

(2) 由题设可知, $A \subset B$, 故

$$P(A \cup B) = P(B) = 0.4$$

$$P(AB) = P(A) = 0.2$$

(3) $P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.2 \times 0.1 = 0.02$

$$\begin{aligned} P(A|\overline{B}) &= \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)[1 - P(B|A)]}{1 - P(B)} \\ &= \frac{0.2 \times (1 - 0.1)}{1 - 0.4} = 0.3 \end{aligned}$$

例 8 设 A, B, C 是三个事件, 且 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) =$

$P(BC) = \frac{1}{12}$, $P(CA) = 0$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

解

A, B, C 至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned}
 P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} - 0 + 0 = \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

这里 $P(ABC) = 0$, 是由于 $P(ABC) \leq P(AC) = 0$.

例 9 一批产品中一、二、三等品各占 60%、30% 和 10%, 从中任取一件, 发现不是三等品, 求取得的是一等品的概率.

解 **方法 1** 设 $A_i = \{\text{取出的产品是 } i \text{ 等品}\} (i = 1, 2, 3)$, 则 A_1, A_2, A_3 互不相容, 所求概率为

$$\begin{aligned}
 P(A_1 | \bar{A}_3) &= \frac{P(A_1 \bar{A}_3)}{P(\bar{A}_3)} = \frac{P(A_1 - A_3)}{1 - P(A_3)} = \frac{P(A_1) - P(A_1 A_3)}{1 - P(A_3)} \\
 &= \frac{P(A_1)}{1 - P(A_3)} = \frac{0.6}{1 - 0.1} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

方法 2 设 $A_i = \{\text{取出的产品是 } i \text{ 等品}\} (i = 1, 2, 3)$, 则 A_1, A_2, A_3 互不相容, 所求概率为

$$\begin{aligned}
 P(A_1 | (A_1 \cup A_2)) &= \frac{P(A_1 (A_1 \cup A_2))}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1) + P(A_2)} \\
 &= \frac{0.6}{0.6 + 0.3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

例 10 现有两种报警系统 A 与 B, 每种系统单独使用时, 系统 A 有效的概率为 0.9, 系统 B 有效的概率为 0.95, 在系统 A 失灵的条件下, 系统 B 有效的概率为 0.85, 求

- (1) 在系统 B 失灵的条件下, 系统 A 有效的概率;
- (2) 这两个系统至少有一个有效的概率.

解 **方法 1** 设 $A = \{\text{系统 A 有效}\}, B = \{\text{系统 B 有效}\}$, 则 $P(A) = 0.9, P(B) = 0.95, P(B | \bar{A}) = 0.85$.

$$\begin{aligned}
 (1) P(A | \bar{B}) &= \frac{P(A \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(\bar{A} \bar{B})}{1 - P(B)} = \frac{1 - P(\bar{A} \cup B)}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{1 - [P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} B)]}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{P(A) - P(B) + P(\bar{A}) P(B | \bar{A})}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{P(A) - P(B) + [1 - P(A)] P(B | \bar{A})}{1 - P(B)} \\
 &= \frac{0.9 - 0.95 + (1 - 0.9) \times 0.85}{1 - 0.95} = 0.7
 \end{aligned}$$